損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次のⅠ～Ⅶの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　各７点　（計４９点）

Ⅰ．ある保険商品のクレーム総額 S はガンマ分布の分布関数 $G(x:\alpha,\beta)=\int_0^x \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt$ $(0\le x<\infty, 0<\alpha<\infty, 0<\beta<\infty)$ を用いて、$H(x:\alpha,\beta,x_0)=G(x-x_0:\alpha,\beta)$ で近似できることが分かっている。このとき、次の（１）～（３）の各問に答えなさい。クレーム総額 S の平均、標準偏差、歪度は上記近似を行っても変化しないこととする。なお、歪度は、確率変数 X の k 次のキュムラント χ_k を用いて、歪度 $=\dfrac{\chi_3}{\sigma^3}$ にて定義される。

（１）この保険商品のクレーム総額 S の標準偏差 σ を用いて、歪度は $\dfrac{\boxed{\text{①}}}{\sigma^3\times\boxed{\text{②}}}$ で表される。
①、②に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

（A）α	（B）2α	（C）3α	（D）4α	（E）α^2
（F）α^3	（G）α^4	（H）β	（I）2β	（J）3β
（K）4β	（L）β^2	（M）β^3	（N）β^4	（O）いずれにも該当しない

（２）この保険商品のクレーム総額 S について、平均 10、標準偏差 $\sqrt{2}$、歪度 $\sqrt{2}$ であることが分かっている。このとき、x_0 の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1	（B）2	（C）3	（D）4	（E）5
（F）6	（G）7	（H）8	（I）9	（J）10

（３）保険会社は、クレーム総額の期待値の 30%に当たるファンドを期首のサープラスとして保有し、保険料収入はクレーム総額の期待値に 10%の安全割増を付加したものとした。初年度の期末のサープラスが負になる確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、期中のクレームはすべて期末に支払うものとし、必要があれば $e=2.718$ を使用すること。

（A）1.1%	（B）1.3%	（C）1.5%	（D）1.7%	（E）1.9%
（F）2.1%	（G）2.3%	（H）2.5%	（I）2.7%	（J）2.9%

Ⅱ．ある定額払保険商品の発売にあたり、次のとおり保険料収入と保険金支払について計画を作成し、それに基づく各年度の損害率の検討を行う。

発売開始日：　平成Ｘ年 4 月 1 日（保険始期は毎月 1 日のみとする。）

保険期間：　1 年間のみ

保険料：　払込方法は一時払のみで、保険始期と同日に収入するものとする。
各月の営業保険料収入は平成Ｘ年度は毎月 3,500 万円、平成Ｘ+1 年度は毎月 4,000 万円とする。

保険金：　予定損害率は 60%とし、事故は保険期間中均一に発生すると仮定する。
事故発生から保険金支払までの期間は 2 か月とする。

このとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。なお、各月の日数は同一と仮定する。

（1）平成Ｘ年度のアーンドベーシス損害率は $\boxed{a}\boxed{b}$ %である。a、b のそれぞれに当てはまる 1 桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、既経過保険料については保険始期を毎月月初とする 12 分の 1 法で算出し、既発生保険金については事故発生と同時に保険金の発生を認識するものとして算出すること。また、計算の途中において端数処理は行わず、計算結果はパーセント表示における小数点以下第 1 位を四捨五入した整数で求めることとし、計算結果が 10%未満となった場合は a の欄に 0 をマークしなさい。

（2）平成Ｘ年度のリトンベーシス損害率は $\boxed{c}\boxed{d}$ %である。c、d のそれぞれに当てはまる 1 桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、計算の途中において端数処理は行わず、計算結果はパーセント表示における小数点以下第 1 位を四捨五入した整数で求めることとし、計算結果が 10%未満となった場合は c の欄に 0 をマークしなさい。

（3）平成Ｘ+1 年度のリトンベーシス損害率は $\boxed{e}\boxed{f}$ %である。e、f のそれぞれに当てはまる 1 桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、計算の途中において端数処理は行わず、計算結果はパーセント表示における小数点以下第 1 位を四捨五入した整数で求めることとし、計算結果が 10%未満となった場合は e の欄に 0 をマークしなさい。

Ⅲ．ある保険会社では２種類の保険種目を販売しており、各保険種目の契約ポートフォリオから生じる年間のクレーム総額をそれぞれS_1, S_2とする。S_1, S_2は互いに独立で、それぞれ次表のようなパラメータをもつ複合ポアソン分布に従っているとする。

クレーム総額	平均事故件数	個々のクレーム額分布
S_1	4	平均 2 の指数分布
S_2	6	平均 1 の指数分布

今、２種目の契約ポートフォリオを１つのポートフォリオ（集合的リスクモデル）とみなし、そのクレーム総額を$S = S_1 + S_2$、事故件数をN、個々のクレーム額を$X_i\left(i = 1,2,\cdots,N\right)$とする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）クレーム総額Sの期待値$E(S)$は$\boxed{\quad ① \quad}$、分散$V(S)$は$\boxed{\quad ② \quad}$である。

①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）6　（B）8　（C）10　（D）12　（E）14
（F）16　（G）18　（H）20　（I）22　（J）24

②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）16　（B）20　（C）24　（D）28　（E）32
（F）36　（G）40　（H）44　（I）48　（J）52

（2）商品改定により、個々のクレーム額X_iが一律 2 倍となる場合を想定する。このとき、クレーム額増額後のクレーム総額S'が期待値$E(S')$、分散$V(S')$の正規分布に従うものと仮定し、正規分布近似によりクレーム総額S'の 97.5 パーセンタイル値（$P_r\left(S' \leq a\right) = 0.975$を満たす値$a$）を求めた場合、$a$に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。
なお、必要があればZを標準正規分布に従う確率変数とするとき、$P_r\left(Z \leq 1.96\right) = 0.975$であることを使用すること。

（A）26　（B）30　（C）34　（D）38　（E）42
（F）46　（G）50　（H）54　（I）58　（J）62

Ⅳ．ある保険会社の火災保険の料率は、地域（都市か郊外か）および構造（耐火か非耐火か）の二つの危険標識で複合的に区分されている。この火災保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。この複合リスクについて、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

＜エクスポージャ＞

	耐火	非耐火
都市	560	440
郊外	200	300

＜クレーム総額＞

	耐火	非耐火
都市	560	1,540
郊外	300	1,350

（１）地域「都市」、構造「非耐火」に対応する相対クレームコスト指数の実績値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）1.28　（Ｂ）1.30　（Ｃ）1.32　（Ｄ）1.34　（Ｅ）1.36
（Ｆ）1.38　（Ｇ）1.40　（Ｈ）1.42　（Ｉ）1.44　（Ｊ）1.46

（２）地域・構造別の相対クレームコスト指数 $Y_i\,(i=1,2,3,4)$ について、Y_i の従う指数型分布族を正規分布 $f(y_i;\mu_i,\omega_i,\phi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\phi/\omega_i}}\exp\left(-\dfrac{(y_i-\mu_i)^2}{2\phi/\omega_i}\right)$（ここで、$\mu_i=E(Y_i)$、$\omega_i$ はエクスポージャ）、リンク関数を $g(x)=x$ とする一般化線形モデルを用いて計算したとき、地域「都市」、構造「非耐火」に対応する相対クレームコスト指数の推定値（料率係数の値）に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、一般化線形モデルのパラメータは最尤法で推定するものとする。

（Ａ）1.28　（Ｂ）1.30　（Ｃ）1.32　（Ｄ）1.34　（Ｅ）1.36
（Ｆ）1.38　（Ｇ）1.40　（Ｈ）1.42　（Ｉ）1.44　（Ｊ）1.46

余白ページ

Ｖ．以下のような累計支払保険金実績データのある保険種目に関して、2014 年度末の支払備金（＝「最終累計発生保険金の合計」－「2014 年度末の累計支払保険金の合計」）の評価を行うことを考える。なお、この保険種目は第 4 経過年度で保険金の支払を完了する（支払備金が残らない）ものとし、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の事故年度別のロスディベロップメントファクターを事故年度に対応する i （下表参照）にて加重平均した値を用いるものとする。

また、計算の途中において、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用い、保険金・支払備金については小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用いるものとする。なお、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜事故年度別　累計支払保険金の推移＞

事故年度		経過年度			
	i	1	2	3	4
2011 年度	1	1,620	2,980	3,300	3,440
2012 年度	2	1,760	3,190	3,460	
2013 年度	3	2,210	3,750		
2014 年度	4	2,880			

このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）チェイン・ラダー法を用いて評価を行う場合、2014 年度末の支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）3,200　（B）3,250　（C）3,300　（D）3,350　（E）3,400
（F）3,450　（G）3,500　（H）3,550　（I）3,600　（J）3,650

（2）実績データの十分性に疑義があるため、さらにボーンヒュッター・ファーガソン法を用いて評価を行うこととした。

下表の契約年度ごとの営業保険料および予定損害率から事故年度ごとの最終累計発生保険金の当初予測値を算出するものとすると、ボーンヒュッター・ファーガソン法による 2014 年度末の支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、最終発生保険金の当初予測値算出に用いる事故年度別の既経過保険料は 2 分の 1 法により算出するものとする。

契約年度	営業保険料	予定損害率
2010 年度	7,800	50%
2011 年度	8,200	50%
2012 年度	9,400	60%
2013 年度	10,500	60%
2014 年度	12,000	60%

（A）4,200　（B）4,250　（C）4,300　（D）4,350　（E）4,400
（F）4,450　（G）4,500　（H）4,550　（I）4,600　（J）4,650

Ⅵ. ある積特型積立保険の積立部分に関する条件が下表のとおりであるとする。この積立保険について、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、計算の途中において、現価率および期始払年金現価率は、小数点以下第 5 位を四捨五入して小数点以下第 4 位までの数値を用いることとする。

＜条件＞

項目	条件	備考
保険期間	5 年	
払込方法	年払（期始払）	
満期返れい金	200 万円	保険期間満了時に支払
中途返れい金	50 万円	第 3 保険年度末に保険契約が有効な場合に支払
予定利率	2%	
予定契約消滅率	2%	
維持費率	3%	年払積立保険料に対する割合
代理店手数料率	3%	年払積立保険料に対する割合

（1）積立型基本特約保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）471,000 円　（B）473,000 円　（C）475,000 円　（D）477,000 円　（E）479,000 円
（F）481,000 円　（G）483,000 円　（H）485,000 円　（I）487,000 円　（J）489,000 円

（2）第 4 保険年度末の払戻積立金の金額の積立型基本特約保険料に対する割合に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）2.50　（B）2.60　（C）2.70　（D）2.80　（E）2.90
（F）3.00　（G）3.10　（H）3.20　（I）3.30　（J）3.40

Ⅶ. 下記の Lundberg モデルについて、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、このモデルでは「時刻 t のサープラス U_t が $U_t < 0$ となる状態」を破産と呼ぶ。なお、必要があれば $e = 2.718$ を使用すること。

・クレーム件数過程のパラメータ　：$\lambda = 0.5$
・個々のクレーム額の平均　：$\mu = 10$ （個々のクレーム額は指数分布に従う。）
・安全割増率　：$\theta = 0.2$

（1）期首サープラス $u = 0$ のとき、破産確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。
（ヒント：期首サープラス $u = 0$ の Lundberg モデルにおいて、破産が発生し、かつ破産直後のサープラスが $-y\ (y > 0)$ 以上である確率 $G(0, y)$ は、$G(0, y) = \dfrac{\lambda}{c}\int_0^y \{1 - F(x)\}dx$ と表される。ここで、λ はクレーム件数過程のパラメータ、c は単位時間当たりの収入保険料、$F(x)$ は個々のクレーム額 X_i の分布関数である。）

（A）81%	（B）83%	（C）85%	（D）87%	（E）89%
（F）91%	（G）93%	（H）95%	（I）97%	（J）99%

（2）期首サープラス $u = 60$ のとき、サープラスが初めて 60 未満となったという条件の下で、そのサープラスが期首時点の半分未満となる（期首時点からの損失額が 30 を超える）条件付確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）5%	（B）10%	（C）15%	（D）20%	（E）25%
（F）30%	（G）35%	（H）40%	（I）45%	（J）50%

問題２． 次のⅠ～Ⅷの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　　　　　Ⅱ、Ⅳ、Ⅴ：７点、その他：６点　（計５１点）

Ⅰ．ある保険会社が販売している保険商品は、免責金額を設定しない場合、１契約あたりの年間のクレーム件数 n は幾何分布　$f(n)=0.4(1-0.4)^n \quad (n=0,1,2\cdots)$ に従い、１事故あたりのクレーム額は平均 50 万円の指数分布に従うことがわかっている。

この保険商品において、クレーム発生頻度が上昇し、１契約あたりの年間のクレーム件数 n が幾何分布　$f(n)=0.4k(1-0.4k)^n \quad (n=0,1,2\cdots,\ \ 0<k<1)$ に従うようになったため、免責金額を適用することとした。
このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$e^{-0.1}=0.905$ を使用すること。

（１）全ての事故に対して免責金額 20 万円をエクセス方式で適用したところ、年間の発生保険金の期待値がクレーム発生頻度上昇前と同じとなった。このとき、k の数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）0.61	（Ｂ）0.63	（Ｃ）0.65	（Ｄ）0.67	（Ｅ）0.69
（Ｆ）0.71	（Ｇ）0.73	（Ｈ）0.75	（Ｉ）0.77	（Ｊ）0.79

（２）（１）の代わりに、１契約あたり年間２回目以降の事故に対して免責金額 20 万円をエクセス方式で適用したところ、年間の発生保険金の期待値がクレーム発生頻度上昇前と同じとなった。このとき、k の数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）0.76	（Ｂ）0.78	（Ｃ）0.80	（Ｄ）0.82	（Ｅ）0.84
（Ｆ）0.86	（Ｇ）0.88	（Ｈ）0.90	（Ｉ）0.92	（Ｊ）0.94

Ⅱ．ある保険における 1 契約者あたりの発生保険金 X_i は、$\Theta=\theta$ の下で、各年度独立に同一の確率密度関数 $f_{X_i|\Theta}(x_i \mid \theta)=\theta \exp(-\theta x_i) \quad (\theta>0, x_i>0)$ に従い、Θ 自身も確率密度関数 $\pi(\theta)=0.09\theta\exp(-0.3\theta) \quad (\theta>0)$ に従うことが分かっている。さらに、契約者 A の過去 3 年間の発生保険金が下表のとおりであったとき（これを $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)=(0.3,1.2,0.2)$ と書く）、この契約者の今年度（第 4 年度）の発生保険金について、ベイズ方法論を用いて推定したい。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

	第 1 年度	第 2 年度	第 3 年度
発生保険金	0.3	1.2	0.2

（１）契約者 A の事後分布 $\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta \mid \mathbf{x})$ は以下のとおりである。ここで、$\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3)$ である。

$$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta \mid \mathbf{x})=\frac{\boxed{①}}{3}\theta^{\boxed{②}}\exp\left(-\boxed{③}\times\theta\right) \quad (\theta>0)$$

①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4　（E）5
（F）6　（G）7　（H）8　（I）9　（J）10

（２）契約者 A の今年度（第 4 年度）の発生保険金の期待値は $\boxed{④}$ であり、契約者 A の今年度（第 4 年度）の発生保険金がその期待値を上回る確率の期待値は $\boxed{⑤}$ である。④、⑤に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【④の選択肢】
（A）0.25　（B）0.30　（C）0.35　（D）0.40　（E）0.45
（F）0.50　（G）0.55　（H）0.60　（I）0.65　（J）0.70

【⑤の選択肢】
（A）33%　（B）36%　（C）39%　（D）42%　（E）45%
（F）48%　（G）51%　（H）54%　（I）57%　（J）60%

Ⅲ．事故年度$i(i=1,\ldots,N)$、経過年数$k(k=1,\ldots,N)$における累計支払保険金の確率変数を$C_{i,k}$とし、支払は事故発生からN年で完了するものとする。また、次の前提を置く。

前提条件１：$E(C_{i,k+1} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,k}) = b_k C_{i,k} \quad (i=1,\cdots,N,\quad k=1,\cdots,N-1)$
前提条件２：$V(C_{i,k+1} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,k}) = \sigma_k^2 C_{i,k} \quad (i=1,\cdots,N,\quad k=1,\cdots,N-1)$
前提条件３：異なるs,tに対して$\{C_{s,1},\cdots,C_{s,N}\}$と$\{C_{t,1},\cdots,C_{t,N}\}$は独立

さらに、既知である$C_{i,j}$のうち、経過年数k年までのものすべてを、$B_k=\{C_{i,j} \mid i=1,\cdots,N-j+1,\quad j=1,\cdots,k\}$とする。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）ロスディベロップメントファクターの期待値b_kを以下の通り推定する。（推定値を$\hat{b}_k$とする。）

$$\hat{b}_k = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}} \quad (k=1,\cdots,N-1)$$

これが不偏推定量であることは、次のように確認することができる。

$$E(\hat{b}_k) = E(E(\hat{b}_k \mid B_k)) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{N-k} \boxed{①}}{\sum_{i=1}^{N-k} \boxed{②}}\right) = b_k$$

①、②に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（Ａ）b_i	（Ｂ）b_1	（Ｃ）b_k	（Ｄ）b_{N-k}	（Ｅ）b_{N-1}
（Ｆ）$C_{i,i}$	（Ｇ）$C_{i,1}$	（Ｈ）$C_{i,k}$	（Ｉ）$C_{i,N-k}$	（Ｊ）$C_{i,N-1}$
（Ｋ）$b_i C_{i,i}$	（Ｌ）$b_i C_{i,1}$	（Ｍ）$b_i C_{i,k}$	（Ｎ）$b_i C_{i,N-k}$	（Ｏ）$b_i C_{i,N-1}$
（Ｐ）$b_1 C_{i,1}$	（Ｑ）$b_k C_{i,k}$	（Ｒ）$b_{N-k} C_{i,N-k}$	（Ｓ）$b_{N-1} C_{i,N-1}$	
（Ｔ）いずれにも該当しない				

（２）経過年数kの分散係数σ_k^2を以下の通り推定する。（推定値を$\hat{\sigma}_k^2$とする。）

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{b}_k\right)^2}{N-k-1} \quad (k=1,\cdots,N-2)$$

これが不偏推定量であることは、次のように確認することができる。

$$E\left(\hat{\sigma}_k^2 \mid B_k\right)=\frac{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} E\left\{\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}-\hat{b}_k\right)^2 \middle| B_k\right\}}{N-k-1}$$

であり、

$$E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}-\hat{b}_k \middle| B_k\right)=\boxed{③}$$

であるから、

$$E\left(\hat{\sigma}_k^2\right)=\frac{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}-\hat{b}_k \middle| B_k\right)}{N-k-1}$$

となる。ここで、上記等式の右辺の分子は、

$$\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}-\hat{b}_k \middle| B_k\right)=\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \middle| B_k\right)+\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\hat{b}_k \middle| B_k\right)-2\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} Cov\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}, \hat{b}_k \middle| B_k\right)$$

と展開でき、

$$\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \middle| B_k\right)=\boxed{④}$$

$$\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\hat{b}_k \middle| B_k\right)=\boxed{⑤}$$

$$\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} Cov\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}, \hat{b}_k \middle| B_k\right)=\boxed{⑥}$$

であるから、

$$E\left(\hat{\sigma}_k^2\right)=E\left(E\left(\hat{\sigma}_k^2 \mid B_k\right)\right)=\sigma_k^2$$

③～⑥に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A）0　（B）1　（C）2　（D）$k-1$　（E）k
（F）$k+1$　（G）$N-k-1$　（H）$N-k$　（I）$N-k+1$　（J）$N-1$
（K）N　（L）$N+1$　（M）いずれにも該当しない

Ⅳ．効用関数が $u(x)$ である人が期初に w の富を持っている。保有しているリスク X に対し、リスクを他者に移転するためにいくらまでであれば保険料 P を支払うことができるかを考える。

このとき、保険料の上限 P_o は次の２つの式が等しい場合となる。

・保険を買わない場合の効用 $\boxed{\quad ① \quad}$

・保険を買う場合の効用 $\boxed{\quad ② \quad}$

また、$\boxed{\quad ① \quad}$ の効用関数については第２次まで、$\boxed{\quad ② \quad}$ の効用関数については第１次まで、$w-E(X)$ のまわりでテイラー展開して近似し、$r(x)=\boxed{\quad ③ \quad}$ とすると、保険料の上限 P_o は、リスク X の期待値 μ_x と分散 σ_x^2 を用いて、次式のとおり表現することができる。

$$P_o \cong \mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2} r(w-\mu_x)$$

この $r(x)$ は、Arrow-Pratt の絶対危険回避度と呼ばれており、この水準が高ければリスク回避度は高いこととなる。

（１）①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

【①、②の選択肢】

（Ａ） $u(w-E(X))$　（Ｂ）$u(w)-u(E(X))$　（Ｃ）$u(w-P_0)$

（Ｄ）$u(w)-u(P_0)$　（Ｅ）$u(w-P_0-E(X))$　（Ｆ）$u(w)-u(P_0+E(X))$

（Ｇ）$u(w)-E(u(X))$　（Ｈ） $E(u(w-X))$　（Ｉ） $E(u(w-P_0-X))$

（Ｊ）いずれにも該当しない

【③の選択肢】

（Ａ）$-u(x)$　（Ｂ）$-u'(x)$　（Ｃ）$-u''(x)$　（Ｄ）$-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$　（Ｅ）$-\dfrac{u''(x)}{u(x)}$

（Ｆ）$-\dfrac{u(x)}{u'(x)}$　（Ｇ）$-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$　（Ｈ）$-\dfrac{u(x)}{u''(x)}$　（Ｉ）$-\dfrac{u'(x)}{u''(x)}$

（Ｊ）いずれにも該当しない

（2）期初の富を $w=1{,}000$ とし、リスク X は以下の確率分布に従うものとする。

X	発生確率
0	0.5
90	0.3
150	0.2

次のアからウの効用関数について、問題文の近似式を用いて保険料の上限 P_o を算出したとき、最も P_o が大きくなるのは $\boxed{\quad ④ \quad}$ の効用関数であり、そのときの P_o の値は $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ である。

ア． $u(x)=e^{-0.0006x}$
イ． $u(x)=\log x$
ウ． $u(x)=x^{0.6}$

④、⑤に当てはまる最も適切なもの（⑤については最も近いもの）は、選択肢のうちのどれか。

【④の選択肢】
（Ａ）ア　（Ｂ）イ　（Ｃ）ウ

【⑤の選択肢】
（Ａ）57.6　（Ｂ）57.8　（Ｃ）58.0　（Ｄ）58.2　（Ｅ）58.4
（Ｆ）58.6　（Ｇ）58.8　（Ｈ）59.0　（Ｉ）59.2　（Ｊ）59.4

Ｖ．次の Lundberg モデルにおいて、破産が発生し、かつ破産直後の欠損額が y $(y>0)$ 以上である確率 $G(u,y)$ について考える。なお、このモデルでは「時刻 t のサープラス U_t が $U_t<0$ となる状態」を破産と呼ぶ。このとき、次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

期首サープラス	： u
クレーム件数過程のパラメータ	： λ
個々のクレーム額の分布関数	： $F(x)$
単位時間当たりの収入保険料	： c

（１）期首から微小時間 Δt 経過後に支払額 x の事故が 1 件発生し、破産していない状態を考える。このとき、期間 $[0,\Delta t]$ において事故が発生する確率は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、その後破産が発生し、かつ破産直後の欠損額が y 以上となる確率は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。
①、②に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

（２）期首から微小時間 Δt 経過後の状態に着目し、「事故が発生していない状態」「事故が 1 件発生しかつ破産していない状態」「事故が 1 件発生しかつ破産している状態」の 3 つの状態に場合分けすることで、$G(u,y)$ を下式のとおり表すことが出来る。

$$
\begin{aligned}
G(u,y) &= \boxed{\quad ③ \quad} \times \boxed{\quad ④ \quad} \\
&+ \boxed{\quad ① \quad} \times \int_0^{u+c\Delta t} \boxed{\quad ② \quad}\, dF(x) \\
&+ \boxed{\quad ① \quad} \times \boxed{\quad ⑤ \quad}
\end{aligned}
$$

③～⑤に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか（③と④の解答は順不同)。

【①～⑤の選択肢】

（Ａ） $G(u+c\Delta t,y)$	（Ｂ） $G(u-c\Delta t,y)$	（Ｃ） $G(u,y+c\Delta t)$
（Ｄ） $G(u,y-c\Delta t)$	（Ｅ） $G(u+c\Delta t+x,y)$	（Ｆ） $G(u+c\Delta t-x,y)$
（Ｇ） $G(u+c\Delta t,y+x)$	（Ｈ） $G(u+c\Delta t,y-x)$	（Ｉ） λ
（Ｊ） $-\lambda$	（Ｋ） $\lambda\Delta t$	（Ｌ） $-\lambda\Delta t$
（Ｍ） $1+\lambda\Delta t$	（Ｎ） $1-\lambda\Delta t$	（Ｏ） $\int_{u+c\Delta t}^{\infty} dF(x)$
（Ｐ） $\int_{u+c\Delta t+y}^{\infty} dF(x)$	（Ｑ） $\int_{u+c\Delta t}^{\infty} \lambda dF(x)$	（Ｒ） $\int_{u+c\Delta t+y}^{\infty} \lambda dF(x)$
（Ｓ）いずれにも該当しない		

（3）（2）の式を整理し、$\Delta t \to 0$ とすることで、下式を得ることが出来る。

$$\frac{\partial}{\partial u}G(u,y)=\frac{\lambda}{c}\left\{ \boxed{\quad ⑥ \quad} - \boxed{\quad ⑦ \quad} - \boxed{\quad ⑧ \quad} \right\}$$

また、この式を u について 0～∞ の範囲で積分することで、$G(0,y)=\frac{\lambda}{c}\int_y^{\infty}\{1-F(u)\}du$ の式を得ることが出来る。

⑥～⑧に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか（⑦と⑧の解答は順不同）。

（A）$G(u,y)$　（B）$G(u-x,y)$　（C）$G(u+x,y)$

（D）$G(u,y-x)$　（E）$G(u,y+x)$　（F）$G(u-y,y)$

（G）$G(u+y,y)$　（H）$\int_0^u G(u,y)dF(x)$　（I）$\int_0^u G(u-x,y)dF(x)$

（J）$\int_0^u G(u+x,y)dF(x)$　（K）$\int_0^u G(u,y+x)dF(x)$　（L）$\int_0^u G(u,y-x)dF(x)$

（M）$\int_0^u G(u-y,y)dF(x)$　（N）$\int_0^u G(u+y,y)dF(x)$　（O）$\int_u^{\infty} dF(x)$

（P）$\int_u^{\infty} G(u,0)dF(x)$　（Q）$\int_u^{\infty} G(0,y)dF(x)$　（R）$\int_u^{\infty} G(u,y)dF(x)$

（S）$\int_{u+y}^{\infty} dF(x)$　（T）$\int_{u+y}^{\infty} G(u,0)dF(x)$　（U）$\int_{u+y}^{\infty} G(0,y)dF(x)$

（V）$\int_{u+y}^{\infty} G(u,y)dF(x)$　（W）いずれにも該当しない

VI. ある保険会社の契約ポートフォリオに対して、以下のことが分かっている。

・対象契約ポートフォリオから発生したクレームのうち、2 億円以上のクレームは 6 件であり、それぞれ 2.10 億円、2.20 億円、2.20 億円、2.20 億円、3.00 億円、3.30 億円であった。(過去何年間のデータであるかは定かではない。)

・対象契約ポートフォリオから生じる年間のクレーム件数の期待値は 100 件である。

・クレーム 1 件あたりのクレーム額は指数分布に従う。

このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$e = 2.718$ を使用すること。

（1）この保険会社は対象契約ポートフォリオに対してエクセスポイント 0.50 億円、カバーリミット無制限の超過損害額再保険を手配することとした。この超過損害額再保険の年間の再保険金回収額の期待値は $\boxed{\quad ① \quad}$ 億円である。①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、クレーム 1 件あたりのクレーム額が従う指数分布のパラメータは最尤法により推測せよ。

（A）18.0　（B）18.2　（C）18.4　（D）18.6　（E）18.8
（F）19.0　（G）19.2　（H）19.4　（I）19.6　（J）19.8

（2）（1）の超過損害額再保険に代わって、出再割合 20%の比例再保険を手配し、さらに、保有部分に対してエクセスポイント $\boxed{\quad ② \quad}$ 億円、カバーリミット 0.70 億円の超過損害額再保険を手配することとした。両再保険からの年間の再保険金回収額の期待値の合計が（1）の結果と一致するとき、②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.30　（B）0.35　（C）0.40　（D）0.45　（E）0.50
（F）0.55　（G）0.60　（H）0.65　（I）0.70　（J）0.75

余白ページ

Ⅶ．一般化パレート分布の性質に関して、次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

（１）あるポートフォリオ A について、個々のクレーム額 X の分布関数が一般化パレート分布

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \qquad (x \geq 0\,,\ 0 < \xi < 1\,,\ 0 < \beta < \infty)$$

に従うことが分かっている。また、閾値を $u\ (u > 0)$ とする。このとき、個々のクレーム額 X の超過分布関数 $F_u(x)$ を求めると、以下のとおりとなる。①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

$$F_u(x) = 1 - \left(1 + \frac{\boxed{①}}{\boxed{②}}\right)^{\boxed{③}} \qquad (x \geq 0)$$

（Ａ）β　（Ｂ）$\beta - \xi u$　（Ｃ）$\beta + \xi u$　（Ｄ）$-\dfrac{1}{\xi}$

（Ｅ）$-\dfrac{1}{\xi - \beta}$　（Ｆ）ξx　（Ｇ）$\xi(x+u)$　（Ｈ）$\xi(x-u)$

（Ｉ）$\beta + \xi x$　（Ｊ）いずれにも該当しない

（２）個々のクレーム額 X の平均超過関数 $e(u)$ を求めると、以下のとおりとなる。④、⑤に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

$$e(u) = \frac{\boxed{④}}{\boxed{⑤}} \qquad (u > 0)$$

（Ａ）β　（Ｂ）$\beta - \xi u$　（Ｃ）$\beta + \xi u$　（Ｄ）$u(\beta - \xi)$

（Ｅ）$u(\beta + \xi)$　（Ｆ）ξu　（Ｇ）$1 - \xi$　（Ｈ）$1 + \xi$

（Ｉ）βu　（Ｊ）いずれにも該当しない

（3）あるポートフォリオ B について、個々のクレーム額Yの閾値u $(u > 0)$の超過分布関数が一般化パレート分布の分布関数$G_{\xi,\beta}(y)$ $(y \geq 0, 0 < \xi < 1, 0 < \beta < \infty)$に従うことが分かっている。このとき、$VaR_{\alpha}(Y) = q_{\alpha}$が$u$以上となるような$\alpha$について、$q_{\alpha}$を用いて$TVaR_{\alpha}(Y)$を表すと、以下のとおりとなる。⑥、⑦に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。
（ヒント：確率変数Yについて $e(VaR_{\alpha}(Y)) = TVaR_{\alpha}(Y) - VaR_{\alpha}(Y)$ が成り立つ。ここで、$e(u)$はYの平均超過関数である。）

$$TVaR_{\alpha}(Y) = \frac{\boxed{\quad ⑥ \quad}}{\boxed{\quad ⑦ \quad}}$$

（A）$\beta - \xi u$　（B）$\beta + q_{\alpha}$　（C）$\xi q_{\alpha} + \beta - \xi u$　（D）$\xi q_{\alpha} - \beta - \xi u$
（E）$q_{\alpha} + \beta - \xi u$　（F）$q_{\alpha} + \beta + \xi u$　（G）$1 - \xi$　（H）$1 - \xi - q_{\alpha}$
（I）$1 - \xi + q_{\alpha}$　（J）いずれにも該当しない

Ⅷ．次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）以下のイからハのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ．純保険料法は、料率改定が求められる時に予定損害率と実績損害率を対比することを基本的考え方とする手法であり、料率算定法の中で判断法に次いで古い手法である。

ロ．スケジュール料率算定法では、過去の実績に基づいてその後の年度における料率調整が行われるのに対し、経験料率算定法では、当該期間におけるロス実績に基づき、その期間内の最終保険料調整が行われる。

ハ. エッシャー原理とワンの保険料算出原理は、共に、期待効用原理に基づく均衡価格の考え方に、いくつかの仮定を加えることで導くことができる。

（A）全て正しい　（B）イ、ロのみ正しい
（C）イ、ハのみ正しい　（D）ロ、ハのみ正しい
（E）イのみ正しい　（F）ロのみ正しい
（G）ハのみ正しい　（H）全て誤り

（２）以下のニからへのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

ニ．コヒーレント・リスク尺度が満たすべき性質のうち、劣加法性とは、$\rho(X_1+X_2)\le\rho(X_1)+\rho(X_2)$ を満たす性質のことである。TVaR やワン変換リスク尺度と異なり、VaR はこの性質を満たさない場合がある。

ホ．保険料算出原理の指数原理とは、保険金を X 、保険料を $P(X)$ とするとき、$P(X)=\min\{p\,|\,F_X(p)\ge 1-h\}\quad h>0$ にて表される原理であり、X の分布の上側 h%点と期待値との差をリスクプレミアムとする原理である。

へ．ケンドールの τ は、(X,Y) の２つの標本 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$ に対して、X_1,X_2 の大小と Y_1,Y_2 の大小が一致しない確率から、X_1,X_2 の大小と Y_1,Y_2 の大小が一致する確率を引いた値である。X_1,X_2 や Y_1,Y_2 の大小関係は X,Y の分布とは無関係に決まるため、ケンドールの τ はピアソンの積率相関係数と異なり周辺分布には依存しない。

（A）全て正しい　（B）ニ、ホのみ正しい
（C）ニ、へのみ正しい　（D）ホ、へのみ正しい
（E）ニのみ正しい　（F）ホのみ正しい
（G）へのみ正しい　（H）全て誤り

以上

損保数理（解答例）

問題１

Ｉ．

（１）①（Ｂ）②（Ｍ）（①、②は完答）　（２）（Ｈ）　（３）（Ｄ）

［（１）２点、（２）２点、（３）３点］

（１）

S のキュムラント母関数を用いると、

$$歪度=\frac{E((S-E(S))^3)}{\sigma^3}=\frac{1}{\sigma^3}\frac{d^3}{dt^3}\log M_s(t)\bigg|_{t=0}=\frac{1}{\sigma^3}\frac{d^3}{dt^3}\log\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}\bigg|_{t=0}=\frac{2\alpha}{(\sigma\beta)^3}$$

（２）

ガンマ分布の性質より、

$$平均=x_0+\frac{\alpha}{\beta}=10$$

$$分散=\frac{\alpha}{\beta^2}=\sigma^2=2$$

$$歪度=\frac{2\alpha}{(\sigma\beta)^3}=\sqrt{2}$$

上式を解くと、$\alpha=2,\beta=1,x_0=8$ となる。

（３）

破産確率 ε を求めると、次のとおりとなる（μ_0 ：期首サープラス、 p ：保険料収入）。

$$\begin{aligned}\varepsilon\quad &=P(\mu_0+p-S<0)\\ &=P(10\times0.3+10\times1.1-S<0)=P(S>14)\approx1-G(14-8:2,1)\\ &=1-\int_0^6\frac{1^2}{\Gamma(2)}t^{2-1}e^{-t}dt=\cdots=1-(1-7e^{-6})=7e^{-6}=0.017\end{aligned}$$

Ⅱ．

（１）a　**６**　b　**０**（a、b は完答）　（２）c　**２**　d　**３**　（c、d は完答）

（３）e　**５**　f　**５**（e、f は完答）　　　［（１）２点、（２）２点、（３）３点］

（１）

平成Ｘ年度の既経過保険料は　$3{,}500\times\dfrac{12+11+\cdots+1}{12}=22{,}750$（万円）

平成Ｘ年度の既発生保険金は　$3{,}500\times60\%\times\dfrac{12+11+\cdots+1}{12}=13{,}650$（万円）

従って、平成Ｘ年度のアーンドベーシス損害率は　$\dfrac{13{,}650}{22{,}750}=60\%$

なお、事故は保険期間中均一に発生するという条件から、アーンドベーシス損害率は予定損害率に等しくなる。

（２）

平成Ｘ年度の計上保険料は　$3{,}500\times12=42{,}000$（万円）

平成Ｘ年度の支払保険金について、事故発生から保険金支払までの期間が 2 か月であることから、保険金支払が平成Ｘ年度中に行われるのは、保険始期ごとに下表の期間に事故が発生した場合である。

保険始期	事故発生期間
Ｘ年４月１日	Ｘ年４月１日からＸ+1 年１月末までの 10 か月間
Ｘ年５月１日	Ｘ年５月１日からＸ+1 年１月末までの 9 か月間
…	…
Ｘ+1 年１月１日	Ｘ+1 年１月１日からＸ+1 年１月末までの１か月間
Ｘ+1 年２月１日	Ｘ年度中の支払はない
Ｘ+1 年３月１日	Ｘ年度中の支払はない

平成Ｘ年度の支払保険金は$3{,}500\times60\%\times\dfrac{10+9+\cdots+1+0+0}{12}=9{,}625$（万円）

従って、平成Ｘ年度のリトンベーシス損害率は　$\dfrac{9{,}625}{42{,}000}=23\%$

（３）

平成Ｘ+1 年度の計上保険料は　$4{,}000\times12=48{,}000$（万円）

平成Ｘ+1 年度の支払保険金について、事故発生から保険金支払までの期間が 2 か月であることから、保険金支払が平成Ｘ+1 年度中に行われるのは、保険始期ごとに下表の期間に事故が発生した場合である。

保険始期	事故発生期間
X 年 4 月 1 日	X+1 年 2 月 1 日から X+1 年 3 月末までの 2 か月間
X 年 5 月 1 日	X+1 年 2 月 1 日から X+1 年 4 月末までの 3 か月間
…	…
X+1 年 1 月 1 日	X+1 年 2 月 1 日から X+1 年 12 月末まで 11 か月間
X+1 年 2 月 1 日	X+1 年 2 月 1 日から X+2 年 1 月末までの 12 か月間
X+1 年 3 月 1 日	X+1 年 3 月 1 日から X+2 年 1 月末までの 11 か月間
X+1 年 4 月 1 日	X+1 年 4 月 1 日から X+2 年 1 月末までの 10 か月間
X+1 年 5 月 1 日	X+1 年 5 月 1 日から X+2 年 1 月末までの 9 か月間
…	…
X+2 年 1 月 1 日	X+2 年 1 月 1 日から X+2 年 1 月末までの 1 か月間
X+2 年 2 月 1 日	X+1 年度中の支払はない
X+2 年 3 月 1 日	X+1 年度中の支払はない

平成 X+1 年度の支払保険金は

$$3{,}500\times 60\%\times\frac{2+3+\cdot\cdot\cdot+11+12+11}{12}+4{,}000\times 60\%\times\frac{10+9+\cdot\cdot\cdot+1+0+0}{12}=26{,}400$$ （万円）

従って、平成 X+1 年度のリトンベーシス損害率は $\frac{26{,}400}{48{,}000}=55\%$

Ⅲ.

（１）①（E）　②（H）　（２）③（H）　　［（１）①１点、②２点、（２）③４点］

（１）

クレーム総額Sのクレーム件数Nのパラメータをλ、個々のクレーム額Xの確率密度関数を$f(x)$とすると、複合ポアソン分布の特性より、それぞれ次のとおりとなる。

$\lambda=\lambda_1+\lambda_2=4+6=10$　（λ_1, λ_2はS_1，S_2のクレーム件数のパラメータ）

$$f(x)=\frac{\lambda_1}{\lambda}f_1(x)+\frac{\lambda_2}{\lambda}f_2(x)=\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{6}{10}e^{-x}=\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{3}{5}e^{-x}$$

これにより、クレーム件数Nと個々のクレーム額Xのモーメントは次のとおりとなる。

$E(N)=V(N)=10$

$$E(X)=\int_0^\infty xf(x)dx$$
$$=\int_0^\infty x\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{3}{5}e^{-x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{5}\left\{\left[x\cdot -2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty+\int_0^\infty 2e^{-\frac{x}{2}}dx\right\}+\frac{3}{5}\left\{\left[x\cdot -e^{-x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}dx\right\}$$
$$=\frac{2}{5}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx+\frac{3}{5}\int_0^\infty e^{-x}dx$$
$$=\frac{2}{5}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty+\frac{3}{5}\left[-e^{-x}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{7}{5}$$

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^\infty x^2(\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{3}{5}e^{-x})dx$$
$$=\frac{1}{5}\left\{\left[x^2\cdot -2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty+\int_0^\infty 2x\cdot 2e^{-\frac{x}{2}}dx\right\}+\frac{3}{5}\left\{\left[x^2\cdot -e^{-x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty 2x\cdot e^{-x}dx\right\}$$
$$=\frac{4}{5}\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{2}}dx+\frac{6}{5}\int_0^\infty xe^{-x}dx$$
$$=\frac{4}{5}\left\{\left[x\cdot -2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty+\int_0^\infty 2e^{-\frac{x}{2}}dx\right\}+\frac{6}{5}\left\{\left[x\cdot -e^{-x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}dx\right\}$$
$$=\frac{8}{5}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx+\frac{6}{5}\int_0^\infty e^{-x}dx$$
$$=\frac{8}{5}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty+\frac{6}{5}\left[-e^{-x}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{22}{5}$$

この結果から、クレーム総額Sの期待値$E(S)$、および分散$V(S)$は次のとおりとなる。

$$E(S)=\lambda E(X)=10\cdot\frac{7}{5}=\underline{14}$$

$$V(S)=\lambda\{V(X)+E(X)^2\}=\lambda E(X^2)=10\cdot\frac{22}{5}=\underline{44}$$

（２）

問題文より、クレーム総額Sについても期待値$E(S)$、分散$V(S)$の正規分布に従うと仮定できるため、$Z=\dfrac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}$とおくと、$Z$は標準正規分布に従うと近似できる。

$P_r(Z\le 1.96)=0.975$であることから、クレーム総額Sの 97.5 パーセンタイル値は次のとおりとなる。

$$P_r\left(\frac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}\le 1.96\right)=P_r\left(\frac{S-14}{\sqrt{44}}\le 1.96\right)=P_r\left(S\le 14+1.96\times\sqrt{44}\right)=P_r(S\le 27.0)$$

題意より、$S'=2S$であることから、求めるaは次のとおりとなる。

$$P_r(S\le 27.0)=P_r\left(\frac{S'}{2}\le 27.0\right)=P_r\left(S'\le \underline{54.0}\right)$$

【別解】

クレーム金額増額後のクレーム額を$Y=2X$とおくと、Yの確率密度関数は、次のとおりとなる。

$$f(y)=\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{4}}+\frac{3}{5}e^{-\frac{y}{2}}\right)\frac{1}{2}=\frac{1}{10}e^{-\frac{y}{4}}+\frac{3}{10}e^{-\frac{y}{2}}$$

クレーム金額増額後の個々のクレーム額Yのモーメントを計算すると次のとおりとなる。

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_0^\infty yf(y)dy\\&=\int_0^\infty y(\frac{1}{10}e^{-\frac{y}{4}}+\frac{3}{10}e^{-\frac{y}{2}})dy\\&=\frac{28}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Y^2)&=\int_0^\infty y^2f(y)dy\\&=\int_0^\infty y^2(\frac{1}{10}e^{-\frac{y}{4}}+\frac{3}{10}e^{-\frac{y}{2}})dy\\&=\frac{176}{10}\end{aligned}$$

（1）と同様に、クレーム金額増額後のクレーム総額S'の期待値$E(S')$、および分散$V(S')$は次のとおりとなる。

$$E(S')=\lambda E(Y)=10\cdot\frac{28}{10}=28$$

$$V(S')=\lambda\{V(Y)+E(Y)^2\}=\lambda E(Y^2)=10\cdot\frac{176}{10}=176$$

$Z=\dfrac{S'-E(S')}{\sqrt{V(S')}}$とおくと、問題文より$Z$は標準正規分布に従うと近似できる。

$P_r(Z\leq 1.96)=0.975$であることから、求めるaは次のとおりとなる。

$$P_r\left(\frac{S'-E(S')}{\sqrt{V(S')}}\leq 1.96\right)=P_r\left(\frac{S'-28}{\sqrt{176}}\leq 1.96\right)=P_r\left(S'\leq 28+1.96\times\sqrt{176}\right)=P_r\left(S'\leq \underline{54.0}\right)$$

Ⅳ.

（１）**（G）**　（２）**（I）**　　　［（１）２点、（２）５点］

（１）

エクスポージャとクレーム総額は、問題文に与えられているとおり、

＜エクスポージャ＞

	耐火	非耐火	計
都市	560	440	
郊外	200	300	
計			1,500

＜クレーム総額＞

	耐火	非耐火	計
都市	560	1,540	
郊外	300	1,350	
計			3,750

であるから、クレームコストは、リスク区分ごとにクレーム総額をエクスポージャで除して、下記のとおり求められる。

＜クレームコスト＞

	耐火	非耐火	計
都市	1.00	3.50	
郊外	1.50	4.50	
計			2.50

相対クレームコスト指数は、合計のクレームコストが 1 になるように、リスク区分ごとにクレームコストを合計のクレームコストで除して、下記のとおり求められる。

＜相対クレームコスト指数＞

	耐火	非耐火	計
都市	0.40	1.40	
郊外	0.60	1.80	
計			1.00

したがって、都市・非耐火に対応する相対クレームコスト指数の実績値は 1.40

（２）

尤度関数は、$L=\prod_{i=1}^{4} f\left(y_i;\mu_i,\omega_i,\phi\right)=\prod_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi/\omega_i}}\exp\left(-\frac{\left(y_i-\mu_i\right)^2}{2\phi/\omega_i}\right)$であるため、

対数尤度関数は、$\log L=\sum_{i=1}^{4}\left\{\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi/\omega_i}}\right)-\frac{\left(y_i-\mu_i\right)^2}{2\phi/\omega_i}\right\}$となる。

ここで、α_1：都市の料率係数、α_2：郊外の料率係数、β_1：耐火の料率係数、β_2：非耐火の料率係

数、と置くと、

$$\mu_i = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 & (i=1) \\ \alpha_1 + \beta_2 & (i=2) \\ \alpha_2 + \beta_1 & (i=3) \\ \alpha_2 + \beta_2 & (i=4) \end{cases}$$

と書けるので、対数尤度関数は、

$$\log L = \sum_{i=1}^{4} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi/\omega_i}}\right) - \left[\frac{\{y_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\}^2}{2\phi/\omega_1} + \frac{\{y_2 - (\alpha_1 + \beta_2)\}^2}{2\phi/\omega_2} + \frac{\{y_3 - (\alpha_2 + \beta_1)\}^2}{2\phi/\omega_3} + \frac{\{y_4 - (\alpha_2 + \beta_2)\}^2}{2\phi/\omega_4}\right]$$

となり、これを最大にするパラメータ α_1、α_2、β_1、β_2 は、以下の連立方程式を満たす。（本問では、加法型のミニマムバイアス法が満たす連立方程式と同じ連立方程式が導かれる。）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log L}{\partial \alpha_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1\{y_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\} + \omega_2\{y_2 - (\alpha_1 + \beta_2)\} = 0 \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \alpha_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3\{y_3 - (\alpha_2 + \beta_1)\} + \omega_4\{y_4 - (\alpha_2 + \beta_2)\} = 0 \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \beta_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1\{y_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\} + \omega_3\{y_3 - (\alpha_2 + \beta_1)\} = 0 \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \beta_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2\{y_2 - (\alpha_1 + \beta_2)\} + \omega_4\{y_4 - (\alpha_2 + \beta_2)\} = 0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

この連立方程式①において、C を定数とすると、

$$\omega_1\{y_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\} = \omega_4\{y_4 - (\alpha_2 + \beta_2)\} = C \text{、} \omega_2\{y_2 - (\alpha_1 + \beta_2)\} = \omega_3\{y_3 - (\alpha_2 + \beta_1)\} = -C$$

と表すことができる。これを整理すると、
$\alpha_1 + \beta_1 = y_1 - C/\omega_1 \cdots (a)$，$\alpha_1 + \beta_2 = y_2 + C/\omega_2 \cdots (b)$
$\alpha_2 + \beta_1 = y_3 + C/\omega_3 \cdots (c)$，$\alpha_2 + \beta_2 = y_4 - C/\omega_4 \cdots (d)$
となる。$(a) + (d) = (b) + (c)$ より、

$$\left(y_1 - \frac{C}{\omega_1}\right) + \left(y_4 - \frac{C}{\omega_4}\right) = \left(y_2 + \frac{C}{\omega_2}\right) + \left(y_3 + \frac{C}{\omega_3}\right)$$

であり、各 y_i、ω_i を代入して C について解くと、$C = 16.1397\cdots$
したがって、都市・非耐火に対応する相対クレームコスト指数の推定値（料率係数の値）は、これを代入して、$\alpha_1 + \beta_2 = 1.44$

V.

<u>（1）（H）　（2）（C）</u>　　［（1）３点、（2）４点］

（1）

ロスディベロップメントファクターを計算すると以下のとおりとなる。

事故年度		経過年度		
	i	1→2	2→3	3→4
2011 年度	1	1.840	1.107	1.042
2012 年度	2	1.813	1.085	
2013 年度	3	1.697		

経過年度	適用ロスディベロップメントファクター	
1→2	1.760	＝（1.840×1＋1.813×2＋1.697×3）／6
2→3	1.092	＝（1.107×1＋1.085×2）／3
3→4	1.042	＝1.042

2011 年度は第 4 経過年度まで達しているため、ロスディベロップメントファクターは 1.000 となり、2012 年度から 2014 年度の累積支払保険金のロスディベロップメントファクターは各々、1.042、1.138、2.003 となる。

これらを各事故年度の直近累計支払保険金に乗じると、予想最終発生保険金は 3,440、3,605、4,268、5,769 となる。したがって、支払備金は

（3,440＋3,605＋4,268＋5,769）－（3,440＋3,460＋3,750＋2,880）＝<u>3,552</u>

となる。

（2）

与えられた契約年度ごとの営業保険料と予定損害率から、事故年度ごとの最終発生保険金の当初予測値を計算すると以下のとおりとなる。

事故年度	最終発生保険金の当初予測値	
2011 年度	4,000	＝（7,800×50%＋8,200×50%）／2
2012 年度	4,870	＝（8,200×50%＋9,400×60%）／2
2013 年度	5,970	＝（9,400×60%＋10,500×60%）／2
2014 年度	6,750	＝（10,500×60%＋12,000×60%）／2

これより、各事故年度のボーンヒュッターファーガソン法による予想最終累計発生保険金は以下のとおり算出される。

2011 年度：$\left(1-\frac{1}{1}\right)\times 4{,}000 + 3{,}440 = 3{,}440$

2012 年度：$\left(1-\dfrac{1}{1.042}\right)\times 4{,}870+3{,}460=3{,}656$

2013 年度：$\left(1-\dfrac{1}{1.138}\right)\times 5{,}970+3{,}750=4{,}474$

2014 年度：$\left(1-\dfrac{1}{2.003}\right)\times 6{,}750+2{,}880=6{,}260$

したがって、支払備金は
（3,440＋3,656＋4,474＋6,260）－（3,440＋3,460＋3,750＋2,880）＝<u>4,300</u>
となる。

VI.

（１）**（D）**　（２）**（G）**　　　［（１）４点、（２）３点］

（１）

予定契約消滅率を考慮した現価率ϕおよび期始払年金現価率Zは、以下のとおりとなる。

$\phi=(1-q)/(1+i)=0.9608$

$Z=(1-\phi^5)/(1-\phi)=4.6231$

よって、積立型基本特約保険料は、以下のとおりとなる。

積立型基本特約保険料＝積立保険料×（1＋維持費率＋代理店手数料率）

＝（満期返れい金×ϕ^5＋中途返れい金×ϕ^3）÷Z×（1＋維持費率＋代理店手数料率）

＝$(200\times 0.9608^5+50\times 0.9608^3)\div 4.6231\times(1+3\%+3\%)$ 万円

＝477,145円

（２）

第４保険年度末の払戻積立金の金額は、将来法を用いると、以下のとおりとなる。

払戻積立金＝満期返れい金×ϕ － 積立保険料

＝$200\times 0.9608-(200\times 0.9608^5+50\times 0.9608^3)\div 4.6231$万円

＝1,471,463円

よって、求める割合＝1,471,463÷477,145＝3.08

Ⅶ.

（１）**（B）**　（２）**（A）**　　　［（１）３点、（２）４点］

（１）

期首サープラス$u=0$のときの破産確率を$\varepsilon(0,0)$とおくと、

$$\varepsilon(0,0)=\lim_{y\to\infty}G(0,y)=\lim_{y\to\infty}\frac{\lambda}{c}\int_0^y\{1-F(x)\}dx=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\{1-F(x)\}dx=\frac{\lambda}{c}\mu=\frac{1}{1+\theta}=\frac{1}{1.2}=0.83$$

（２）

求める確率は、「期首サープラス$u=0$で破産が発生したという条件の下で、破産直後のサープラスが-30より小さくなる（期首時点からの損失が 30 を超える）条件付確率」と等しいため、この確率を求める。

期首サープラス$u=0$のとき、$U_t<0$となった直後の破産時の損失額Yの分布関数は、次のとおり。

$$P(Y\le y)=\frac{G(0,y)}{\varepsilon(0,0)}=\frac{\frac{\lambda}{c}\int_0^y\{1-F(x)\}dx}{\varepsilon(0,0)}=\frac{\int_0^y\{1-F(x)\}dx}{\mu}=\frac{\int_0^y\left\{1-\left(1-e^{\frac{-x}{10}}\right)\right\}dx}{10}=1-e^{\frac{-y}{10}}$$

よって、$U_t<-30$となる確率$P(Y>30)$は、次のとおりとなる。

$$P(Y>30)=1-P(Y\le 30)=e^{\frac{-30}{10}}=e^{-3}=0.05$$

問題２

Ｉ.

<u>（１）**（Ｉ）**　（２）**（Ｆ）**</u>　　　［（１）３点、（２）３点］

（１）

クレーム発生頻度上昇前のクレーム件数平均$E(N)$とクレーム額平均$E(X)$は

$$E(N)=\frac{1-0.4}{0.4}=1.5\text{、}E(X)=50$$

クレーム発生頻度上昇後のクレーム件数平均$E(N_1)$とクレーム額平均$E(X_1)$は

$$E(N_1)=\frac{1-0.4k}{0.4k}\text{、}E(X_1)=\int_{20}^{\infty}(x-20)\frac{1}{50}e^{-\frac{1}{50}x}dx=50e^{-0.4}$$

$E(N)\times E(X)=E(N_1)\times E(X_1)$のとき年間の発生保険金の期待値が同じとなるので、

$$1.5\times 50=\frac{1-0.4k}{0.4k}\times 50e^{-0.4}$$

$$\Leftrightarrow 1.5\times 0.4k=(1-0.4k)\times e^{-0.4}$$

$$\Leftrightarrow (0.6+0.4\times e^{-0.4})k=e^{-0.4}$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{0.905^4}{0.6+0.4\times 0.905^4}$$

$$\Leftrightarrow k=0.77$$

（２）

１回目の事故のクレーム額の期待値は50、２回目以降の事故のクレーム額の期待値は$50e^{-0.4}$となるので、年間のクレーム件数をN_2、クレーム総額をS_2とすると、

$$E(S_2\mid N_2=t)=\begin{cases}0 & t=0\\ 50+50e^{-0.4}(t-1) & 1\le t\end{cases}$$

が成り立ち、クレーム総額平均$E(S_2)$は

$$E(S_2)=E(E(S_2\mid N_2))=\sum_{t=1}^{\infty}E(S_2\mid N_2=t)\cdot 0.4k\cdot(1-0.4k)^t$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}(50+50e^{-0.4}(t-1))\cdot 0.4k\cdot(1-0.4k)^t$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}\left\{50e^{-0.4}\cdot t+50(1-e^{-0.4})\right\}\cdot 0.4k\cdot(1-0.4k)^t$$

$$=50e^{-0.4}\times\frac{1-0.4k}{0.4k}+50(1-e^{-0.4})\times(1-0.4k)$$

$E(N)\times E(X)=E(S_2)$のとき年間の発生保険金の期待値が同じとなるので、

$$1.5\times 50 = 50e^{-0.4}\times\frac{1-0.4k}{0.4k} + 50(1-e^{-0.4})\times(1-0.4k)$$

$$\Leftrightarrow 1.5\times 0.4k = e^{-0.4}\times(1-0.4k) + (1-e^{-0.4})\times(1-0.4k)\times 0.4k$$

$$\Leftrightarrow 0.16(1-e^{-0.4})k^2 + (0.2+0.8e^{-0.4})k - e^{-0.4} = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-(0.2+0.8\times 0.905^4)\pm\sqrt{(0.2+0.8\times 0.905^4)^2 + 0.64(1-0.905^4)\times 0.905^4}}{0.32(1-0.905^4)}$$

$$\Leftrightarrow k = 0.86, -15$$

$0<k<1$となるため、$k=0.86$となる。

Ⅱ．

（１）①（**Ｄ**） ②（**Ｄ**）③（**Ｂ**）（①～③は完答）　（２）④（**Ｆ**） ⑤（**Ａ**）

［（１） ３点、（２）④２点、⑤２点］

（１）

事後分布$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x})$は、

$$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x}) \propto \pi(\theta)\prod_{i=1}^{3} f_{X_i|\Theta}(x_i\,|\,\theta) = 0.09\theta\exp(-0.3\theta)\prod_{i=1}^{3}\{\theta\exp(-\theta x_i)\}$$

$$= 0.09\theta^4\exp(-0.3\theta)\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^{3}x_i\right) = 0.09\theta^4\exp(-2\theta)$$

と計算できる。ここで、事後分布$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x})$は確率密度関数であることから、

ある定数Cにより$\int_0^\infty C\theta^4\exp(-2\theta)d\theta = 1$を満たす。

$$\int_0^\infty C\theta^4\exp(-2\theta)d\theta = \frac{\Gamma(5)}{2^5}C = \frac{3}{4}C = 1$$

より、$C = 4/3$であるから、求める事後分布$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x})$は、$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x}) = \frac{4}{3}\theta^4\exp(-2\theta)$

（２）

今年度（第４年度）の発生保険金X_4の期待値は、

$$E(X_4) = E(E(X_4\,|\,\Theta)) = E\left(\frac{1}{\Theta}\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{4}{3}\theta^3\exp(-2\theta)d\theta = \frac{4}{3}\cdot\frac{\Gamma(4)}{2^4} = 0.5$$

また、X_4が、X_4の期待値である 0.5 を超える確率の期待値は、

$$E(P(X_4 > 0.5\,|\,\Theta))$$

$$= \int_0^\infty\left(\int_{0.5}^\infty \theta\exp(-\theta x)dx\right)\frac{4}{3}\theta^4\exp(-2\theta)d\theta = \int_0^\infty\left[-\exp(-\theta x)\right]_{0.5}^\infty\frac{4}{3}\theta^4\exp(-2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^\infty \exp(-0.5\theta)\cdot\frac{4}{3}\theta^4\exp(-2\theta)d\theta = \int_0^\infty\frac{4}{3}\theta^4\exp(-2.5\theta)d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{\Gamma(5)}{2.5^5} = \frac{2^{10}}{5^5} = 33\%$$

Ⅲ.

（１）①（**Q**）　②（**H**）（①、②は完答）（２）③（**A**）　④（**H**）　⑤（**B**）　⑥（**B**）

［（１）１点、（２）③～⑤各１点、⑥２点］

（１）

$$E\left(\hat{b}_k\right)=E\left(E\left(\hat{b}_k \mid B_k\right)\right)=E\left(E\left(\left.\frac{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}\right|B_k\right)\right)=E\left(\frac{E\left(\left.\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}\right|B_k\right)}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}\right)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{N-k}E\left(C_{i,k+1}\middle|B_k\right)}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}\right)\cdots(a)$$

であり、前提条件１から $\sum_{i=1}^{N-k}E\left(C_{i,k+1}\mid B_k\right)=\sum_{i=1}^{N-k}b_kC_{i,k}$ であるから、

$$(a)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{N-k}\boxed{b_kC_{i,k}}}{\sum_{i=1}^{N-k}\boxed{C_{i,k}}}\right)=E\left(b_k\right)=b_k$$ 　となって不偏性を確認することができる。

（２）

前提条件１から $E\left(\left.\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right|B_k\right)=b_k$ であること、（１）から $E\left(\hat{b}_k \mid B_k\right)=b_k$ であることより、

$$E\left(\left.\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}-\hat{b}_k\right|B_k\right)=b_k-b_k=\boxed{0}$$

である。また、前提条件２から $V\left(\left.\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right|B_k\right)=\frac{\sigma_k^2}{C_{i,k}}$ であることより、

$$\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}V\left(\left.\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right|B_k\right)=\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\frac{\sigma_k^2}{C_{i,k}}=\sum_{i=1}^{N-k}1=\boxed{N-k}$$

である。次に（１）から $\hat{b}_k=\frac{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}$ であることより、

$$\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}V\left(\hat{b}_k\middle|B_k\right)=\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\frac{V\left(\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}\middle|B_k\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\right)^2}\cdots(b)$$ となる。

ここで、前提条件３から、異なる事故年度については、どの経過年数をとっても累計支払保険金は独立であることから、$V\left(\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}\middle|B_k\right)=\sum_{i=1}^{N-k}V\left(C_{i,k+1}\middle|B_k\right)$ が成り立つ。さらに、前提条件２から $V\left(C_{i,k+1}\middle|B_k\right)=\sigma_k^2C_{i,k}$ であることより、$(b)=\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\frac{\sum_{i=1}^{N-k}\sigma_k^2C_{i,k}}{\left(\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\right)^2}=\boxed{\quad 1 \quad}$

である。続いて、（１）から $\hat{b}_k=\frac{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}$ であることより、

$$\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}Cov\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}},\hat{b}_k\middle|B_k\right)=\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\frac{Cov\left(C_{i,k+1},\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}\middle|B_k\right)}{C_{i,k}\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}$$

$$=\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}\left\{\frac{Cov\left(C_{i,k+1},\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}\middle|B_k\right)}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}\right\}\cdots(c)$$

となる。ここで、前提条件３から、$Cov\left(C_{i,k+1},\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}\middle|B_k\right)=Cov\left(C_{i,k+1},C_{i,k+1}\middle|B_k\right)=V\left(C_{i,k+1}\middle|B_k\right)$ が成り立つ。さらに、前提条件２から、$(c)=\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}\left\{\frac{V\left(C_{i,k+1}\middle|B_k\right)}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}\right\}=\frac{1}{\sigma_k^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-k}\left\{\frac{\sigma_k^2C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}\right\}=\boxed{\quad 1 \quad}$

である。以上から、$E\left(\hat{\sigma}_k^2\right)=E\left(E\left(\hat{\sigma}_k^2\mid B_k\right)\right)=E\left(\frac{(N-k)\sigma_k^2+\sigma_k^2-2\sigma_k^2}{N-k-1}\right)=\sigma_k^2$ となって不偏性を確認することができる。

Ⅳ.

（１）①（Ｈ）②（Ｃ）③（Ｇ）（２）④（Ｂ）⑤（Ｈ）　　　［（１）各１点、（２）④１点　⑤３点］

（１）

テキスト 7-18、7-19 のとおり

（２）

リスクＸの平均 μ_x と分散 $\sigma_x{}^2$ は次のとおりとなる。

$$\mu_x = 0\times 0.5 + 90\times 0.3 + 150\times 0.2 = 57$$
$$\sigma_x^2 = (0-57)^2\times 0.5 + (90-57)^2\times 0.3 + (150-57)^2\times 0.2 = 3{,}681$$

また、各効用関数における $r(w-\mu_x)$ は、テキスト 7-20 より次のとおりとなる。

ア．$r(w-\mu_x) = 0.00060$

イ．$r(w-\mu_x) = \dfrac{1}{w-\mu_x} = \dfrac{1}{1{,}000-57} = 0.00106$

ウ．$r(w-\mu_x) = \dfrac{1-0.6}{w-\mu_x} = \dfrac{0.4}{1{,}000-57} = 0.00042$

以上より各効用関数における P_o の値は次のとおりとなる。

ア．　$P_o \cong \mu_x + \dfrac{\sigma_x^2}{2} r(w-\mu_x) = 57 + \dfrac{3{,}681}{2}\times 0.00060 = 58.1$

イ．　$P_o \cong \mu_x + \dfrac{\sigma_x^2}{2} r(w-\mu_x) = 57 + \dfrac{3{,}681}{2}\times 0.00106 = 59.0$

ウ．　$P_o \cong \mu_x + \dfrac{\sigma_x^2}{2} r(w-\mu_x) = 57 + \dfrac{3{,}681}{2}\times 0.00042 = 57.8$

＜参考＞　近似計算を使わない場合

ア．　① $E(u(w-X)) = 0.5\times e^{-0.6} + 0.3\times e^{-0.546} + 0.2\times e^{-0.51}$

　　② $u(w-P_0) = e^{-0.6+0.0006P_0}$　　　⇒これを解くと $P_0 = 58.108\cdots$

イ．　① $E(u(w-X)) = 0.5\times\log 1000 + 0.3\times\log 910 + 0.2\times\log 850$

　　② $u(w-P_0) = \log(1000-P_0)$　　　⇒これを解くと $P_0 = 58.985\cdots$

ウ．　① $E(u(w-X)) = 0.5\times 1000^{0.6} + 0.3\times 910^{0.6} + 0.2\times 850^{0.6}$

　　② $u(w-P_0) = (1000-P_0)^{0.6}$　　　⇒これを解くと $P_0 = 57.790\cdots$

Ⅴ.

<u>（１）①（Ｋ）　②（Ｆ）（２）③（Ｎ）　④（Ａ）　⑤（Ｐ）（③～⑤は完答、③と④の解答は順不同）</u>

<u>（３）⑥（Ａ）　⑦（Ｉ）　⑧（Ｓ）（⑥～⑧は完答、⑦と⑧の解答は順不同）</u>

［（１）①１点、②１点、（２）２点、（３）３点］

（１）

期首から微小時間 Δt 経過後に支払額 x の事故が 1 件発生し、破産していない状態を考える。このとき、期間 $\left[0,\Delta t\right]$ において事故が発生する確率は $\lambda\Delta t$ である。また、その後破産が発生し、かつ破産直後の欠損額が y 以上となる確率は $G(u+c\Delta t-x,y)$ である。

（２）

微小時間 Δt 経過後の状態に着目し、「事故が発生していない状態」「事故が 1 件発生しかつ破産していない状態」「事故が 1 件発生しかつ破産している状態」の 3 つの状態に場合分けすることで、$G(u,y)$ を下式のとおり表すことが出来る。

$$\begin{aligned} G(u,y) &= (1-\lambda\Delta t)\times G(u+c\Delta t,y) \\ &+\lambda\Delta t\times\int_0^{u+c\Delta t} G(u+c\Delta t-x,y)dF(x) \\ &+\lambda\Delta t\times\int_{u+c\Delta t+y}^{\infty} dF(x) \end{aligned}$$

（３）

（２）の式を整理し、$\Delta t\to 0$ とすることで、下式を得ることが出来る。

$$\frac{\partial}{\partial u}G(u,y)=\frac{\lambda}{c}\left\{G(u,y)-\int_0^u G(u-x,y)dF(x)-\int_{u+y}^{\infty}dF(x)\right\}$$

また、この式を u について 0～∞ の範囲で積分することで、$G(0,y)=\dfrac{\lambda}{c}\displaystyle\int_y^{\infty}\{1-F(u)\}du$ の式を得ることが出来る。

VI.

（1）**（C）**　（2）**（F）**　　　［（1）３点、（2）３点］

（1）

クレーム 1 件あたりのクレーム額が平均 μ （億円）の指数分布 $f(x)=\frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)$ に従うとする。クレーム額が 2 億円以上になるという条件の下でクレーム額が従う分布は

$$g(x)=\frac{1}{\int_2^\infty \frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{y}{\mu}\right)dy}\frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)=\frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{x-2}{\mu}\right)$$

である。尤度関数 $L(\mu)=\prod_{i=1}^n g(x_i)$ の対数をとって

$$\log L(\mu)=\log\prod_{i=1}^n g(x_i)=\log\prod_{i=1}^n \frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{x_i-2}{\mu}\right)=-n\log\mu+\frac{2n}{\mu}-\frac{n\bar{x}}{\mu}$$

ここで、$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^6 x_i=\frac{1}{6}(2.1+2.2+2.2+2.2+3+3.3)=2.5$ である。

$\frac{d}{d\mu}\log L(\hat{\mu})=-\frac{n}{\hat{\mu}}-\frac{2n}{\hat{\mu}^2}+\frac{n\bar{x}}{\hat{\mu}^2}=0$ 　より最尤推定値は　$\hat{\mu}=\bar{x}-2=0.5$ となる。

従って、クレーム額が従う分布は　$f(x)=2\exp(-2x)$　となる。

エクセスポイント 0.50 億円、カバーリミット無制限の超過損害額再保険の再保険回収額の期待値は

$$100\int_{0.5}^\infty (x-0.5)f(x)dx=100\int_{0.5}^\infty (x-0.5)2\exp(-2x)dx$$
$$=100\left[-(x-0.5)\exp(-2x)-0.5\exp(-2x)\right]_{0.5}^\infty=50e^{-1}=18.4$$

となる。

（2）

比例再保険からの期待回収額 A_1 は $A_1=0.2\times100\times0.5=10$ （億円）である。

比例再保険を手配した後の保有部分 $Y=0.8X$ が従う確率密度分布を $h(y)$ とすると、$x=1.25y$ より、

$h(y)=f(x=1.25y)\left|\frac{dx}{dy}\right|=2\exp(-2\times1.25y)\times1.25=2.5\exp(-2.5y)$ となる。保有部分 Y についてエクセスポイント α 億円、カバーリミット 0.70 億円の超過損害額再保険からの期待回収額 A_2 は、

$$\begin{aligned}A_2&=100\left\{\int_\alpha^{\alpha+0.7}(y-\alpha)h(y)dy+\int_{\alpha+0.7}^\infty 0.7h(y)dy\right\}\\&=100\left\{\int_\alpha^{\alpha+0.7}(y-\alpha)2.5\exp(-2.5y)dy+\int_{\alpha+0.7}^\infty 0.7\times2.5\exp(-2.5y)dy\right\}\\&=100\left\{\left[-(y-\alpha)\exp(-2.5y)-0.4\exp(-2.5y)\right]_\alpha^{\alpha+0.7}+\left[-0.7\exp(-2.5y)\right]_{\alpha+0.7}^\infty\right\}\\&=100\{-0.7\exp(-2.5\alpha-1.75)-0.4\exp(-2.5\alpha-1.75)+0.4\exp(-2.5\alpha)+0.7\exp(-2.5\alpha-1.75)\}\\&=40\exp(-2.5\alpha)\{1-\exp(-1.75)\}\end{aligned}$$

$A_1+A_2=18.4$ より $10+40\exp(-2.5\alpha)\{1-\exp(-1.75)\}=18.4$

従って、$\exp(-2.5\alpha)=\dfrac{18.4-10}{40\{1-\exp(-1.75)\}}=0.254\ldots$

ここで、$\exp(-2.5\times 0.50)=\exp(-1.25)=0.287\ldots$、

$\exp(-2.5\times 0.55)=\exp(-1.375)=0.253\ldots$、

$\exp(-2.5\times 0.60)=\exp(-1.50)=0.223\ldots$

であるから、α に最も近い数値は 0.55（億円）となる。

Ⅶ.

<u>（１）①（Ｆ）②（Ｃ）③（Ｄ）（①～③は完答）　（２）④（Ｃ）⑤（Ｇ）（④、⑤は完答）</u>

<u>（３）⑥（Ｅ）⑦（Ｇ）（⑥、⑦は完答）</u>　［（１）２点、（２）２点、（３）２点］

（１）

超過分布関数の定義より、$F_u(x)=P\left(X-u\le x\mid X>u\right)=\dfrac{F(x+u)-F(u)}{1-F(u)}$ である。

ここで、$F(s)=G_{\xi,\beta}(s)=1-\left(1+\dfrac{\xi s}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$ より、

$$F_u(x)=\frac{-\left(1+\dfrac{\xi x+\xi u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}+\left(1+\dfrac{\xi u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}{\left(1+\dfrac{\xi u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}=1-\left(1+\frac{\xi x}{\beta+\xi u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

となる。すなわち、$G_{\xi,\beta}$ に対する閾値 u の超過分布は、一般化パレート分布 $G_{\xi,\beta+\xi u}$ となる。

（２）

平均超過関数の定義より、$e(u)=E\left(X-u\mid X>u\right)=\dfrac{\int_u^\infty (s-u)f(s)ds}{1-F(u)}=\dfrac{\int_u^\infty (1-F(s))ds}{1-F(u)}$ である。

$$e(u)=\frac{1}{\left(1+\dfrac{\xi u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}\int_u^\infty\left(1+\frac{\xi s}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}ds=\frac{1}{\left(1+\dfrac{\xi u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}\left[\frac{\beta}{\xi}\frac{1}{-\dfrac{1}{\xi}+1}\left(1+\frac{\xi s}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}+1}\right]_u^\infty$$

$$=\frac{1}{\left(1+\dfrac{\xi u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}\frac{\beta}{\xi}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\left(1+\frac{\xi u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}+1}=\frac{\beta+\xi u}{1-\xi}$$

となる。

なお、$e(u)$ は（１）で求めた超過分布 $G_{\xi,\beta+\xi u}$ の期待値に等しいことから

$$e(u)=\int_0^\infty\left(1-G_{\xi,\beta+\xi u}(s)\right)ds=\int_0^\infty\left(1+\frac{\xi s}{\beta+\xi u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}ds=\left[\frac{\beta+\xi u}{\xi}\frac{1}{-\frac{1}{\xi}+1}\left(1+\frac{\xi s}{\beta+\xi u}\right)^{-\frac{1}{\xi}+1}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{\beta+\xi u}{\xi}\frac{\xi}{1-\xi}=\frac{\beta+\xi u}{1-\xi}$$

と求めることもできる。

（３）

Y の閾値 u の超過分布関数が一般化パレート分布 $G_{\xi,\beta}(y)$ に従うとき、（１）、（２）の結果より、Y の平均超過関数 $e(s)$ $(s\geq u)$ は $G_{\xi,\beta+\xi(s-u)}$ の期待値に等しく、

$$e(s)=\frac{\beta+\xi(s-u)}{1-\xi}$$ となる。

ここで、$VaR_\alpha(Y)=q_\alpha$ として、 $e(q_\alpha)=TVaR_\alpha(Y)-q_\alpha$ を用いて、

$$TVaR_\alpha(Y)=e(q_\alpha)+q_\alpha=\frac{\beta+\xi(q_\alpha-u)}{1-\xi}+q_\alpha=\frac{q_\alpha+\beta-\xi u}{1-\xi}$$

となる。

なお、$e(VaR_\alpha(Y))=TVaR_\alpha(Y)-VaR_\alpha(Y)$ が成立することは平均超過関数、$TVaR$、VaR の定義より示すことができる。

Ⅷ.

（1）**（G）**　（2）**（E）**　　　［（1）３点、（2）３点］

（1）

イ　同文は、損害率法に関する説明（テキスト 1-28～29）。

ロ　同文は、経験料率算定法と遡及料率算定法の違いに関する説明（テキスト 1-27）。

ハ　正しい（テキスト 7-7～14）。

（2）

ニ　正しい（テキスト 10-48～52）。

ホ　同文は、パーセンタイル原理に関する説明（テキスト 7-3）。

へ　誤：X_1, X_2 の大小と Y_1, Y_2 の大小が一致しない確率から、X_1, X_2 の大小と Y_1, Y_2 の大小が一致する確率を引いた値である

正：X_1, X_2 の大小と Y_1, Y_2 の大小が一致する確率から、X_1, X_2 の大小と Y_1, Y_2 の大小が一致しない確率を引いた値である（テキスト 10-27）