保険数学I（問題）

1．次の（1）～（8）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から、正しいものを一つ選んで、所定の解答用紙に、例えば（A）とか（D）のように記号で記入せよ。（40点）

（1）　$P_x = 0.04$、$d = 0.05$　のとき、年12回分割払の終身保険の純保険料（$P_x^{(12)}$）の値に最も近いものは次のうちどれか。（保険金年末払）

（A）0.04166　（B）0.04172　（C）0.04180　（D）0.04188　（E）0.04197

（2）　μ_xが年齢に関係なく定数cに等しいとき、$\bar{a}_x$ を表わす式は次のうちどれか。
（δは利力）

（A）$\dfrac{1}{c-\delta}$　（B）$\dfrac{1}{\delta-c}$　（C）$\dfrac{1}{c+\delta}$　（D）$\dfrac{c}{1+\delta}$　（E）$\dfrac{1}{\delta}$

（3）　次の式のうちで ${}_tV_{x:\overline{n|}}$ に等しくないものはどれか。

（A）$1-(P_{x:\overline{n|}}+d)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$　（B）$1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$

（C）$\dfrac{A_{x+t:\overline{n-t|}}-A_{x:\overline{n|}}}{1-A_{x:\overline{n|}}}$　（D）$\dfrac{P_{x+t:\overline{n-t|}}-P_{x:\overline{n|}}}{P_{x+t:\overline{n-t|}}-d}$　（E）$\dfrac{P_{x:\overline{n|}}-P^{1}_{x:\overline{t|}}}{P_{x:\overline{t|}}-P^{1}_{x:\overline{t|}}}$

（4）　返済額が毎期同額となる元利均等返済（期末払）において、返済期間をn年、年k回返済、年実利率を　i、返済年額をRとするとき、1回目の均等返済金中の利息は次のうちどれか。

（A）$\dfrac{R(1-v^n)}{k}$　（B）$\dfrac{Rv^n}{k}$　（C）$\dfrac{Rv^{\frac{1}{k}}}{k}$　（D）$R\,a^{(k)}_{\overline{n-(1/k)|}}$　（E）$\dfrac{R(1-v^{\frac{1}{k}})}{k}$

（5）　$A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$ を表わす式は次のうちどれか。

（A）$e^{-\int_0^n(\mu_{x+t}+\delta)dt}$　（B）$e^{-\int_0^n(\mu_{x+t}-\delta)dt}$　（C）$1-\int_0^n v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt$

（D）$v^n-\int_0^n v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt$　（E）$1-\delta\int_0^n v^t{}_tp_x\,dt$

（6）　死亡保険金（$1+{}_tV_x$）を保険年度末に支払い、保険料は終身払という終身の保険について、年払純保険料　$P_x = 0.02$、${}_{t-1}V_x = 0.4801$、${}_tV_x = 0.5244$、$i = 5.5\%$　とすると、　q_{x+t-1} に最も近いものは次のうちどれか。
（${}_tV_x$はこの保険の純保険料式責任準備金を表わす。）

（A）3.21 ‰　（B）3.23 ‰　（C）3.25 ‰（D）3.27 ‰　（E）3.29 ‰

(7)　$\ddot{a}_{x+t} + \ddot{a}_{x+3t} = 3\ddot{a}_{x+2t}$ のとき　${}_tV_{x+2t}$ を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{1 - {}_tV_{x+t}}{1 - 2\,{}_tV_{x+t}}$　(B) $\dfrac{1 - 2\,{}_tV_{x+t}}{1 - {}_tV_{x+t}}$　(C) $\dfrac{2 - {}_tV_{x+t}}{1 - 2\,{}_tV_{x+t}}$

(D) $\dfrac{{}_tV_{x+t} - 1}{1 - 2\,{}_tV_{x+t}}$　(E) $\dfrac{2\,{}_tV_{x+t} - 1}{1 - {}_tV_{x+t}}$

(8)　$D_x = 9397.8$ 、 $D_{x+1} = 8850.5$ 、 $p_x = 0.99827$ のとき、利率 i の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 5.0 %　(B) 5.5 %　(C) 6.0 %　(D) 6.5 %　(E) 7.0 %

2.　$\ell_x = 100 - x$ のとき、

養老保険の年払純保険料　$P_{x:\overline{n|}}$ を　x. n. v $\left(=\dfrac{1}{1+i}\right)$ を用いて表わせ。
ここに、
　保険金は年末払
　x は加入年齢
　n は保険期間
とする。　(20点)

3.　予定利率が、保険料払込期間中は i 、払込済後は i' であるような n 年払込終身保険（保険金年末払）において、将来法と過去法の純保険料式責任準備金は一致することを示せ。　(20点)

4.　(1) 次の3つの給付を行なう生命保険の年払純保険料の算式を示せ。（x歳加入、n年満期とする。）
　a.　満期時に被保険者が生存している場合、満期保険金 1 が支払われる。
　b.　被保険者が災害で死亡した時、保険年度末に保険年度末責任準備金の (1 + k)倍が支払われる。
　c.　被保険者が災害以外で死亡した時、保険年度末に保険年度末責任準備金が支払われる。
　ここで、災害による死亡率は一定（ q' ）で年齢によらないものとする。

(2) h が $\dfrac{1}{1+h} = \dfrac{1 + q' \cdot k}{1 + i}$ を満たす時　h を用いて（1）の保険料の算式を示し言葉で説明せよ。

(i = 予定利率)　(20点)

保険数学Ｉ（解答例）

問題番号	解答欄
(1)	(B)
(2)	(C)
(3)	(D)
(4)	(A)
(5)	(A)
(6)	(A)
(7)	(E)
(8)	(C)

正解は上表のとおりであるが，以下問題を再掲するとともに解法を略記する。

(1) $P_x=0.04$ ，　$d=0.05$ のとき，年12回分割払の終身保険の純保険料 ($P_x^{(12)}$) の値に最も近いものは次のうちどれか。（保険金年末払）

（A） 0.04166　（B） 0.04172　（C） 0.04180　（D） 0.04188　（E） 0.04197

（答）（B）

$$P_x^{(m)} \fallingdotseq \frac{P_x}{1-\frac{m-1}{2m}(P_x+d)}=\frac{0.04}{0.95875}=0.041720 \quad \cdots$$

(2) μ が年齢に関係なく定数 c に等しいとき，$\overline{a}_x$ を表わす式は次のうちどれか。（δ は利力）

（A）$\frac{1}{c-\delta}$　（B）$\frac{1}{\delta-c}$　（C）$\frac{1}{c+\delta}$　（D）$\frac{c}{1+\delta}$　（E）$\frac{1}{\delta}$

（答）（C）

$$\mu_x=-\frac{d\log l_x}{dx}=c \quad より \quad l_x=e^{-cx+k} \quad \therefore \ {}_tp_x=e^{-ct}$$

$$\therefore \ \bar{a}_x=\int_0^\infty v^t{}_tp_x dt=\int_0^\infty (ve^{-c})^t \mathrm{dt}=\left[\frac{(ve^{-c})^t}{\log(ve^{-t})}\right]_0^\infty=\frac{1}{c+\delta}$$

(3) 次の式のうちで ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ に等しくないものはどれか。

（A）$1-(P_{x:\overline{n}|}+d)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$　　（B）$1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

（C）$\dfrac{A_{x+t:\overline{n-t}|}-A_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overline{n}|}}$　　（D）$\dfrac{P_{x+t:\overline{n-t}|}-P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+t:\overline{n-t}|}-d}$　　（E）$\dfrac{P_{x:\overline{n}|}-P^{1}_{x:\overline{n}|}}{P_{x:\overline{t}|}-P^{1}_{x:\overline{t}|}}$

（答）（D）

$${}_xV_{x:\overline{n}|}=A_{x+t:\overline{n-t}|}-P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$=1-(P_{x:\overline{n}|}+d)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\qquad (\because\ \ A_{x+t:\overline{n-t}|}=1-d\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})$$

$$=\ 1-\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\qquad (\because\ \ P_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-d)$$

$$=\ 1-\frac{1-A_{x+t:\overline{n-t}|}}{d}\cdot\frac{d}{1-A_{x:\overline{n}|}}\qquad (\because\ \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d}\ \ \text{など})$$

$$=\frac{A_{x+t:\overline{n-t}|}-A_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overline{n}|}}$$

以上より（A)、（B)、（C）は ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ に等しい。

また，　${}_tV_{x:\overline{n}|}=\dfrac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}P_{x:\overline{n}|}-\dfrac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}$　より

$$\text{（E）の分母}\ \times{}_tV_{x:\overline{n}|}=P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}\ {}_tV_{x:\overline{n}|}=\frac{D_{x+t}}{N_x-N_{x+t}}\left(\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}P_{x:\overline{n}|}-\frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}\right)$$

$$=P_{x:\overline{n}|}-P^{1}_{x:\overline{t}|}=(E)\ \ \text{の分子}$$

よって（E）は ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ に等しい。

さらに，　${}_tV_{x:\overline{n}|}=A_{x+t:\overline{n-t}|}-P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

$$=(P_{x+t:\overline{n-t}|}-P_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$=\frac{P_{x+t:\overline{n-t}|}-P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+t:\overline{n-t}|}+d}$$

よって（D）は ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ に等しくない。

(4) 返済額が毎期同額となる元利均等返済（期末払）において，返済期間をn年，年k回返済，年実利率をi，返済年額をRとするとき，1回目の均等返済金中の利息は次のうちどれか。

（A） $\dfrac{R(1-v^n)}{k}$　（B） $\dfrac{Rv^n}{k}$　（C） $\dfrac{Rv^{\frac{1}{k}}}{k}$　（D） $Ra^{(k)}_{\overline{n-(1/k)}|}$　（E） $\dfrac{R(1-v^{\frac{1}{k}})}{k}$

（答）（A）

第1回目の均等返済額を考えると，それまでの利息は，元金 $Ra^{(k)}_{\overline{n}|}$ に対し $\dfrac{i^{(k)}}{k}$ である。

$$Ra^{(k)}_{\overline{n}|}\times\frac{i^{(k)}}{k}=R\cdot\frac{v^{\frac{1}{k}}(1-v^n)}{k(1-v^{\frac{1}{k}})}\times\frac{i^{(k)}}{k}\quad=R\cdot\frac{1-v^n}{i^{(k)}}\times\frac{i^{(k)}}{k}$$

$$=\frac{R(1-v^n)}{k}$$

(5) $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$を表わす式は次のうちどれか。

（A） $e^{-\int_0^n(\mu_{x+t}+\delta)dt}$　（B） $e^{-\int_0^n(\mu_{x+t}-\delta)dt}$　（C） $1-\int_0^n v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt$

（D） $v^n-\int_0^n v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt$　（E） $1-\delta\int_0^n v^t{}_tp_xdt$

（答）（A）

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}=v^n{}_tp_x=e^{-\delta n}\cdot e^{-\int_0^n\mu_{x+t}dt}\qquad=e^{-\int_0^n(\mu_{x+t}+\delta)dt}$$

(6) 死亡保険金（$1+{}_tV_x$）を保険年度末に支払い，保険料は終身払という終身の保険について，年払純保険料$P_x=0.02$，${}_{t-1}V_x=0.4801$，${}_tV_x=0.5244$，i=5.5%とすると，q_{x+t-1}に最も近いものは次のうちどれか。

（${}_tV_x$ はこの保険の純保険料式責任準備金を表わす。）

（A） 3.21 ‰　（B） 3.23 ‰　（C） 3.25 ‰　（D） 3.27 ‰　（E） 3.29 ‰

（答）（A）

題意より　$({}_{t-1}V_x+P_x)(1+i)-(1+{}_tV_x)q_{x+t-1}={}_tV_x(1-q_{x+t-1})$

$\therefore\ ({}_{t-1}V_x+P_x)(1+i)-{}_tV_x=q_{x+t-1}$

$\therefore\ q_{x+t-1}=0.003205\ \cdots$

(7) $\ddot{a}_{x+t}+\ddot{a}_{x+3t}=3\ddot{a}_{x+2t}$ のとき ${}_tV_{x+2t}$ を表わす式は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{1-{}_tV_{x+t}}{1-2{}_tV_{x+t}}$ (B) $\dfrac{1-2{}_tV_{x+t}}{1-{}_tV_{x+t}}$ (C) $\dfrac{2-{}_tV_{x+t}}{1-2{}_tV_{x+t}}$

(D) $\dfrac{{}_tV_{x+t}-1}{1-2{}_tV_{x+t}}$ (E) $\dfrac{2{}_tV_{x+t}-1}{1-{}_tV_{x+t}}$

（答）（E）

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x+2t}&=1-\frac{\ddot{a}_{x+3t}}{\ddot{a}_{x+2t}}=1-\frac{3\ddot{a}_{x+2t}-\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+2t}}\\
&=-2+\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+2t}}\\
&=-2+\frac{1}{1-{}_tV_{x+t}}=\frac{2{}_tV_{x+t}-1}{1-{}_tV_{x+t}}
\end{aligned}
$$

(8) $D_x=9397.8$, $D_{x+1}=8850.5$, $p_x=0.99827$ のとき，利率 i の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A）5.0％ （B）5.5％ （C）6.0％ （D）6.5％ （E）7.0％

（答）（C）

$$\frac{D_{x+1}}{D_x}=v\cdot p_x \qquad \therefore\ 1+i=\frac{1}{v}=\frac{D_x}{D_{x+1}}\cdot p_x$$

$$=1.0600\ \cdots$$

2. $$A_{x:\overline{n|}}=\frac{\sum_{t=0}^{n-1}d_{x+t}v^{t+1}+l_{x+n}\cdot v^n}{l_x}$$

$$=\frac{1}{l_x}\left(\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}+l_{x+n}\cdot v^n\right)$$

$$(\because\ d_{x+t}=l_{x+t}-l_{x+t+1}$$
$$=100-(x+t)-\{100-(x+t+1)\}$$
$$=1)$$

$$=\frac{1}{100-x}\left\{\frac{v(1-v^n)}{1-v}+(100-x-n)v^n\right\}$$

$$=\frac{v(1-v^n)+(1-v)(100-x-n)v^n}{(100-x)(1-v)}$$

$$P_{x:\overline{n}|}=\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{(1-v)A_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overline{n}|}} \qquad (\because\ \ 1-d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=A_{x:\overline{n}|})$$

$$=\frac{(1-v)\dfrac{v(1-v^n)+(1-v)(100-x-n)v^n}{(100-x)(1-v)}}{1-\dfrac{v(1-v^n)+(1-v)(100-x-n)v^n}{(100-x)(1-v)}}$$

$$=\frac{(1-v)\left\{v(1-v^n)+(1-v)(100-x-n)v^n\right\}}{(100-x)(1-v)-v(1-v^n)-(1-v)(100-x-n)v^n}$$

3. i' を用いる計算基数を D', M' 等と書くことにする。

（すなわち $D'_x=\left(\dfrac{1}{1+i'}\right)^x l_x$ ，$M'_x=\sum_{\tau=0}^{\infty}D'_{x+\tau}$　等）

題意より年払保険料　$P=\dfrac{1}{N_x-N_{x+n}}\left(M_x-M_{x+n}+\dfrac{D_{x+n}}{D'_{x+n}}M'_{x+n}\right)$

(i)　$o\leqq t\leqq n$ のとき

$${}_tV_x\text{（過去法）}=\frac{P}{D_{x+t}}(N_x-N_{x+t})-\frac{1}{D_{x+t}}(M_x-M_{x+t})$$

$$=\frac{P}{D_{x+t}}\left\{(N_x-N_{x+n})-(N_{x+t}-N_{x+n})\right\}-\frac{1}{D_{x+t}}(M_x-M_{x+t})$$

$$=\frac{1}{D_{x+t}}(M_x-M_{x+n}+\frac{D_{x+n}}{D'_{x+n}}M'_{x+n})$$

$$-\frac{P}{D_{x+t}}(N_{x+t}-N_{x+n})-\frac{1}{D_{x+t}}(M_x-M_{x+t})$$

$$=\frac{1}{D_{x+t}}(M_{x+t}-M_{x+n}+\frac{D_{x+n}}{D'_{x+n}}M'_{x+n})-\frac{P}{D_{x+t}}(N_{x+t}-N_{x+n})$$

$$={}_tV_x\text{（将来法）}$$

(ii)　$t>n$ のとき

$${}_tV_x\text{（過去法）}=\frac{D'_{x+n}}{D'_{x+t}}\cdot\frac{P}{D_{x+n}}(\mathrm{N}_x-\mathrm{N}_{x+n})-\frac{D'_{x+n}}{D'_{x+t}}\cdot\frac{1}{D_{x+n}}(\mathrm{M}_x-\mathrm{M}_{x+n})$$

$$-\frac{1}{D'_{x+t}}(M'_{x+n}-M'_{x+t})$$

$$=\frac{D'_{x+n}}{D'_{x+t}}\cdot\frac{1}{D_{x+n}}(M_x-M_{x+n}+\frac{D_{x+n}}{D'_{x+n}}M'_{x+n})$$

$$-\frac{D'_{x+n}}{D'_{x+t}}\cdot\frac{1}{D_{x+n}}(M_x-M_{x+n})-\frac{1}{D'_{x+t}}(M'_{x+n}-M'_{x+t})$$

$$=\frac{1}{D'_{x+t}}\cdot M'_{x+t}$$

$$={}_tV_x \quad \text{（将来法）}$$

4. 記号を次のとおり定める。

n ：保険期間

x ：加入年齢

${}_tV_x$ ：第 t 保険年度末責任準備金

q_x ：予定死亡率

P_x ：求める保険料

(1) 題意より，次の等式が成立する。

$$v(1-q_{x+t})\cdot{}_{t+1}V_x={}_tV_x+P_x-v(q_{x+t}-q')\cdot{}_{t+1}V_x-v\cdot q'\cdot(1+k)\cdot{}_{t+1}V_x$$

整理して　$v(1+q'k)\cdot{}_{t+1}V_x={}_tV_x+P_x$

ここに　$j=v(1+q'k)$　とおくと

$$j\cdot{}_{t+1}V_x={}_tV_x+P_x \quad \cdots\cdots①$$

$t=0$ のとき①は

$$j\cdot{}_1V_x={}_0V_x+P_x$$

$t=1$ のとき $j\cdot{}_2V_x={}_1V_x+P_x$ より

$$j^2\cdot{}_2V_x=j\cdot{}_1V_x+j\cdot P_x$$

以下同様にして

$$\vdots$$

$$j^n\cdot{}_nV_x=j^{n-1}\cdot{}_{n-1}V_x+j^{n-1}P_x$$

辺々加えて整理すると

$$j^n\cdot{}_nV_x=P_x(1+j+j^2+\cdots\cdots+j^{n-1})+{}_0V_x$$

題意より ${}_0V_x=0$， ${}_nV_x=1$

$$\therefore\ j^n=P_x(1+j+j^2+\cdots\cdots+j^{n-1})$$

$$\therefore\ P_x=\frac{j^n}{\frac{1-j^n}{1-j}}=\frac{j^n(1-j)}{1-j^n}=\frac{v^n\left(1+q'k\right)^n\left\{1-v(1+q'k)\right\}}{1-v^n\left(1+q'k\right)^n}$$

(2) $\dfrac{1}{1+h}=v(1+q'k)$ なので，(1)より

$$P_x=\frac{\dfrac{1}{(1+h)^n}}{\dfrac{1-\dfrac{1}{(1+h)^n}}{1-\dfrac{1}{1+h}}}=\frac{1}{\dfrac{(1+h)^n-1}{(1+h)-1}\cdot(1+h)}$$

ここで，予定利率 h の期始払確定年金終価を $\ddot{s}_{\overline{n|}}^{(h)}$ とすると

$$P_x=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}^{(h)}}$$

とかける。すなわち，P_x は，n 年後に積立金が 1 となる予定利率 h の定期積金の年払掛金に等しい。