数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（１）ある工場が 2017 年11月1日午前0 時から稼働し始め、2017 年11月 30 日 24 時までの期間に1台の機械作成の依頼を受けるものとする。いつ依頼を受けるかは一様分布に従うものとする。機械の作成は依頼を受けてから直ちに開始するものとし、依頼から作成完了までは依頼を受けた時点から 72 時間、96 時間、120 時間のいずれかであり、それぞれの確率は$\frac{1}{3}$であるものとする。

また、この工場は休業時間なく稼働し続けるものとする。このとき、2017 年11月 30 日 24 時時点で機械の作成が完了していない確率は$\boxed{}$である。

（Ａ）$\frac{1}{18}$　（Ｂ）$\frac{1}{15}$　（Ｃ）$\frac{7}{90}$　（Ｄ）$\frac{4}{45}$　（Ｅ）$\frac{1}{10}$

（Ｆ）$\frac{1}{9}$　（Ｇ）$\frac{11}{90}$　（Ｈ）$\frac{2}{15}$　（Ｉ）$\frac{13}{90}$　（Ｊ）$\frac{7}{45}$

（２）(X,Y)平面おいて、時間が1進むと上下左右のいずれかに、それぞれ等しい確率で1だけ移動する点Pを考える。時点$t=0$で点Pは原点$(0,0)$にいるとし、$t=2k$（kは自然数）で原点$(0,0)$にいる確率を考える。

$k=2$で点Pが原点$(0,0)$にいる確率は$\boxed{\quad ① \quad}$である。また、点Pが原点$(0,0)$にいる確率が 0.07 未満となるkは$\boxed{\quad ② \quad}$以上である。なお、計算にあたっては次の等式を用いてよい。

$$\sum_{x=0}^{y}\binom{y}{x}^2=\binom{2y}{y}$$

[①の選択肢]

（Ａ）$\frac{1}{32}$　（Ｂ）$\frac{3}{64}$　（Ｃ）$\frac{1}{16}$　（Ｄ）$\frac{5}{64}$　（Ｅ）$\frac{3}{32}$

（Ｆ）$\frac{7}{64}$　（Ｇ）$\frac{1}{8}$　（Ｈ）$\frac{9}{64}$　（Ｉ）$\frac{5}{32}$　（Ｊ）$\frac{11}{64}$

［②の選択肢］

（A）2　（B）3　（C）4　（D）5　（E）6

（F）7　（G）8　（H）9　（I）10　（J）11

（3）座標平面上の3点 $O(0,0), A(a,0), B(0,b), (a>0, b>0)$ を頂点とする直角三角形のつくる領域を D とする。領域 D 内で一様に分布する点 P の x 座標を確率変数 X 、y 座標を確率変数 Y で表すとき、共分散 $C(X,Y)$ は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、相関係数 $R(X,Y)$ は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

［①の選択肢］

（A）$-ab$　（B）$-\dfrac{ab}{2}$　（C）$-\dfrac{ab}{3}$　（D）$-\dfrac{ab}{4}$

（E）$-\dfrac{ab}{9}$　（F）$-\dfrac{ab}{12}$　（G）$-\dfrac{ab}{18}$　（H）$-\dfrac{ab}{36}$

［②の選択肢］

（A）-1　（B）$-\dfrac{1}{2}$　（C）$-\dfrac{1}{3}$　（D）$-\dfrac{1}{4}$

（E）$-\dfrac{1}{9}$　（F）$-\dfrac{1}{12}$　（G）$-\dfrac{1}{18}$　（H）$-\dfrac{1}{36}$

（4）A さんと B さんがサイコロと壷に入った球を用いた次のようなゲームを行う。なお、サイコロは正六面体の各面に1から6までの目がふられているものとし、それぞれの目が出る確率は等しいものとする。また、壷には1,2,3の番号が書かれた球がそれぞれ1つずつ入っており、それぞれの球を取り出す確率は等しいものとする。

・A さんは、1回のゲームで壷から無作為に球を1つ取り出し、その球に書かれた番号の回数だけサイコロを投げ、出た目の合計を得点とする。なお、1回のゲームが終わるたびに、A さんが取り出した球は壷に戻すものとする。

・B さんは、1回のゲームでサイコロを1回投げ、出た目の2倍を得点とする。

中心極限定理を用いた場合、A さんの得点と B さんの得点の差の平均値が0.7点以下となる確率が95%以上となるために最低限必要なゲーム数に最も近い値は$\boxed{}$回である。

（A）193　（B）196　（C）199　（D）202　（E）205

（F）208　（G）211　（H）214　（I）217　（J）220

（5）ある会社の1日の苦情件数を10日間調査したところ、次のとおりであった。

（単位：件）

3，0，0，1，4，0，2，1，0，2

苦情件数はポアソン分布に従うことが分かっているとき、1日あたりの平均苦情件数を近似法により区間推定した場合の信頼区間の幅に最も近い値は$\boxed{\quad ① \quad}$、精密法により区間推定した場合の信頼区間の幅に最も近い値は$\boxed{\quad ② \quad}$となる。なお、信頼係数は95%とする。

（A）1.1323　（B）1.1862　（C）1.2543　（D）1.2979　（E）1.3308

（F）1.3595　（G）1.4134　（H）1.4678　（I）1.5308　（J）1.5637

（６）ある農園のリンゴの重さの平均は$100g$であったが、品種改良により平均が$105g$になったことを15個の標本を用いて検定したい。リンゴの重さは正規分布に従うものとし、その標準偏差は品種改良前後ともに$5g$であるとする。このとき、第1種の誤りの起こる確率を5%とした場合における検出力（第２種の誤りが起こらない確率）に最も近いものは$\boxed{\quad\quad}$である。

（Ａ）92.63%　（Ｂ）93.39%　（Ｃ）94.15%　（Ｄ）94.91%　（Ｅ）95.67%

（Ｆ）96.43%　（Ｇ）97.19%　（Ｈ）97.95%　（Ｉ）98.71%　（Ｊ）99.47%

（７）ある製品についてA成分の含有率は90%以上であることが必要とされている。そこで、納入された各製品について定量分析を行い、A成分の含有率が90%以上の製品は確率97%で合格となり、含有率87%以下の製品は99%以上の確率で不合格となるようにしたい。A成分の含有率の分析値には平均０、分散$\sigma^2 = (2.0\%)^2$の正規分布に従う誤差があることがわかっているとき、分析の回数を最も少なくするためには、１つの製品について$\boxed{\quad ① \quad}$回分析し、得られた分析値の平均が$\boxed{\quad ② \quad}$以下であればその製品を不合格とすれば良い。

［①の選択肢］

（Ａ）3　（Ｂ）4　（Ｃ）5　（Ｄ）6　（Ｅ）7

（Ｆ）8　（Ｇ）9　（Ｈ）10　（Ｉ）11　（Ｊ）12

［②の選択肢］

（Ａ）87.83%　（Ｂ）88.12%　（Ｃ）88.32%　（Ｄ）88.46%　（Ｅ）88.58%

（Ｆ）88.67%　（Ｇ）88.75%　（Ｈ）88.81%　（Ｉ）88.87%　（Ｊ）88.91%

（８）ある自治体において、年齢を18歳～39歳、40歳～64歳、65歳以上に分けて、A政党の支持率を調べたところ下表のとおりであった。比例抽出法によりA政党の支持率を推定した場合、その推定値に最も近い値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、推定値の標準誤差に最も近い値は $\boxed{\quad ② \quad}$ となる。

年齢	人口 （万人）	標本の大きさ （人）	A政党の 支持率
18歳～39歳	350	700	50%
40歳～64歳	450	900	40%
65歳以上	300	600	35%

[①の選択肢]

（A） 41.67%　（B） 41.82%　（C） 41.97%　（D） 42.12%

（E） 42.27%　（F） 42.42%　（G） 42.58%　（H） 42.73%

[②の選択肢]

（A） 0.692%　（B） 0.816%　（C） 0.925%　（D） 1.044%

（E） 1.144%　（F） 1.254%　（G） 1.379%　（H） 1.501%

（９） (x, y) のデータが下表のとおり与えられている。このデータからプロビット・モデル $y = F(\alpha + \beta x)$ （F は標準正規分布の分布関数）を用いた回帰式を求めると、α の推定値に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、β の推定値に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

x	1.4	1.8	2.9	4.3	5.3
y	10%	24%	52%	91%	92%

（A） −4.25　（B） −2.07　（C） −1.40　（D） −0.71　（E） −0.54

（F） 0.22　（G） 0.71　（H） 1.40　（I） 2.07　（J） 4.25

（１０）ある学校について、以下のことが分かっている。

- この学校は３学年制であり、t 年４月初の在校生は1年生、２年生、３年生それぞれ100人、卒業生は０人である。
- ３月末に1年生だった人は、同年４月初に95%の確率で２年生になり、5%の確率で1年生のままである。
- ３月末に２年生だった人は、同年４月初に90%の確率で３年生になり、10%の確率で２年生のままである。
- ３月末に３年生だった人は、同年４月初に85%の確率で卒業し、15%の確率で３年生のままである。
- 卒業生は、卒業生のままである。
- 毎年４月初に新入生が100人入学する（1年生が100人増える）
- 上記以外に学生の異動はない。

このとき、$t+3$年４月初に新入生が入学した直後の各学年の人数に最も近い数値はそれぞれ、1年生：$\boxed{\quad ① \quad}$人、２年生：$\boxed{\quad ② \quad}$人、３年生：$\boxed{\quad ③ \quad}$人である。なお、計算過程においては、小数点以下は四捨五入しないこととする。

［①の選択肢］

（A）105　（B）106　（C）107　（D）108

（E）109　（F）110　（G）111　（H）112

［②の選択肢］

（A）109　（B）110　（C）111　（D）112

（E）113　（F）114　（G）115　（H）116

［③の選択肢］

（A）113　（B）114　（C）115　（D）116

（E）117　（F）118　（G）119　（H）120

（１１） $AR(1)$ モデル $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ に従っていると考えられる $\{y_t\}_{t=1}^{6}$ が下表のとおり与えられている。このとき、最小二乗法によりパラメータ ϕ_0, ϕ_1 を推定する場合、推定値 $\hat{\phi}_0$ に最も近い数値は ① であり、推定値 $\hat{\phi}_1$ に最も近い数値は ② である。また、標本自己相関からパラメータ ϕ_0, ϕ_1 を推定する場合、推定値 $\hat{\phi}_0$ に最も近い数値は ③ であり、推定値 $\hat{\phi}_1$ に最も近い数値は ④ である。

t	1	2	3	4	5	6
y_t	2	2	2	3	3	3

[①、③の選択肢]

（A） 0.90　（B） 0.95　（C） 1.00　（D） 1.05

（E） 1.10　（F） 1.15　（G） 1.20　（H） 1.25

[②、④の選択肢]

（A） 0.50　（B） 0.53　（C） 0.56　（D） 0.60

（E） 0.64　（F） 0.67　（G） 0.70　（H） 0.72

（１２）ある遊園地の毎月の来場者数は独立で、各月の大人と子どもの来場者数は互いに独立な以下の正規分布に従っているとする。

大人　：平均80万人、標準偏差8万人

子ども：平均40万人、標準偏差5万人

累積密度関数の逆関数を用いる方法で、2か月間の来場者数のシミュレーションを行う。

今、[0,1]区間の一様分布に従う確率変数の実現値として、次の値を得た。

0.872　,　0.127　,　0.224　,　0.574

なお、1～2つ目の実現値は大人の各月の来場者数、3～4つ目の実現値は子どもの各月の来場者数のシミュレーションに用いるものとする。

大人の入場料が5,000円、子どもの入場料が3,000円であるとき、シミュレーション結果として2か月間の大人の総入場料に最も近い値は［　①　］万円であり、2か月間の子どもの総入場料に最も近い値は［　②　］万円である。

[①の選択肢]

（A） 708,744	（B） 739,296	（C） 777,112	（D） 799,808
（E） 825,643	（F） 839,960	（G） 854,357	（H） 890,872

[②の選択肢]

（A） 205,779	（B） 217,236	（C） 231,417	（D） 239,928
（E） 250,415	（F） 251,970	（G） 259,585	（H） 274,077

問題２． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（１）確率変数 X,Y が２変量正規分布 $N(\mu_1,\mu_2,{\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\rho)$ に従うとき、X の Y に対する回帰関数 $E(X\,|\,Y=y)$ を求めたい。

まず、Y の確率密度関数を求める。

X,Y の結合確率密度関数は $h(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{Q(x,y)}{2}}$ である。

ただし、

$$Q(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\{\boxed{①}\}^2+\boxed{②}$$

と変形できるから、Y の確率密度関数は

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\times\boxed{②}\right)\times\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{\boxed{①}\}^2\right)dx}$$

である。

ここで、この下線部の積分の値は $\boxed{③}$ に等しいことがわかるので、Y は正規分布 $N\left(\boxed{④},\ \boxed{⑤}\right)$ に従うことがわかる。

次に、X,Y の結合確率密度関数は $h(x,y)$、Y の確率密度関数は $g(y)$ であるから、条件 $Y=y$ のもとでの X の確率密度関数は

$$f(x\,|\,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{\boxed{⑥}\}^2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\times\boxed{⑦}}\{x-(\boxed{⑧})\}^2\right)$$

と変形される。

よって、$f(x\,|\,y)$ は x の関数とみたとき、正規分布 $N\left(\boxed{⑧},\ \boxed{⑦}\right)$ の確率密度関数とみなせるから、求める回帰関数は

$$E(X\,|\,Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x\,|\,y)dx=\boxed{⑨}$$

となることがわかる。

（２）確率変数 X, Y が２変量正規分布 $N(\mu_1, \mu_2, {\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \rho)$ に従うとき、確率変数

$$Z = \frac{4}{1-\rho^2}\left\{\frac{(X-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\rho\frac{(X-\mu_1)(Y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(Y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}$$
の分布を求めたい。

確率変数 Z の積率母関数は

$$\phi(\theta) = E\left(e^{\theta Z}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\times \exp\left(-\frac{\boxed{⑩}}{\boxed{⑪}}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}\right)dxdy$$

である。

ここで、θ の値が 0 の近傍にあるとき、$u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\times\boxed{⑫}$ $, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\times\boxed{⑫}$ なる

変数変換をすれば、

$$\phi(\theta) = \boxed{⑬} \times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right)dudv$$

と変形される。

ここで、この積分の値は $\boxed{⑭}$ に等しいことがわかるので、$\phi(\theta) = \boxed{⑮}$ となる。

よって、確率変数 Z は平均 $\boxed{⑯}$ の指数分布に従うことがわかる。

（３）２変量正規分布 $N(0,0,1,1,\rho)$ に従う確率ベクトル (X,Y) の積率母関数を計算し、これを用いて相関係数 $R(X,Y)$ を求めたい。

確率ベクトル (X,Y) の積率母関数は

$$\psi(\theta_1,\theta_2) = E\left(e^{\theta_1 X + \theta_2 Y}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{Q_0(x,y)}{2}}dxdy$$

である。ただし、$Q_0(x,y) = A(x,y) + B(y) + C$ とすると、

$$A(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left\{x - \rho y - (1-\rho^2)\theta_1\right\}^2, B(y) = (y - \theta_2 - \rho\theta_1)^2, C = \boxed{⑰}$$
となる。

ゆえに、$\psi(\theta_1,\theta_2) = e^{-\frac{C}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{B(y)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{A(x,y)}{2}}dx\right\}dy$ と変形される。

ここで、$e^{-\frac{A(x,y)}{2}}$ を x の関数として考えると、

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{A(x,y)}{2}} dx = \boxed{⑱}$

となることがわかる。

同様にして、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{B(y)}{2}} dy = \boxed{⑲}$ となることがわかる。

よって、$\psi(\theta_1, \theta_2) = \boxed{⑳}$ を得る。

これより、X の積率母関数は $\boxed{㉑}$ となることがわかり、X の期待値、分散は

$E(X) = \boxed{㉒}, V(X) = \boxed{㉓}$ となる。

同様にして、Y の期待値、分散は $E(Y) = \boxed{㉒}, V(Y) = \boxed{㉓}$ となる。

ここで、$\dfrac{\partial^2}{\partial\theta_1 \partial\theta_2} \psi(\theta_1, \theta_2) = \boxed{⑳} \times \left\{ \boxed{㉔} \right\}$ より、$E(XY) = \boxed{㉕}$ となることがわかる。

ゆえに、求める相関係数は、$R(X, Y) = \boxed{㉖}$ である。

［①、②、④～⑨の選択肢］

（A） μ_1

（B） μ_2

（C） σ_1

（D） σ_2

（E） ${\sigma_1}^2$

（F） ${\sigma_2}^2$

（G） $\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$

（H） $\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$

（I） $\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$

（J） $\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$

（K） ${\sigma_1}^2(1-\rho^2)$

（L） ${\sigma_2}^2(1-\rho^2)$

（M） $\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

（N） $\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

（O） $\dfrac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}$

（P） $\dfrac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}$

（Q） $\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

（R） $\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

（S） $\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_2)$

（T） $\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$

（U） $\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$

（V） $\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(x-\mu_1)$

（W） $\mu_1+\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_2)$

（X） $\mu_1+\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$

（Y） $\mu_2+\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$

（Z） $\mu_2+\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(x-\mu_1)$

［③、⑪、⑭、⑯、⑱、⑲、㉒、㉓、㉕、㉖の選択肢］

（A）0　（B）$\dfrac{1}{8}$　（C）$\dfrac{1}{4}$　（D）$\dfrac{1}{2}$

（E）1　（F）2　（G）4　（H）8

（I）$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　（J）$\sqrt{\pi}$　（K）$\sqrt{2\pi}$　（L）π

（M）$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$　（N）$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$　（O）ρ　（P）$1-\rho$

（Q）ρ^2　（R）$1-\rho^2$　（S）$2(1-\rho^2)$　（T）$2\pi(1-\rho^2)$

（U）$\sqrt{1-\rho^2}$　（V）$2\sqrt{1-\rho^2}$　（W）$\dfrac{\pi\sqrt{1-\rho^2}}{2}$　（X）$\pi\sqrt{1-\rho^2}$

（Y）$\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}$　（Z）$2\pi\sqrt{1-\rho^2}$

［⑩、⑫、⑬、⑮の選択肢］

（A）2θ　（B）$1-2\theta$　（C）$\dfrac{1}{2}\theta$　（D）$1-\dfrac{1}{2}\theta$

（E）4θ　（F）$1-4\theta$　（G）$\dfrac{1}{4}\theta$　（H）$1-\dfrac{1}{4}\theta$

（I）8θ　（J）$1-8\theta$　（K）$\dfrac{1}{8}\theta$　（L）$1-\dfrac{1}{8}\theta$

（M）$(1-2\theta)^{-1}$　（N）$\left(1-\dfrac{1}{2}\theta\right)^{-1}$　（O）$(1-4\theta)^{-1}$　（P）$\left(1-\dfrac{1}{4}\theta\right)^{-1}$

（Q）$(1-8\theta)^{-1}$　（R）$\left(1-\dfrac{1}{8}\theta\right)^{-1}$　（S）$\sqrt{1-2\theta}$　（T）$\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\theta}$

（U）$\sqrt{1-4\theta}$　（V）$\sqrt{1-\dfrac{1}{4}\theta}$　（W）$\sqrt{1-8\theta}$　（X）$\sqrt{1-\dfrac{1}{8}\theta}$

［⑰、⑳、㉑、㉔の選択肢］

（A） θ_1

（B） θ_2

（C） $\frac{1}{2}\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)$

（D） $\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2$

（E） $-\frac{1}{2}\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)$

（F） $-\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)$

（G） $\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)^2$

（H） $\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)^2$

（I） $\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)$

（J） $\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)+\rho$

（K） $\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)+\left(1-\rho\right)$

（L） $e^{\frac{\theta_1{}^2}{2}}$

（M） $e^{\frac{\theta_1{}^2}{2}\rho^2}$

（N） $e^{\frac{\theta_1{}^2}{2}\left(1-\rho^2\right)}$

（O） $e^{-\frac{\theta_1{}^2}{2}}$

（P） $e^{-\frac{\theta_1{}^2}{2}\rho^2}$

（Q） $e^{-\frac{\theta_1{}^2}{2}\left(1-\rho^2\right)}$

（R） $e^{\frac{1}{2}\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)}$

（S） $e^{\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2}$

（T） $e^{-\frac{1}{2}\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)}$

（U） $e^{-\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)}$

（V） $e^{\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)^2}$

（W） $e^{\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)^2}$

（X） $e^{\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)}$

（Y） $e^{\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)+\rho}$

（Z） $e^{\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)+\left(1-\rho\right)}$

問題３． 正規母集団 $A:N(\mu_A,\sigma_A^2), B:N(\mu_B,\sigma_B^2)$ があり、A から大きさ n_A $(n_A \geq 2)$ の標本 $x_1, x_2, \Lambda\ , x_{n_A}$ を、B から大きさ n_B $(n_B \geq 2)$ の標本 $y_1, y_2, \Lambda\ , y_{n_B}$ をすべて互いに独立に抽出する。このとき、次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。また、各記号の定義は以下のとおりである。

（２０点）

記号の定義

$$\bar{x} = \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n_B}\sum_{j=1}^{n_B} y_j, \quad s_x^2 = \frac{1}{n_A - 1}\sum_{i=1}^{n_A}(x_i - \bar{x})^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n_B - 1}\sum_{j=1}^{n_B}(y_j - \bar{y})^2$$

（１）母平均および母分散の推定

Ⅰ）μ_A と μ_B がいずれも未知で、σ_A^2 と σ_B^2 はいずれも既知であるが等分散でない場合を考える。大きさ n_A, n_B の標本による結合確率密度関数は、

$$(2\pi\sigma_A^2)^{-\frac{\boxed{①}}{2}} \times (2\pi\sigma_B^2)^{-\frac{\boxed{②}}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_A^2} \times \sum_{i=1}^{n_A}(x_i - \boxed{③})^2 - \frac{1}{2\sigma_B^2} \times \sum_{j=1}^{n_B}(y_j - \boxed{④})^2\right\}$$

となる。この結合確率密度関数の尤度関数を $L(\mu_A, \mu_B)$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial\mu_A}\log L(\mu_A, \mu_B) = \frac{n_A}{\sigma_A^2}\{\boxed{⑤}\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_B}\log L(\mu_A, \mu_B) = \frac{n_B}{\sigma_B^2}\{\boxed{⑥}\} = 0$$

より、母平均の最尤推定量を求めることができる。

Ⅱ）μ_A と μ_B がいずれも未知で、σ_A^2 と σ_B^2 も未知であるが $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ であることが分かっている場合を考える。$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ として、結合確率密度関数の尤度関数を $L(\mu_A, \mu_B, \sigma^2)$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial\mu_A}\log L(\mu_A, \mu_B, \sigma^2) = \frac{n_A}{\sigma^2}\{\boxed{⑤}\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_B}\log L(\mu_A, \mu_B, \sigma^2) = \frac{n_B}{\sigma^2}\{\boxed{⑥}\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\log L(\mu_A, \mu_B, \sigma^2) =$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\boxed{⑦} - \frac{1}{\boxed{⑧}}\left\{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i - \boxed{③})^2 + \sum_{j=1}^{n_B}(y_j - \boxed{④})^2\right\}\right] = 0$$

より、σ^2 の最尤推定量 $\hat{\sigma}_L^2$ は

$$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{1}{\boxed{⑦}}\left\{\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \boxed{⑨}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \boxed{⑩}\right)^2\right\}$$

となる。このとき、$E\left(\hat{\sigma}_L^2\right) = \dfrac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑫}} \times \sigma^2$ のため、不偏推定量 $\hat{\sigma}_U^2$ は $\hat{\sigma}_U^2 = \dfrac{\boxed{⑫}}{\boxed{⑪}} \times \hat{\sigma}_L^2$ と表わすことができる。さらに、不偏推定量 $\hat{\sigma}_U^2$ の分散は $V\left(\hat{\sigma}_U^2\right) = \dfrac{\boxed{⑬}}{\boxed{⑪}}$ となる。また、検定統計量

$$t_1 = \frac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩} - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\hat{\sigma}_U\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}$$

は自由度 $\boxed{⑭}$ の t 分布に従うことが分かる。

（２）標本平均の差の検定

母分散 σ_A^2, σ_B^2 が未知であり、等しいと限らない場合はどのように工夫しても σ_A^2 および σ_B^2 によらない検定統計量を作ることはできない。しかし近似的に t 分布に従う検定統計量を作るウェルチの近似法が知られている。

$$u = \frac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩} - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\sqrt{\boxed{⑮}}}$$

は標準正規分布に従う。ここで検定統計量

$$t_2 = \frac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩} - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n_A} + \dfrac{s_y^2}{n_B}}} = \frac{\dfrac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩} - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\sqrt{\boxed{⑮}}}}{\sqrt{\dfrac{\boxed{⑯}}{\boxed{⑮}} \times \dfrac{\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sigma_A^2} + \dfrac{\boxed{⑰}}{\boxed{⑮}} \times \dfrac{\sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \bar{y}\right)^2}{\sigma_B^2}}}$$

を考える。このとき

$$w = \frac{\boxed{⑯}}{\boxed{⑮}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sigma_A^2} + \frac{\boxed{⑰}}{\boxed{⑮}} \times \frac{\sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \bar{y}\right)^2}{\sigma_B^2}$$

とおくと、w は u と独立で、w の母集団の分布から計算した期待値 $E_1(w)$ および分散 $V_1(w)$ は

$$E_1(w) = \boxed{⑱}、V_1(w) = \frac{\boxed{⑲}}{\left(\boxed{⑮}\right)^2}$$ となる。

次に w の分布をガンマ分布 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}f, 2g\right)$ で近似することを考える。$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}f, 2g\right)$ の確率密度関数を

$h(w)$ とすると、$h(w)=\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}f\right)(2g)^{\frac{1}{2}f}}w^{\frac{1}{2}f-1}e^{-\frac{w}{2g}}$ $,w>0$ $(f>0,g>0)$ である。w のガンマ分布から計算した期待値 $E_2(w)$ および分散 $V_2(w)$ は $E_2(w)=$ $\boxed{⑳}$、$V_2(w)=$ $\boxed{㉑}$ となる。

$E_1(w)=E_2(w)$ かつ $V_1(w)=V_2(w)$ となるような f を求めると、$f=\dfrac{\left(\boxed{⑮}\right)^2}{\boxed{㉒}}$ となる。実際、このようにして求めた f および g に対応するガンマ分布 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}f,2g\right)$ は w の分布をよく近似していることが知られている。w が $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}f,2g\right)$ に従うとき $\dfrac{w}{g}$ は $\Gamma\left(\boxed{㉓},\boxed{㉔}\right)$、すなわち、自由度 f の χ^2 分布に従う。よって検定統計量 $t_2=u\div\sqrt{\dfrac{w}{fg}}$ は近似的に自由度 f の t 分布に従う。なお、自由度 f において、σ_A^2 および σ_B^2 は未知であるため、実務上はこれを不偏分散 s_x^2 および s_y^2 で置き換えたものを自由度として用いる。

［①、②、⑦、⑪、⑫、⑭の選択肢］

（A）1	（B）2	（C）n_A-2	（D）n_A-1
（E）n_A	（F）n_A+1	（G）n_A+2	（H）n_B-2
（I）n_B-1	（J）n_B	（K）n_B+1	（L）n_B+2
（M）n_A+n_B-2	（N）n_A+n_B-1	（O）n_A+n_B	（P）n_A+n_B+1
（Q）n_A+n_B+2	（R）$(n_A-1)(n_B-1)$	（S）$(n_A-1)n_B$	（T）$n_A(n_B-1)$
（U）n_An_B	（V）$(n_A+1)n_B$	（W）$n_A(n_B+1)$	（X）$(n_A+1)(n_B+1)$

［③～⑥、⑨、⑩の選択肢］

（A）1	（B）2	（C）μ_A	（D）μ_B
（E）$\bar{x}-\mu_A$	（F）$\bar{x}-\mu_B$	（G）$\bar{x}$	（H）$\bar{x}+\mu_A$
（I）$\bar{x}+\mu_B$	（J）$n_A\bar{x}-\mu_A$	（K）$n_A\bar{x}-\mu_B$	（L）$n_A\bar{x}$
（M）$n_A\bar{x}+\mu_A$	（N）$n_A\bar{x}+\mu_B$	（O）$\bar{y}-\mu_A$	（P）$\bar{y}-\mu_B$
（Q）$\bar{y}$	（R）$\bar{y}+\mu_A$	（S）$\bar{y}+\mu_B$	（T）$n_B\bar{y}-\mu_A$
（U）$n_B\bar{y}-\mu_B$	（V）$n_B\bar{y}$	（W）$n_B\bar{y}+\mu_A$	（X）$n_B\bar{y}+\mu_B$

［⑧、⑬の選択肢］

（A） σ　（B） 2σ　（C） 3σ　（D） 4σ

（E） σ^2　（F） $2\sigma^2$　（G） $3\sigma^2$　（H） $4\sigma^2$

（I） σ^3　（J） $2\sigma^3$　（K） $3\sigma^3$　（L） $4\sigma^3$

（M） σ^4　（N） $2\sigma^4$　（O） $3\sigma^4$　（P） $4\sigma^4$

［⑮～⑲、㉒の選択肢］

（A） 0　（B） $\dfrac{1}{2}$　（C） 1

（D） 2　（E） $\dfrac{\sigma_A^2}{n_A^2}$　（F） $\dfrac{\sigma_A^2}{n_A(n_A-1)}$

（G） $\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}$　（H） $\dfrac{\sigma_A^2}{n_A-1}$　（I） $\dfrac{\sigma_B^2}{n_B^2}$

（J） $\dfrac{\sigma_B^2}{n_B(n_B-1)}$　（K） $\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}$　（L） $\dfrac{\sigma_B^2}{n_B-1}$

（M） $\dfrac{\sigma_A^2}{n_A^2}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B^2}$　（N） $\dfrac{\sigma_A^2}{n_A(n_A-1)}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B(n_B-1)}$　（O） $\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}$

（P） $\dfrac{\sigma_A^2}{n_A-1}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B-1}$　（Q） $\dfrac{\sigma_A^4}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B}$　（R） $\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B}$

（S） $\dfrac{\sigma_A^4}{n_A-1}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B-1}$　（T） $\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A-1}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B-1}$　（U） $\dfrac{\sigma_A^4}{n_A^2}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B^2}$

（V） $\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A^2}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B^2}$　（W） $\dfrac{\sigma_A^4}{n_A^2(n_A-1)}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B^2(n_B-1)}$　（X） $\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A^2(n_A-1)}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B^2(n_B-1)}$

（Y） $\dfrac{\sigma_A^4}{n_A(n_A-1)^2}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B(n_B-1)^2}$　（Z） $\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A(n_A-1)^2}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B(n_B-1)^2}$

［⑳、㉑、㉓、㉔の選択肢］

（A） $\dfrac{1}{2}$	（B） 1	（C） 2	（D） $\dfrac{1}{2}f$
（E） f	（F） $2f$	（G） $\dfrac{1}{2}g$	（H） g
（I） $2g$	（J） $\dfrac{1}{2}fg$	（K） fg	（L） $2fg$
（M） $\dfrac{1}{2}fg^2$	（N） fg^2	（O） $2fg^2$	（P） $\dfrac{1}{2}f^2g$
（Q） f^2g	（R） $2f^2g$		