昭和60年度（問　題）

1. 正規母集団N（μ，σ^2）で，$\mu=30$という仮説を $\mu=30+\sigma$ という対立仮説に対して検定したい。有意水準１％の右側検定で，第２種の誤りをおかす確率が５％となるように標本の大きさを定めよ。
（注） $u(0.01)=2.33$，$u(0.05)=1.65$

2. 平均m，分散σ^2をもつ大きさＮの有限母集団からn個の標本X_1，X_2，………，X_nを非復元抽出するときの$\overline{X}$の平均および分散を求めよ。

ただし，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$とする。

3. X_1，X_2，………，X_nは互に独立で，いずれもθの不偏推定量とし，分散$V(X_i)=\sigma_i^2>0$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）とする。このときX_1，X_2，………，X_nの１次式となるθの不偏推定量のなかで，分散が最小となるものを求めよ。

4. ある学校で50人の生徒について，英語のテストの点数と数学のテストの点数との相関係数（r）を求めたところ，$r=0.33$となったという。このとき，英語の成績は数学の成績と無関係である（母相関係数＝０）といえるか。有意水準５％で検定せよ。
（注） t_{48}（0.025）＝2.01

5. 待ち行列の理論に関する以下の考察について，(A)〜(I)にあてはまる算式を解答用紙に記入せよ。

（前提）① サービス・ステーションは１ケ所とする。

② 客は平均到着率（単位時間当たりの到着の割合）λ を有するポアソン分布にしたがって到着し，平均サービス率（平均サービス時間の逆数）μ の指数分布にしたがうサービスを受けて退去する。

③ サービスは客の到着順に処理される。

$$\left.\begin{array}{ll} P_n(t): & \text{時刻 } t \text{ に } n \text{ 人の客がいる確率} \\ \lambda\Delta t\ : & \text{時刻 } t \text{ と } t+\Delta t \text{ の間に１人の客が到着する確率} \\ \mu\Delta t\ : & \text{時刻 } t \text{ と } t+\Delta t \text{ の間に１人のサービスが終了する確率} \end{array}\right\}\text{として}$$

(1) $P_0(t+\Delta t)$について考えて見よう。

時刻 $t+\Delta t$ に客が１人もいない状態の確率は

(a) 時刻tに客が誰もいなくて，かつ時刻tと$t+\Delta t$の間に誰もこない場合と

(b)　時刻 t に客が1人いたが，時刻 t と $t+\Delta t$ の間にサービスが終了し，かつ時刻 t と $t+\Delta t$ の間に誰もこない場合

の確率の和と考えられるから

$P_0(t+\Delta t)=$ [(A)] となる。

$P_0(t)$ を移項し，両辺を Δt で割ると

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}= [\ \ (B)\ \ ]$$ となる。

更に $\Delta t\to 0$ とすると

$$P_0'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}= [\ \ (C)\ \ ]$$ が得られる。

(2)　次に $P_n(t+\Delta t)$ について考えると

$P_n(t+\Delta t)=$ [(D)]

となり，(1)と同様にして $P_n'(t)$ を求めると

$$P_n'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}= [\ \ (E)\ \ ]$$ となる。

(3)　時間が十分経過して $P_n(t)$ が t に無関係となり，$P_n(t)=P_n$ と表わせかつ $\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$ である場合 $(\lambda<\mu)$ を考えよう。

この場合 $P_n'(t)=0$ 　$(n=0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots)$ 　であるから

[(F)] $=0$ ……………… (i)
[(G)] $=0$ ……………… (ii)
を得る。

上記(i),(ii)式より P_n を求めると

$P_n=$ [(H)] ………….. (iii)

となる。

(4)　(iii)式を使用して，サービスを受けている客と待っている客の数の平均値 $L\ (=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n)$ を求めると

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n$$
$$= [\ \ (I)\ \ ]$$

となる。

昭和60年度（解答例）

1. 大きさnの標本変量平均$\overline{X}$は，仮説$\mu=30$のもとで，$N(30,\ \frac{\sigma^2}{n})$ に従う。このとき

$$P_r\left(\frac{\overline{X}-30}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > 2.33\right) = 0.01$$

であるから，有意水準1％の右側検定で，

$$\overline{X} < 30 + 2.33\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

のとき，仮説$\mu=30$を採ることとなる。

ところで，対立仮説 $\mu=30+\sigma$ のもとで，$\overline{X}$は$N(30+\sigma,\ \frac{\sigma^2}{n})$ に従い，そのとき第2種の誤りをおかす確率は

$$P_r\left(\overline{X} < 30 + 2.33\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P_r\left(\frac{\overline{X}-(30+\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 2.33 - \sqrt{n}\right)$$

となる。この確率が5％となるのは

$$2.33 - \sqrt{n} = -1.65$$

のときであり，これよりnを求めると

$$n \fallingdotseq 15.84$$

となる。従って，標本の大きさは16とすればよい。

2. 大きさNの有限母集団の各要素をa_k（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N$)で表す。このとき

$$P_r(X_i = a_k) = \frac{{}_{N-1}P_{n-1}}{{}_{N}P_{n}} = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

であるから，X_i の平均 $E[X_i]$ は

$$E[X_i] = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot P_r(X_i = a_k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k = m$$

となる。従って，$\overline{X}$の平均$E[\overline{X}]$ は

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot m$$

$$= m$$

である。

次に，$\overline{X}$ の分散$V[\overline{X}]$ を求める。

$$V[\overline{X}] = E[\overline{X}] = E[(\overline{X} - m)^2]$$

$$= E\left[\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - m\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n}(X_i - m)(X_j - m)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - m)^2] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} E[(X_i - m)(X_j - m)]\right\}$$

ところで，

$$E[(X_i - m)^2] = \sum_{k=1}^{N} (a_k - m)^2 P_r(X_i = a_k)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (a_k - m)^2$$

$$= \sigma^2$$

$$E[(X_i - m)(X_j - m)] = \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^{N} (a_k - m)(a_l - m) P_r(X_i = a_k, X_j = a_l)$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^{N} (a_k - m)(a_l - m)$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \left\{ \sum_{k=1}^{N} (a_k - m) \sum_{l=1}^{N} (a_l - m) - \sum_{k=1}^{N} (a_k - m)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} (0 - N\sigma^2)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{N-1}$$

従って

$$V[\overline{X}] = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\sigma^2}{N-1} \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left\{ n\sigma^2 - n(n-1) \frac{\sigma^2}{N-1} \right\}$$

$$= \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

3. $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n X_n$

とおくと，各X_i（$i=1$，2，……，n）がθの不偏推定量であるから，

Xの期待値$E(X)$は

$$E(X) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \cdots\cdots\cdots + a_n E(X_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n)\theta$$

となる。Xがθの不偏推定量であるための条件から，

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

が成り立つ。

Xの分散$V(X)$は，題意より

$$V(X) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + \cdots\cdots\cdots + a_n^2 V(X_n)$$
$$= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \cdots\cdots\cdots + a_n^2 \sigma_n^2 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

となる。

①の条件の下で，②を最小とするa_1，a_2，……，a_n を求める。

$$L = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \cdots\cdots\cdots + a_n^2 \sigma_n^2 - \lambda(a_1 + a_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n - 1)$$

とおき，a_1，a_2，……，a_n について偏微分する。

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 2a_1 \sigma_1^2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = 2a_2 \sigma_2^2 - \lambda$$

………………

$$\frac{\partial L}{\partial a_n} = 2a_n \sigma_n^2 - \lambda$$

各$\dfrac{\partial L}{\partial a_i}$ （$i=1$，2，……，n）を0とおくと

$$a_i = \frac{\lambda}{2\sigma_i^2} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

が得られる。$a_1+a_2+\cdots\cdots\cdots+a_n=1$ より

$$\lambda = \frac{2}{\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sigma_n^2}\right)}$$

であるから，このとき各a_i（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）は

$$a_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sigma_n^2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

となる。

ここで，これらのa_i（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）に対して②が最小となることを示す。いま，$X_1, X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n$ の１次式でθの不偏推定量なる他の式

$$X' = a'_1X_1 + a'_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + a'_nX_n \qquad (a'_1+a'_2+\cdots\cdots\cdots+a'_n=1)$$

が与えられたとすると，

$$V(X') = a_1'^2\sigma_1^2 + a_2'^2\sigma_2^2 + \cdots\cdots\cdots + a_n'^2\sigma_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{a_i + (a'_i - a_i)\right\}^2\sigma_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i(a'_i-a_i)\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}(a'_i-a_i)^2\sigma_i^2$$

となる。③より，

$$a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2 = \cdots\cdots\cdots = a_n\sigma_n^2$$

であるから

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i(a'_i-a_i)\sigma_i^2 = 2a_1\sigma_1^2 \sum_{i=1}^{n}(a'_i-a_i) = 0$$

また，X'はXと異る推定量であるから，少なくとも１つのi（$i=1, 2, \cdots\cdots,\ n$）に対して

$$a_i' \neq a_i$$

が成り立つ。従って

$$V(X') = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (a_i' - a_i)^2 \ \sigma_i^2$$

$$> \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 = V(X)$$

すなわち，a_iが④によって与えられるとき②は最小となる。

故に，求める推定量は

$$\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{\sigma_n^2} \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} X_i$$

である。

4.　2次元正規母集団 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ からの標本

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots\cdots, (x_n, y_n)$$

によって作られた母相関係数ρの推定値である標本相関係数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})}}, \quad \left(\text{ただし，} \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \ \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \right)$$

は，$\rho = 0$のとき確率密度関数が

$$f(r)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\quad(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}$$

の分布に従う。このとき，統計量

$$T=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

は自由度 $n-2$ の t ー分布

$$g(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{(n-2)\pi}\ \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

に従う。

いま，帰無仮説 $\rho=0$，対立仮説 $\rho\neq 0$ の検定を有意水準５％で行なう。与えられた標本（$n=50$）において

$$T=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{48}$$

は自由度48の t ー分布に従う。このとき，有意水準５％の棄却域は

$$R=\{T\,|\,|T|>2.01\}$$

であり，Tの実現値は

$$T_0=\frac{0.33}{\sqrt{1-(0.33)^2}}\sqrt{48}\fallingdotseq 2.43$$

であるので，　$T_0\in R$ となり，帰無仮説 $\rho=0$ は棄却される。すなわち，有意水準

5％で，〝英語の成績は数学の成績と無関係である〞とはいえない。

5.

（A） $P_0(t+\Delta t)$ は次の2つの確率の和である：

。時刻 t に客が誰もいなくて，$[t, t+\Delta t]$ に誰も到着しない確率――$P_0(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)$

。時刻 t に客が1人いたが，$[t, t+\Delta t]$ にサービスが終了し，かつ$[t, t+\Delta t]$に誰も到着しない確率―― $P_1(t)\cdot\mu\Delta t\cdot(1-\lambda\Delta t)$

すなわち，

$$P_0(t+\Delta t)=\boxed{P_0(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\cdot\mu\Delta t\cdot(1-\lambda\Delta t)} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

（B） 上記の算式を変形する。

$$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=\Delta t\{-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)-\lambda\mu P_1(t)\Delta t\}$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=\boxed{\mu P_1(t)-\lambda P_0(t)-\lambda\mu P_1(t)\Delta t} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{B})$$

（C）

$$P_0'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\{\mu P_1(t)-\lambda P_0(t)-\lambda\mu P_1(t)\Delta t\}$$

$$=\boxed{\mu P_1(t)-\lambda P_0(t)} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{C})$$

（D） $P_n(t+\Delta t)$ は次の4つの確率の和である：

。時刻 t に客が $n-1$ 人いて，$[t, t+\Delta t]$ に1人到着しかつ誰もサービスが終了しない確率―― $P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t\cdot(1-\mu\Delta t)$

。時刻 t に客が n 人いて，$[t, t+\Delta t]$ に誰も到着せずかつ誰もサービスが終

了しない確率——$P_n(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)\cdot(1-\mu\Delta t)$

◦時刻 t に客が n 人いて，$[t, t+\Delta t]$ に1人到着しかつ1人サービスが終了する確率—— $P_n(t)\cdot\lambda\Delta t\cdot\mu\Delta t$

◦時刻 t に客が $n+1$ 人いて，$[t, t+\Delta t]$ に誰も到着せずかつ1人サービスが終了する確率——$P_{n+1}(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)\cdot\mu\Delta t$

すなわち

$$\boxed{P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t\cdot(1-\mu\Delta t)+P_n(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)\cdot(1-\mu\Delta t)}$$

$$\boxed{+P_n(t)\cdot\lambda\Delta t\cdot\mu\Delta t+P_{n+1}(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)\cdot\mu\Delta t} \quad \cdots\cdots(\mathrm{D})$$

（E） 上記の算式

$$P_n(t+\Delta t)$$

を変形すると

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=(\lambda-\lambda\mu\Delta t)P_{n-1}(t)+(-\lambda-\mu+2\lambda\mu\Delta t)P_n(t)$$

$$+(\mu-\lambda\mu\Delta t)P_{n+1}(t)$$

従って，

$$P_n'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}$$

$$=\boxed{\lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t)} \quad \cdots\cdots(\mathrm{E})$$

（F），（G） 時間が十分経過して $P_n(t)$ が t と無関係となり，$P_n(t)=P_n$ と表わせる状態では $P_n'(t)=0$ （$n=0$，1，2，………）であるから，このとき，

$n=0$ ならば

$$P_0'(t) = \underbrace{\boxed{\mu P_1 - \lambda P_0}}_{\cdots\cdots\cdots(\mathrm{F})} = 0$$

$n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots$ならば

$$P_n'(t) = \underbrace{\boxed{\lambda P_{n-1} - (\lambda+\mu)P_n + \mu P_{n+1}}}_{\cdots\cdots\cdots(\mathrm{G})} = 0$$

（H）（G）＝０より

$$P_{n+1} - P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(P_n - P_{n-1})$$

となる。従って

$$P_n - P_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(P_{n-1} - P_{n-2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}(P_1 - P_0)$$

（F）＝０より，$P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0$ であるから

$$P_n - P_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)P_0$$

さらに

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i - P_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-1}\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)P_0$$

を計算すると

$$P_n - P_0 = \frac{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu}}\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)P_0$$

となり，これを変形して

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

を得る。また，$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1\ (0<\lambda<\mu)$　　　であることより

$$\frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\mu}}\ P_0 = 1$$

であるから，

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

従って

$$P_n = \boxed{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{H})$$

（Ｉ）

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

を求める。いま，$|x| < 1$ において $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ を考える。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$$

であり，両辺を x で微分すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

となる。この式の左辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\frac{1}{1-x}$$

と表せるから

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}$$

ここで，$x=\dfrac{\lambda}{\mu}$ $\left(0<\dfrac{\lambda}{\mu}<1\right)$ を代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=\frac{\dfrac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

従って

$$L=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\dfrac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

$$=\boxed{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I})$$