保険数学II　（問題）

1. $l_x = a - x \ (0 \leqq x \leqq a)$, $\mathring{e}_0 = 60$の定常人口の社会において，ある時以降，出生者数が半分になってしまった。

この時から$\frac{a}{2}$年後の平均年齢は何歳上昇したか計算せよ。

ただし死亡率には変更がないものとする。

2. 次の給付を行う保険期間n年の保険を考える。

(1) 保険期間中の死亡に対しては，その保険年度末全期チルメル式責任準備金を年度末に支払う（各年度末の全期チルメル式責任準備金は正とする)。

(2) 満期まで生存した時は保険金1を支払う。

この時，この保険の年払営業保険料を求めよ。

ただし，付加保険料は新契約費(α)のみとし，チルメル歩合は新契約費に等しいものとする。

3. 次の給付を行う保証期間n年の夫婦年金保険を考える。

(a) 保証期間中……年金額Aを支払う。(夫婦の生死にかかわらず)

(b) 保証期間後 ｛（夫が生存中）…………………年金額Aを支払う。／（夫の死亡後妻の生存中）……年金額Bを支払う。｝

ただし，一時払保険料払込と同時に年金支払を開始するものとし，契約時年齢は夫x歳妻y歳とする。また年金は年始払とし，付加保険料は考えないものとする。

この時，下記(1)～(3)の問に答えよ。

(1) この年金保険の一時払保険料を求めよ。

(2) 第t保険年度末責任準備金を保証期間中（$t < n$)，保証期間後（$t \geqq n$）の別にそれぞれ次のケースについて結果のみ記せ。

(イ) 両者生存中　（責任準備金を ${}_tV^1$ とする）

(ロ) 夫のみ生存中　（　〃　${}_tV^2$　〃　）

(ハ) 妻のみ生存中　（　〃　${}_tV^3$　〃　）

(ニ) 両者死亡後　（　〃　${}_tV^4$　〃　）

(3) (2)の結果を利用して，次の漸化式が成り立つことを$t < n$の場合に証明せよ。

$$\begin{aligned} {}_tV^1 = A &+ vp_{x+t}p_{y+t} \cdot {}_{t+1}V^1 + vp_{x+t}q_{y+t} \cdot {}_{t+1}V^2 + vq_{x+t}p_{y+t} \cdot {}_{t+1}V^3 \\ &+ vq_{x+t}q_{y+t} \cdot {}_{t+1}V^4 \end{aligned}$$

4. 契約時（契約時年齢 x 歳）より経過 t 年で死亡した場合には，保険金 S_t を即時に支払う終身保険において，純保険料は終身連続払で年額 P とし，経過 t 年の責任準備金を V_t とする。

このとき，等式

$$\frac{\int_0^\infty v^t S_t \; {}_tp_x^{(T)} \mu_{x+t}\, dt + \int_0^\infty v^t V_t \; {}_tp_x^{(T)} \cdot \omega_{x+t}\, dt}{\int_0^\infty v^t \; {}_tp_x^{(T)}\, dt} = P$$

が成立することを示し，式の意味を言葉で説明せよ。

ここに　${}_tp_x^{(T)} = e^{-\int_0^t (\mu_{x+r} + \omega_{x+r})\, dr}$

$\mu_{x+t} =$（$x+t$ 歳における死力）

$\omega_{x+t} =$（$x+t$ 歳における解約による瞬間脱退率）

とする。

5. 次のA，B，C 3問のうち，1問を選んで解答せよ。

A．保険金即時払の一時払養老保険において利力 δ を利力 $\delta'(\delta' \geq \delta)$ に変更するとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

(1)
$$\overline{A}_{x:\overline{n|}} - \overline{A}'_{x:\overline{n|}} = (\delta' - \delta) \int_0^n e^{-\delta' t} \; {}_tp_x \overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}}\, dt$$

(2)
$$\frac{1}{\overline{A}'_{x:\overline{n|}}} \leqq \frac{1}{\overline{A}_{x:\overline{n|}}} \left(1 + (\delta' - \delta) \int_0^n e^{\delta'(n-t)} \overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}}\, dt \right)$$

ここに，$\overline{A}_{x:\overline{n|}}$ は利力 δ による一時払保険料を，$\overline{A}'_{x:\overline{n|}}$ は利力 δ' による一時払保険料を表わすものとする。

B．次の年金制度を考える。

a．被保険者は x 歳から $x+n-1$ 歳の間で生命表の生残数 l_{x+t} 人で分布し，この人数は変らないものとする。すなわち，毎年 l_x 人加入し，l_{x+n} 人ずつ脱退し，この間の脱退は死亡者以外ないものとする。

b．保険料は年１回年始払とする。

c．給付は老齢年金のみで，支給開始年齢が $x+n$ 歳の終身年金（年１回期始払）とする。年金額は保険料払込回数に応じて $\frac{1}{n}$ ずつ増加し，x 歳から $x+n-1$ 歳までの n 回の保険料が払い込まれたときに１になる。

この時，

(1) 単位積立方式（Unit credit method）による１人当りの正常費用（Normal cost）P は

$$P=\frac{\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}\cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}}{\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}}$$

であることを示せ。

(2) 開放基金方式（Open aggregate nomal method）による１人当りの正常費用 P' は

$$P'=\frac{\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}(n-t)l_{x+t}\cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}+\frac{v}{d}l_{x}\,{}_{n|}\ddot{a}_{x}}{\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}+\frac{v}{d}l_{x}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

であることを示せ。

(3) $P=P'$ を証明せよ。

C. n 件の保険契約を保有している会社がある。

この会社の保険契約の保険事故発生確率 q および保険事故が発生した時の支払保険金額の分布関数 $F(x)$ は次のとおりである。

$$q = 0.02$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - e^{-0.05x} & (0 \leqq x < 100) \\ 1 & (100 \leqq x) \end{cases}$$

この会社の支払保険金総額 S（確率変数）については，$E(S)$ を S の期待値とすると，

$$Prob\{0.8\,E(S) \leqq S \leqq 1.2\,E(S)\} = 0.90$$

が成立っているという。

この時，この会社の保有契約件数 n を求めよ。

なお，確率変数 S の分布は，正規分布で近似できるものとし，必要ならば次の数値を用いよ。

$$e^{-0.05} = 0.951229 \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1.645}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0.05$$

$$e^{-5} = 0.006738 \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1.282}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0.1$$

保険数学 II （解答例）

1．現時点の平均年齢$\overline{X}$　は

$$\overline{X} = \frac{\int_0^a l_y \, y\,dy}{\int_0^a l_y \, dy} = a／3$$

a／2　年後の平均年齢$\overline{X}'$　は

$$\overline{X}' = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{a/2} l_y \, y\,dy + \int_{a/2}^{a} l_y \, y\,dy}{\frac{1}{2}\int_0^{a} l_y \, dy + \int_{a/2}^{a} l_y \, dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}a y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{a/2} + \left[\frac{1}{2}a y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_{a/2}^{a}}{\frac{1}{2}\left[a y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{a/2} + \left[a y - \frac{1}{2}y^2\right]_{a/2}^{a}}$$

$$= \frac{a^3／8}{5a^2／16} = 2a／5$$

よって、$\overline{X}' - \overline{X} = a／15$　歳高齢化したことになる。

ここで、$\mathring{e}_0 = 60$　より　aを求めると

$$\mathring{e}_0 = \int_0^a l_y \, dy／l_0 = a／2 \qquad \therefore \quad a = 120$$

故に、8歳高齢化したことになる。

2．営業保険料をP'、平準純保険料をPとすると

$$P' = P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

であるから、チルメル式責任準備金を $_tV$ とすると、次が成り立つ。

$$P' - \alpha = v q_x \cdot {}_1V + v p_x \cdot {}_1V$$

$$P' + {}_tV = v q_{x+t} \cdot {}_{t+1}V + v p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$$

$$(1 \leqq t \leqq n-1)$$

即ち、

$$P' - \alpha = v \cdot {}_1V \quad \cdots\cdots①$$

$$P' + {}_tV = v \cdot {}_{t+1}V \quad (1 \leqq t \leqq n-1) \cdots\cdots②$$

②の両辺に v^t を乗じたものと①を合計すると

$$P' \cdot \sum_{t=0}^{n-1} v^t - \alpha = v^n \cdot {}_nV = v^n$$

$$\therefore \quad P' = \frac{v^n + \alpha}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

3．

(1) $A(\ddot{a}_{\overline{n|}} + {}_{n|}\ddot{a}_x) + B({}_{n|}\ddot{a}_y - {}_{n|}\ddot{a}_{xy})$

(2)

（保証期間中　：$t < n$）

$${}_tV^1 = A \cdot (\ddot{a}_{\overline{n-t|}} + {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}) +$$
$$B \cdot ({}_{n-t|}\ddot{a}_{y+t} - {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t:y+t})$$

$${}_tV^2 = A \cdot (\ddot{a}_{\overline{n-t|}} + {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t})$$

$${}_tV^3 = A \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t|}} + B \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{y+t}$$

$${}_tV^4 = A \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t|}}$$

（　保証期間後　：$t \geqq n$　）

$${}_tV^1 = A \cdot \ddot{a}_{x+t} + B \cdot (\ddot{a}_{y+t} - \ddot{a}_{x+t:y+t})$$

$${}_tV^2 = A \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

$${}_tV^3 = B \cdot \ddot{a}_{y+t}$$

$${}_tV^4 = 0$$

(3)　次の①から④の等式が成り立つ。

$$\ddot{a}_{\overline{n-t|}} = 1 + v \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t-1|}}$$

$$= 1 + v \cdot (p_{x+t}\ p_{y+t} + p_{x+t}\ q_{y+t} + q_{x+t}\ p_{y+t} + q_{x+t}\ q_{y+t}) \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t-1|}} \cdots ①$$

$${}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} = v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{x+t+1}$$

$$= v \cdot p_{x+t} \cdot (p_{y+t} + q_{y+t}) \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{x+t+1} \cdots\cdots ②$$

$${}_{n-t|}\ddot{a}_{y+t} = v \cdot (p_{x+t} + q_{x+t})\ p_{y+t} \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{y+t+1} \cdots\cdots ③$$

$${}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t:y+t} = v \cdot p_{x+t}\ p_{y+t} \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{x+t+1:y+t+1} \cdots\cdots ④$$

$${}_tV^1 = A \times (① + ②) + B \times (③ - ④)$$

において右辺を　$v \cdot p_{x+t}\ p_{y+t}$，$v \cdot p_{x+t}\ q_{y+t}$

$v \cdot q_{x+t}\ p_{y+t}$，$v \cdot q_{x+t}\ q_{y+t}$ についてまとめると、

$${}_tV^1 = A + v \cdot p_{x+t}\ p_{y+t} \cdot (A \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t-1|}} + A \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{x+t+1} + B \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{y+t+1} - B \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{x+t+1:y+t+1}) +$$

$$
\begin{aligned}
& \upsilon \cdot p_{x+t}\, q_{y+t}\, (A \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t-1|}} + A \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{x+t+1}) \\
+ & \upsilon \cdot q_{x+t}\, p_{y+t}\, (A \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t-1|}} + B \cdot {}_{n-t-1|}\ddot{a}_{y+t+1}) \\
+ & \upsilon \cdot q_{x+t}\, q_{y+t}\, (A \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t-1|}}) \\
= & A + \upsilon \cdot p_{x+t}\, p_{y+t} \cdot {}_{t+1}V^1 \\
+ & \upsilon \cdot p_{x+t}\, q_{y+t} \cdot {}_{t+1}V^2 + \upsilon \cdot q_{x+t}\, p_{y+t} \cdot {}_{t+1}V^3 \\
+ & \upsilon \cdot q_{x+t}\, q_{y+t} \cdot {}_{t+1}V^4
\end{aligned}
$$

4.

$$A_t = \int_0^t \upsilon^u \cdot S_u \cdot {}_u p_x \cdot \mu_{x+u}\, du \qquad \cdots\cdot ①$$

$$a_t = \int_0^t \upsilon^u \cdot {}_u p_x\, du \qquad \cdots\cdot ②$$

とおくと

$$P = A_\infty / a_\infty \qquad \cdots\cdot ③$$

またV_tを過去法で表現すると

$$\upsilon^t \cdot {}_t p_x \cdot V_t = P \cdot a_t - A_t \qquad \cdots\cdot ④$$

$${}_t p_x^{\omega} = \exp\left(-\int_0^t \omega_{x+u}\, du\right)$$ とおくと、

$${}_t p_x^{(T)} = {}_t p_x \cdot {}_t p_x^{\omega}$$ となる。

$$\int_0^\infty \upsilon^t \cdot S_t \cdot {}_t p_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty {}_t p_x^{\omega} \cdot (\upsilon^t \cdot S_t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t})\, dt$$

$$= \left[{}_t p_x^{\omega} \cdot A_t \right]_0^\infty + \int_0^\infty {}_t p_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t} \cdot A_t\, dt$$

$$= {}_{\infty}p_x^{\omega} \cdot A_{\infty} + \int_0^{\infty} A_t \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt \quad \cdots\cdot ⑤$$

$$\int_0^{\infty} v^t \cdot V_t \cdot {}_tp_x^{(T)} \cdot \omega_{x+t}\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} (v^t \cdot V_t \cdot {}_tp_x) \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} (P \cdot a_t - A_t) \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt$$

$$= P \cdot \int_0^{\infty} a_t \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt - \int_0^{\infty} A_t \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt \quad \cdots\cdot ⑥$$

$$\int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x^{(T)}\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} {}_tp_x^{\omega} \cdot (v^t \cdot {}_tp_x)\,dt$$

$$= \left[{}_tp_x^{\omega} \cdot a_t \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t} \cdot a_t\,dt$$

$$= {}_{\infty}p_x^{\omega} \cdot a_{\infty} + \int_0^{\infty} a_t \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt \quad \cdots\cdot ⑦$$

⑤, ⑥, ⑦より

(等式の左辺の分子) $= {}_{\infty}p_x^{\omega} \cdot A_{\infty} + P \cdot \int_0^{\infty} a_t \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt$

$= P \cdot \left({}_{\infty}p_x^{\omega} \cdot a_{\infty} + \int_0^{\infty} a_t \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt \right)$

(等式の左辺の分母) $= {}_{\infty}p_x^{\omega} \cdot a_{\infty} + \int_0^{\infty} a_t \cdot {}_tp_x^{\omega} \cdot \omega_{x+t}\,dt$

∴　(等式の左辺) $= P$

この等式の意味するところは左辺が解約による脱退率まで基礎率に反映した場合の保険料を表しており、死亡に対する保険金支払の他に解約に対して責任準備金を支払えば、その保険料は解約を考慮しない通常の保険料に一致することを示している。

5－A.

(1) Thiele の微分方程式を $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}$, $\bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}}$ に適用すると

$$\frac{d}{dt}\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} = (\mu_{x+t} + \delta)\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \mu_{x+t}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}} = (\mu_{x+t} + \delta')\ \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}} - \mu_{x+t}$$

2式の両辺を差し引くと

$$\frac{d}{dt}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}})$$

$$= (\mu_{x+t} + \delta')\ (\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}})$$

$$- (\delta' - \delta)\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} = {}_tV$, $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}} = \Delta\ {}_tV$ とおいて、両辺に $\exp(-\delta'\cdot t)\cdot {}_tp_x$ を乗じると

$$\exp(-\delta'\cdot t)\cdot {}_tp_x \cdot \frac{d}{dt}\Delta\ {}_tV$$

$$= \exp(-\delta'\cdot t)\cdot {}_tp_x\ (\mu_{x+t} + \delta')\ \Delta\ {}_tV$$

$$- (\delta' - \delta)\ \exp(-\delta'\cdot t)\cdot {}_tp_x \cdot {}_tV$$

$$\therefore\ \exp(-\delta'\cdot t)\cdot {}_tp_x \cdot \frac{d}{dt}\Delta\ {}_tV$$

$$- \exp(-\delta'\cdot t)\cdot {}_tp_x\ (\mu_{x+t} + \delta')\ \Delta\ {}_tV$$

$$= -(\delta' - \delta)\exp(-\delta' \cdot t) \cdot {}_tp_x \cdot {}_tV$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\{\exp(-\delta' \cdot t) \cdot {}_tp_x \cdot \Delta\ {}_tV\}$$

$$= -(\delta' - \delta)\exp(-\delta' \cdot t) \cdot {}_tp_x \cdot {}_tV$$

両辺を0からnまで積分すると

$$\exp(-\delta' \cdot n) \cdot {}_np_x \cdot \Delta\ {}_nV - \Delta\ {}_0V$$

$$= -(\delta' - \delta)\int_0^n \exp(-\delta' \cdot t) \cdot {}_tp_x \cdot {}_tV dt$$

$\Delta\ {}_nV = 0$, $\Delta\ {}_0V = \bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}'_{x:\overline{n|}}$, ${}_tV = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}$ を用いて

書き直すと

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}'_{x:\overline{n|}}$$

$$= (\delta' - \delta)\int_0^n \exp(-\delta' \cdot t) \cdot {}_tp_x \cdot \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} dt$$

(2)

$$F = \bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}'_{x:\overline{n|}}$$
$$- (\delta' - \delta) \cdot \bar{A}'_{x:\overline{n|}} \cdot \int_0^n \exp(-\delta' \cdot t) \cdot \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} dt$$

とおき、(1)の結果を用いると

$$F = (\delta' - \delta) \cdot \int_0^n \exp(-\delta' \cdot t) \cdot {}_tp_x \cdot \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} dt$$

$$- (\delta' - \delta) \cdot \bar{A}'_{x:\overline{n|}} \cdot \int_0^n \exp\{\delta' \cdot (n - t)\} \cdot \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} dt$$

$$\leqq (\delta' - \delta) \cdot \int_0^n \exp(-\delta' \cdot t) \cdot \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} dt$$

$$-(\delta' -\delta)\cdot\overline{A}'_{x:\overline{n}|}\exp(\delta\cdot n)\cdot\int_0^n \exp(\delta'\cdot t)\cdot\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\,dt$$

$$=(\delta' -\delta)\cdot\int_0^n \exp(-\delta'\cdot t)\cdot\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\,dt$$

$$\cdot(1-\overline{A}'_{x:\overline{n}|}\cdot\exp(\delta'\cdot n))$$

$\overline{A}'_{x:\overline{n}|}\geqq\exp(-\delta'\cdot n)$　より　$1-\overline{A}'_{x:\overline{n}|}\cdot\exp(\delta'\cdot n)\leqq 0$、

また　$(\delta' -\delta)\cdot\int_0^n \exp(-\delta'\cdot t)\cdot\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\,dt\geqq 0$　だから　$F\leqq 0$

したがって、F（$\leqq 0$）を　$\overline{A}_{x:\overline{n}|}\cdot\overline{A}'_{x:\overline{n}|}$（$>0$）で割って変形すると

$$\frac{1}{\overline{A}'_{x:\overline{n}|}}\leqq\frac{1}{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}\times$$

$$\left[1+(\delta' -\delta)\cdot\int_0^n \exp\{\delta'\cdot(n-t)\}\,\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\,dt\right]$$

5－B

(1)　単位積立方式による被保険者全体の正常費用は、毎年全被保険者が単位年金額　$1/n$　を買い増すものとして計算されるから、被保険者全体の正常費用は

$$\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}\left(\frac{1}{n}\cdot{}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}\right)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}\cdot{}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}$$

今、被保険者の数は　$\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}$　だから、1人当りの正常費用Pは

$$P=\frac{\dfrac{1}{n}\cdot\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}\cdot{}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}}{\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}}$$

(2) 開放基金方式では、現存者に関する将来勤務債務と将来新規加入者に関する債務との合計額が現存者と将来新規加入者に関する収入現価に等しくなるように１人当りの正常費用を定めるのだから、P’ は次のようにして求められる。

（現存者に関する将来勤務債務）

ｘ＋ｔ歳の人が今後積み上げる年金額は（ｎ－ｔ）／ｎだから

$$\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot \left(\frac{n-t}{n} \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} \right) =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \cdot l_{x+t} \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}$$

（将来新規加入者に関する債務）

ｋ年後の新規加入者１人当りの債務は、加入年齢がｘ歳で年金額が１だから、$v^k \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$

したがって、すべての将来新規加入者に関する債務は

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_x \cdot \left(v^k \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} v^k \right) l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$= \frac{v}{d} \cdot l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

（現存者に関する収入現価）

$$\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot \left(P' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \right) = P' \cdot \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

（将来新規加入者に関する収入現価）

ｋ年後の新規加入者１人当りの収入現価は、v^k （$P' \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$）だから

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_x \cdot v^k \left(P' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \right) = P' \cdot \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^k \right) \cdot l_x \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$$= P' \cdot \frac{\upsilon}{d} \cdot l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

以上の結果から

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \cdot l_{x+t} \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} + \frac{\upsilon}{d} \cdot l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$= P' \cdot \left(\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} + \frac{\upsilon}{d} \cdot l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \right)$$

$$\therefore \quad P' = \frac{\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \cdot l_{x+t} \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} + \dfrac{\upsilon}{d} \cdot l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x}{\displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} + \dfrac{\upsilon}{d} \cdot l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

(3)

$$P' \text{の分子} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \cdot l_{x+t} \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} + \frac{\upsilon}{d} \cdot l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$= \frac{1}{n} (1+i)^n \cdot \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \cdot \upsilon^{n-t} \cdot l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x +$$

$$\frac{\upsilon}{d} \cdot l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$= \left\{ \frac{1}{n} (1+i)^n \cdot (Ia)_{\overline{n|}} + \frac{\upsilon}{d} \right\} \cdot l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$= \left\{ \frac{1}{n} (1+i)^n \cdot \frac{1}{d} (a_{\overline{n|}} - n\upsilon^{n+1}) + \frac{\upsilon}{d} \right\} \cdot l_x \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{n} \cdot (1+i)^{n} \cdot a_{\overline{n|}} \cdot l_{x} \cdot {}_{n|}\ddot{a}_{x}$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{t} \cdot l_{x} \cdot {}_{n|}\ddot{a}_{x}$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}$$

P’の分母＝ $\displaystyle \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} + \frac{\upsilon}{d} \cdot l_{x} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

$$= \frac{1}{d} \left(\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} - \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot A_{x+t:\overline{n-t|}} \right) + \frac{\upsilon}{d} \cdot l_{x} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$$= \frac{1}{d} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} - \upsilon \sum_{t=0}^{n-1} \left(l_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. l_{x+t+1} \cdot \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}} \right) + \upsilon \cdot l_{x} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \right\}$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}$$

$$\therefore \quad P' = \frac{\dfrac{1}{d} \cdot \dfrac{1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t}}{\dfrac{1}{d} \cdot \displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}} = P$$

5－C

F(x) の密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 0.05e^{-0.05x} & (0 \leqq x<100) \\ e^{-5} & (x=100) \\ 0 & (100<x) \end{cases}$$

だから、F(x) の平均値μ，分散σ^2 は

$$\mu = \frac{1-e^{-5}}{0.05} = 19.86524$$

$$\sigma^2 = \frac{1-2\times 5\times e^{-5}-(e^{-5})^2}{0.05^2} = 373.02984$$

今、Iを給付発生の有無を示すindicator で

$$I = \begin{cases} 0 & (確率\quad 1-q) \\ 1 & (確率\quad q\quad) \end{cases}$$

とし、Xを1契約の給付金の支払額を表わす確率変数とすると

$$E(X|I) = E(X|I=1)\cdot I = \mu\cdot I$$

$$Var(X|I) = Var(X|I=1)\cdot I = \sigma^2\cdot I$$

$$\therefore\quad E(X) = E(E(X|I)) = E(\mu\cdot I) = \mu\cdot q$$

$$= 19.86524\times 0.02 = 0.39730$$

$$Var(X) = Var(E(X|I)) + E(Var(X|I))$$

$$= \mu^2\cdot q\cdot(1-q) + \sigma^2\cdot q$$

$$= 19.86524^2\times 0.02\times(1-0.02) + 373.02784\times 0.02 = 15.19530$$

$$E(S) = nE(X)$$

$$Var(S) = n\,Var(X)$$

与式から

$$0.90 = Prob\{0.8E(S) \leqq S \leqq 1.2E(S)\}$$

$$=\mathrm{Prob}\ \left\{-\frac{0.2\,E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leqq \frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leqq \frac{0.2\,E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right\}$$

$$\fallingdotseq \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \qquad \left(a=\frac{0.2E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

$$=1-2\cdot\int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

即ち、

$$\int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx=0.05$$

$$\therefore \qquad a=\frac{0.2E(S)}{\sqrt{Var(S)}}=1.645$$

$$\frac{E(S)}{\sqrt{Var(S)}}=\frac{nE(X)}{\sqrt{n\,Var(X)}}=\sqrt{n}\ \frac{E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \qquad \text{だから}$$

$$n=\left(\frac{1.645}{0.2}\right)^2\times\frac{15.1953}{0.3973^2}=6512.44 \quad \Rightarrow \quad 6512$$