数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（１）1つのサイコロを振る試行を４回繰り返すこととする。1回目と４回目の試行でともに1の目が出る事象をA、1回目と２回目の試行でともに3以下の目が出る事象をB、3回目と４回目の試行でともに奇数の目が出る事象をCとする。このとき、事象A、B、Cのいずれかが発生する確率は$\boxed{}$である。

（A）$\dfrac{2}{3}$　（B）$\dfrac{4}{9}$　（C）$\dfrac{5}{9}$　（D）$\dfrac{5}{16}$

（E）$\dfrac{7}{16}$　（F）$\dfrac{29}{72}$　（G）$\dfrac{31}{72}$　（H）$\dfrac{37}{108}$

（２）次の確率分布のうち、再生性を持たないものは$\boxed{}$である。（当てはまるものをすべてマークせよ。）

ここで、ある種類の確率分布が再生性を持つとは、この種類の確率分布に従う２つの独立な確率変数の和が、再び同じ種類の確率分布に従うことを意味するものとする。

（A）二項分布　（B）ポアソン分布　（C）負の二項分布　（D）幾何分布

（E）正規分布　（F）指数分布　（G）ガンマ分布　（H）χ^2分布

（3）あるゲームを 1 回行ったときに勝つ確率が 0.28 のプレイヤーがいる。このゲームは 1 回ごとに独立であるとする。

a．このゲームを 500 回行う場合、中心極限定理を用いると、このプレイヤーが 150 回以上勝つ確率は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

b．$\boxed{\quad ② \quad}$ 回以上ゲームをした場合、そのうちの勝ち数が 3 割以上となる確率は 0.2 以下となる。

（①は最も近い数値、②は条件を満たす最小の自然数を選択すること）

［①の選択肢］

（A） 0.16　　（B） 0.21　　（C） 0.23　　（D） 0.29

（E） 0.31　　（F） 0.38　　（G） 0.40　　（H） 0.43

［②の選択肢］

（A） 322　　（B） 327　　（C） 332　　（D） 337

（E） 342　　（F） 347　　（G） 352　　（H） 357

（4）確率変数 X, Y, Z は互いに独立で、すべて標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、確率変数

$U = \dfrac{Z^2}{4\left(X^2 + Y^2\right)}$ の確率密度関数は、 $f(u) = \begin{cases} \boxed{\qquad\qquad} & (u > 0) \\ 0 & (u \leq 0) \end{cases}$ である。

（A） $\dfrac{2}{(2u+1)^2}$　　（B） ue^{-u}　　（C） $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} u^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \dfrac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$　　（D） $\dfrac{2}{\pi\left(1+u^2\right)}$

（E） $u^{-\frac{1}{2}} (4u+1)^{-\frac{3}{2}}$　　（F） $\dfrac{1}{(1+u)^2}$　　（G） $\dfrac{1}{2} u^2 e^{-u}$　　（H） $\dfrac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}$

（5）1からn $(n \geq 4)$ までの数字が記入されたn個の球が箱に入っている。この箱から1個の球を取り出し、元に戻す試行を5回繰り返したところ、1度だけ同じ数字が記入された球が取り出された。このとき、nの最尤推定値は$\boxed{}$である。なお、各球を取り出す確率は等しいものとする。

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8

（E）9　（F）10　（G）11　（H）12

（6）ある電球の寿命は指数分布に従うことが分かっている。いま電球の寿命の平均値を信頼係数95％で区間推定するために、12個の電球についてX時間観測を行ったところ、観測終了時点までに寿命を迎えた10個の電球の寿命は次のとおりであった。

（単位：時間）

132,　140,　197,　209,　372,　424,　464,　494,　676,　762

このときの区間推定の上限と下限の差が867時間であったとき、Xに最も近い数値は$\boxed{}$時間である。

（A）795　（B）955　（C）1,099　（D）1,241

（E）1,330　（F）1,533　（G）1,593　（H）1,658

（7） A 工場においてある製品を作るためにかかる時間を計ったところ、標本15個に対して平均30時間、標準偏差は3時間であった。同じ製品を作るためにかかる時間を B 工場においても計ったところ、標本10個に対して平均 $\bar{x}$ 時間、標準偏差は1時間であった。
この製品を作るためにかかる時間が、A 工場、B 工場ともに同じ標準偏差の正規分布に従うものとして、A 工場と B 工場とでその平均時間に違いがあるかどうかを有意水準5％で検定を行ったところ、「A 工場と B 工場の平均時間には違いがない」という結果が得られた。このとき、B 工場における平均 $\bar{x}$ 時間の取りうる値のうち、下限に最も近い数値は$\boxed{\quad ① \quad}$時間であり、上限に最も近い数値は$\boxed{\quad ② \quad}$時間である。

（A） 24.8058　（B） 27.8795　（C） 27.9289　（D） 27.9909　（E） 28.2432

（F） 31.7568　（G） 32.0091　（H） 32.0711　（I） 32.1205　（J） 35.1942

（8） 9枚のカードに、$1, 2, 3, \cdots, 9$ の数字がそれぞれ1つ記入されている。このカードの中から無作為に2枚のカードを同時に抜き出す。この2枚のカードに記入された数字の和の平均に最も近い数値は$\boxed{\quad ① \quad}$、分散に最も近い数値は$\boxed{\quad ② \quad}$である。

（A） 9.0　（B） 10.0　（C） 10.4　（D） 11.0　（E） 11.7

（F） 12.1　（G） 13.6　（H） 15.0　（I） 19.2　（J） 23.3

（９）以下のデータはある町における５日間の各日の最高気温、平均湿度、熱中症者数である。

	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目
最高気温（℃）	32.0	32.5	31.5	35.0	30.0
平均湿度（%）	50	65	50	70	75
熱中症者数（人）	3	6	4	10	7

各日の最高気温を表すパラメータを x、平均湿度を表すパラメータを y、熱中症者数を表すパラメータを z とした時、z を x に回帰したモデル $z=\alpha_1+\beta_1 x$、z を y に回帰したモデル $z=\alpha_2+\beta_2 y$、を考える。この時、z と x の相関係数に最も近い数値は［　①　］であり、z と y の相関係数に最も近い数値は［　②　］である。

（Ａ）0.0114　（Ｂ）0.0330　（Ｃ）0.0565　（Ｄ）0.0655　（Ｅ）0.1378

（Ｆ）0.1817　（Ｇ）0.3713　（Ｈ）0.5507　（Ｉ）0.7301　（Ｊ）0.8327

（１０）ある粒子は、数直線上の点1,2,3,4 のいずれかの位置に置かれた場合、その後、時間の経過とともに、以下の移動法則に従い、数直線上の点0,1,2,3,4,5 を移動することが分かっている。

［移動法則］ある時点で点 i $(i=1,2,3,4)$ に位置していた場合に、次の1秒後に点 $i-1$ または $i+1$ に、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動し、点0 または点5 に達すると、そこで移動を停止する。

この粒子がある時点で点1,2,3,4 のいずれかに等しい確率で置かれたとして、4 秒後に点0 に位置していたとき、最初に置かれた位置が点3 であった確率に最も近い数値は［　　］である。

（Ａ）0.0571　（Ｂ）0.0933　（Ｃ）0.1053　（Ｄ）0.1250

（Ｅ）0.1628　（Ｆ）0.2188　（Ｇ）0.2500　（Ｈ）0.6250

（１１） $AR(2)$ モデル $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ の平均 μ 、分散 γ_0 および自己共分散 γ_1, γ_2 が下記のとおり与えられているとき、パラメータ ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 および ε_t の分散 σ^2 に最も近い数値はそれぞれ $\phi_0 =$ ① 、$\phi_1 =$ ② 、$\phi_2 =$ ③ 、$\sigma^2 =$ ④ となる。

$\mu = 20.0$,　$\gamma_0 = 0.7$,　$\gamma_1 = 0.5$,　$\gamma_2 = 0.4$

［①の選択肢］

（A） 3.75　（B） 4.00　（C） 4.14　（D） 4.33

（E） 4.83　（F） 5.00　（G） 5.16　（H） 5.45

［②、③の選択肢］

（A） 0.103　（B） 0.125　（C） 0.175　（D） 0.276　（E） 0.333

（F） 0.417　（G） 0.500　（H） 0.517　（I） 0.625　（J） 0.655

［④の選択肢］

（A） 0.331　（B） 0.338　（C） 0.345　（D） 0.351

（E） 0.358　（F） 0.365　（G） 0.372　（H） 0.379

（１２）$[0,1]$上の一様分布に従う乱数U_1,U_2,U_3,U_4,U_5,U_6を生成し、標本 $g(U_i)=\exp(U_i)$ を下表のとおり得た。

i	1	2	3	4	5	6	1 から 6 までの平均
U_i	0.2801	0.4334	0.6725	0.6701	0.2782	0.1208	－
$\exp(U_i)$	1.3233	1.5425	1.9591	1.9544	1.3208	1.1284	1.5381

このとき、標本平均の分散に最も近い数値は$\boxed{\quad ① \quad}$となる。

次に、負の相関法の効果を検証するために、上記の乱数のうち、U_1,U_2,U_3 までと $1-U_1,\ 1-U_2,\ 1-U_3$ までを使用して下表を得た。

i	1	2	3	1 から 3 までの平均
U_i	0.2801	0.4334	0.6725	－
$1-U_i$	0.7199	0.5666	0.3275	－
$\exp(U_i)$	1.3233	1.5425	1.9591	1.6083
$\exp(1-U_i)$	2.0542	1.7623	1.3875	1.7347

このとき、負の相関法による平均の分散に最も近い数値は$\boxed{\quad ② \quad}$となり、標本平均の分散よりも減少していることがわかる。

［①の選択肢］

（A）0.01224　（B）0.01427　（C）0.01699　（D）0.02039

（E）0.02447　（F）0.02923　（G）0.03467　（H）0.04079

［②の選択肢］

（A）0.00250　（B）0.00300　（C）0.00388　（D）0.00507

（E）0.00661　（F）0.00862　（G）0.01016　（H）0.01208

問題２． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

ある池には n 匹の魚がいる。その中の n_1 匹 $(n_1 \geq 3)$ は赤色であり、残りの $n_2 (= n - n_1)$ 匹 $(n_2 \geq 3)$ は黒色であるとする。この n 匹の中から非復元抽出により無作為に r 匹 $(3 \leq r \leq n_2)$ すくい上げる試行を行うことにする。なお、赤色のそれぞれの魚を $a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}$、黒色のそれぞれの魚を $b_1, b_2, \cdots, b_{n_2}$ と表すこととする。

（１）この試行における標本点 w は $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}, b_1, b_2, \cdots, b_{n_2}\}$ から重複せずに r 匹を選んで並べた順列によって表すことができる。ここで、w を表す順列の第 i 番目 $(1 \leq i \leq r)$ が赤色であれば $X_i = 1$、黒色であれば $X_i = 0$ と確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ を定義する。

このとき、X_i, X_j の結合確率分布は、

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \boxed{\quad ① \quad} \qquad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r, i \neq j)$$

$$P(X_i = 1, X_j = 0) = P(X_i = 0, X_j = 1) = \boxed{\quad ② \quad} \qquad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r, i \neq j)$$

$$P(X_i = 0, X_j = 0) = \boxed{\quad ③ \quad} \qquad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r, i \neq j)$$

となる。

また、$X_i = 0$、$X_i = 1$ となる確率 $P(X_i = 0)$、$P(X_i = 1)$ は、

$$P(X_i = 0) = \boxed{\quad ④ \quad} \qquad (1 \leq i \leq r)$$

$$P(X_i = 1) = \boxed{\quad ⑤ \quad} \qquad (1 \leq i \leq r)$$

となる。

（２）（１）で定義した確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ について、$Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$ と確率変数 Y を定義する。

（１）の結果を用いると期待値 $E(Y)$ は、

$$E(Y) = \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

となる。

また、X_i の分散 $V(X_i)$ および X_i, X_j の共分散 $Cov(X_i, X_j)$ は、

$$V(X_i) = \boxed{\quad ⑦ \quad} \qquad (1 \le i \le r)$$

$$Cov(X_i, X_j) = \boxed{\quad ⑧ \quad} \qquad (1 \le i \le r, 1 \le j \le r, i \ne j)$$

であるため、

$$V(Y) = \boxed{\quad ⑨ \quad} \times \boxed{\quad ⑩ \quad}$$

となる。(<u>⑨と⑩の解答は順不同</u>)

（３）（２）で定義した確率変数 Y について、$Y = k$ となる確率 $P(Y = k)$ は、

$$P(Y = k) = \frac{\boxed{\quad ⑪ \quad} \times \boxed{\quad ⑫ \quad}}{\boxed{\quad ⑬ \quad}} \qquad (0 \le k \le \min(n_1, r))$$

となる。(<u>⑪と⑫の解答は順不同</u>)

ここで、$n_1 : n_2$ の比は一定のまま n を十分大きくすると、確率 $P(Y = k)$ および分散 $V(Y)$ は、

次の式で近似される。(<u>⑮⑯と⑰⑱の解答のペアは順不同</u>)

$$P(Y = k) \approx \boxed{\quad ⑭ \quad} \times \left\{ \boxed{\quad ⑮ \quad} \right\}^{\boxed{⑯}} \times \left\{ \boxed{\quad ⑰ \quad} \right\}^{\boxed{⑱}} \qquad (0 \le k \le r)$$

$$V(Y) \approx \boxed{\quad ⑲ \quad}$$

[①～⑩、⑮、⑰、⑲の選択肢]

（A） $\dfrac{rn_1}{n-1}$	（B） $\dfrac{rn_2}{n-1}$	（C） $\dfrac{n_1 n_2}{n-1}$	（D） $\dfrac{rn_1+n_2-r}{n-1}$
（E） $\dfrac{n-r}{n-1}$	（F） $\dfrac{n+r-2}{n-1}$	（G） $\dfrac{n^2-rn_2-n_1}{n-1}$	（H） $\dfrac{2n-r-1}{2(n-1)}$
（I） $\dfrac{n_1}{n}$	（J） $\dfrac{n_2}{n}$	（K） $\dfrac{rn_1}{n}$	（L） $\dfrac{rn_2}{n}$
（M） $\dfrac{-n_1}{n(n-1)}$	（N） $\dfrac{-n_2}{n(n-1)}$	（O） $\dfrac{n_1(n_1-1)}{n(n-1)}$	（P） $\dfrac{n_2(n_2-1)}{n(n-1)}$
（Q） $\dfrac{n_1 n_2}{n(n-1)}$	（R） $\dfrac{-n_1 n_2}{n(n-1)}$	（S） $\dfrac{rn_1(rn_1+n_2)}{n(n-1)}$	（T） $\dfrac{rn_1}{n^2}$
（U） $\dfrac{n_1 n_2}{n^2}$	（V） $\dfrac{rn_1 n_2}{n^2}$	（W） $\dfrac{n_1(n-r^2 n_1)}{n^2}$	（X） $\dfrac{n_1 n_2}{n^2(n-1)}$
（Y） $\dfrac{-n_1 n_2}{n^2(n-1)}$	（Z） $\dfrac{rn_1 n_2}{n^2(n-1)}$		

[⑪～⑭の選択肢]

（A） $\dbinom{n}{n_1}$	（B） $\dbinom{n}{r}$	（C） $\dbinom{n}{k}$	（D） $\dbinom{n}{r-k}$
（E） $\dbinom{n}{r-k+1}$	（F） $\dbinom{n_1}{k}$	（G） $\dbinom{n_1+1}{k}$	（H） $\dbinom{n_1+1}{k+1}$
（I） $\dbinom{n_1+r}{k}$	（J） $\dbinom{n_2}{r}$	（K） $\dbinom{n_2}{k}$	（L） $\dbinom{n_2+1}{k}$
（M） $\dbinom{n_2}{r-k}$	（N） $\dbinom{r}{k}$	（O） $\dbinom{r+1}{k}$	（P） $\dbinom{r+1}{k+1}$

［⑯、⑱の選択肢］

（Ａ）$\dfrac{k}{2}$　（Ｂ）k　（Ｃ）$\dfrac{r-k-1}{2}$　（Ｄ）$r-k-1$

（Ｅ）$\dfrac{r-k}{2}$　（Ｆ）$r-k$　（Ｇ）$\dfrac{r-k+1}{2}$　（Ｈ）$r-k+1$

（Ｉ）$\dfrac{r-k}{2r}$　（Ｊ）$\dfrac{r-k}{r}$

問題３． 不良率が $p(0<p<1)$ である母集団から大きさ $n(n\geq 2)$ の標本を取り出したところ、k 個 $(k\geq 1)$ の不良品が入っていたという。ただし、$n>k$ とする。n が小さいときの不良率 p を信頼係数 $1-\varepsilon$ で精密法により区間推定する方法について、次の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

ここで、不良率とは、良品および不良品よりなる無限母集団からの標本が不良品である確率のことをいう。（２０点）

n 個の標本中の i 番目 $(1\leq i\leq n)$ の標本が不良品のときに 1、良品のときに 0 となる確率変数を X_i とおくと、不良率 p の最尤推定量 $\hat{p}$ は、$\hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\boxed{①}$ である。

ところで、n 個の標本中の不良品の個数を表す確率変数 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ は二項分布に従うから

$$P(\hat{p}=x)=\binom{n}{\boxed{②}}\cdot p^{\boxed{②}}\cdot(1-p)^{\boxed{③}}$$

となる。したがって、信頼係数 $1-\varepsilon$ の p の信頼区間を求めるには、$b(i;n,p)=\dbinom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$ とおくと

$$P\{\hat{p}\leq h_1(p)\}=P\{k\leq nh_1(p)\}=\sum_{i=0}^{nh_1(p)}b(i;n,p)=\frac{\varepsilon}{2}$$

$$P\{\hat{p}\geq h_2(p)\}=P\{k\geq nh_2(p)\}=\sum_{i=nh_2(p)}^{n}b(i;n,p)=\frac{\varepsilon}{2}$$

となる $h_1(p),\ h_2(p)$ を求めなければならない。

ここで、a，b が正の整数のとき、ベータ関数 $B(a,b)=\dfrac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$ であることに注意して

$\dfrac{1}{B(k+1,n-k)}\displaystyle\int_0^{1-p}t^{n-k-1}(1-t)^k\,dt$ の部分積分を考えると

$$\frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p}t^{n-k-1}(1-t)^k\,dt$$

$$=\binom{\boxed{④}}{\boxed{⑤}}\cdot p^{\boxed{⑤}}\cdot(1-p)^{\boxed{⑥}}+\frac{1}{\boxed{⑦}}\int_0^{1-p}t^{n-k}(1-t)^{k-1}\,dt$$

となるから、これを帰納的に用いて、

$$\sum_{i=0}^{k} b(i;n,p) = \frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p} t^{n-k-1}(1-t)^k\,dt$$

と表せる。ここで右辺において$t=\dfrac{\phi_2}{\phi_1 F+\phi_2}$, $\phi_1=2(k+1)$, $\phi_2=2(n-k)$とおけば

$$\sum_{i=0}^{k} b(i;n,p) = \int_{\boxed{\text{⑧}}}^{\infty} \frac{1}{B\left(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2}\right)}\cdot\left\{\boxed{\text{⑨}}\right\}^{\boxed{\text{⑩}}}\cdot F^{\boxed{\text{⑪}}}\cdot\left\{1+\boxed{\text{⑨}}\times F\right\}^{-(\boxed{\text{⑫}})} dF$$

を得る。右辺の被積分関数は自由度(ϕ_1,ϕ_2)のF分布の確率密度関数である。

したがって、自由度(ϕ_1,ϕ_2)のF分布に従う確率変数を$F_{\phi_2}^{\phi_1}$とおくと

$$\sum_{i=0}^{k} b(i;n,p) = P\left(F_{n_2'}^{n_1'} \geq \frac{\boxed{\text{⑬}}}{\boxed{\text{⑭}}}\right)$$

ここで、$n_1'=2(k+1)$, $n_2'=2(n-k)$である。また、

$$\sum_{i=k+1}^{n} b(i;n,p) = P\left(F_{n_2'}^{n_1'} < \frac{\boxed{\text{⑬}}}{\boxed{\text{⑭}}}\right)$$

であり、$k+1$をkとおき直すと

$$\sum_{i=k}^{n} b(i;n,p) = P\left(F_{n_1}^{n_2} < \frac{\boxed{\text{⑮}}}{\boxed{\text{⑯}}}\right) = P\left(F_{n_2}^{n_1} \geq \frac{\boxed{\text{⑰}}}{\boxed{\text{⑱}}}\right)$$

ここで、$n_1=2(n-k+1)$, $n_2=2k$である。これより$h_1(p)$, $h_2(p)$について

$$\frac{\boxed{\text{⑬}}}{\boxed{\text{⑭}}} = F_{n_2'}^{n_1'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad P(k\leq nh_1(p)) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\boxed{\text{⑰}}}{\boxed{\text{⑱}}} = F_{n_2}^{n_1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad P(k\geq nh_2(p)) = \frac{\varepsilon}{2}$$

を得る。したがって、$h_1(p)<\hat{p}<h_2(p)$より、pの信頼区間として

$$\frac{\boxed{\text{⑲}}}{\boxed{\text{⑳}}} < p < \frac{\boxed{\text{㉑}}}{\boxed{\text{㉒}}}$$

を得る。

この結果を用いて、4 個の標本のうち1個が不良品だったとすると、信頼係数95％のもとでpの信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\text{㉓}}$ であり、上限に最も近い数値は $\boxed{\text{㉔}}$ である。

［①の選択肢］

（Ａ） $\dfrac{1}{n}$ （Ｂ） $\dfrac{k}{n}$ （Ｃ） $\dfrac{x}{n}$ （Ｄ） $\dfrac{kx}{n}$

（Ｅ） $\dfrac{1}{2n}$ （Ｆ） $\dfrac{k}{2n}$ （Ｇ） $\dfrac{x}{2n}$ （Ｈ） $\dfrac{kx}{2n}$

［②、③の選択肢］

（Ａ） n （Ｂ） k （Ｃ） x （Ｄ） nk

（Ｅ） nx （Ｆ） kx （Ｇ） $n-k$ （Ｈ） $n-x$

（Ｉ） $n(1-k)$ （Ｊ） $n(1-x)$

［④～⑥の選択肢］

（Ａ） $n-1$ （Ｂ） n （Ｃ） $n+1$ （Ｄ） $k-1$

（Ｅ） k （Ｆ） $k+1$ （Ｇ） $n+k-1$ （Ｈ） $n+k$

（Ｉ） $n+k+1$ （Ｊ） $n-k-1$ （Ｋ） $n-k$ （Ｌ） $n-k+1$

［⑦の選択肢］

（Ａ） $B(k-1,n-k-1)$ （Ｂ） $B(k-1,n-k)$ （Ｃ） $B(k-1,n-k+1)$ （Ｄ） $B(k,n-k-1)$

（Ｅ） $B(k,n-k)$ （Ｆ） $B(k,n-k+1)$ （Ｇ） $B(k+1,n-k-1)$ （Ｈ） $B(k+1,n-k)$

[⑧の選択肢]

（A） $\dfrac{\phi_1 p}{\phi_2}$　（B） $\dfrac{\phi_1(1-p)}{\phi_2}$　（C） $\dfrac{\phi_2 p}{\phi_1}$　（D） $\dfrac{\phi_2(1-p)}{\phi_1}$

（E） $\dfrac{\phi_1 p}{\phi_2(1-p)}$　（F） $\dfrac{\phi_1(1-p)}{\phi_2 p}$　（G） $\dfrac{\phi_2 p}{\phi_1(1-p)}$　（H） $\dfrac{\phi_2(1-p)}{\phi_1 p}$

[⑨～⑫の選択肢]

（A） ϕ_1　（B） ϕ_2　（C） $\phi_1\phi_2$　（D） $\dfrac{\phi_1}{\phi_2}$

（E） $\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$　（F） $\phi_1 - 1$　（G） $\phi_2 - 1$　（H） $\phi_1 + \phi_2$

（I） $\phi_1 - \phi_2$　（J） $\phi_1 - \phi_2 - 1$　（K） $\dfrac{\phi_1}{2}$　（L） $\dfrac{\phi_2}{2}$

（M） $\dfrac{\phi_1}{2} - 1$　（N） $\dfrac{\phi_2}{2} - 1$　（O） $\dfrac{\phi_1 + \phi_2}{2}$　（P） $\dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2}$

[⑬～⑱の選択肢]

（A） n_1　（B） $n_1 p$　（C） $n_1(1-p)$　（D） n_2

（E） $n_2 p$　（F） $n_2(1-p)$　（G） n_1'　（H） $n_1' p$

（I） $n_1'(1-p)$　（J） n_2'　（K） $n_2' p$　（L） $n_2'(1-p)$

[⑲～㉒の選択肢]

（A） n_1　（B） n_2　（C） n_1'　（D） n_2'

（E） $F_{n_2}^{n_1}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$　（F） $F_{n_1}^{n_2}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$　（G） $F_{n_2'}^{n_1'}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$　（H） $F_{n_1'}^{n_2'}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

（I） $n_1 F_{n_2}^{n_1}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$　（J） $n_1 F_{n_1}^{n_2}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$　（K） $n_1' F_{n_2'}^{n_1'}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$　（L） $n_1' F_{n_1'}^{n_2'}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

（M） $n_1 F_{n_2}^{n_1}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) + n_2$　（N） $n_1 F_{n_1}^{n_2}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) + n_2$　（O） $n_1' F_{n_2'}^{n_1'}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) + n_2'$　（P） $n_1' F_{n_1'}^{n_2'}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) + n_2'$

［㉓、㉔の選択肢］

（Ａ） 0.0063　（Ｂ） 0.0127　（Ｃ） 0.0922　（Ｄ） 0.1941

（Ｅ） 0.3976　（Ｆ） 0.7514　（Ｇ） 0.8059　（Ｈ） 0.9033

（Ｉ） 0.9324　（Ｊ） 0.9937

(付表)

I .標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$$P(x > 1.9600) = 0.025$$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点：　$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

n＼m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon =$ 0.050

n＼m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

n＼m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

n＼m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

n＼m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点： $t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	*log x*
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	*exp(x)*
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052

以上

数学（解答例）

問題１

（１）

事象 A, B, C の少なくともいずれか発生する確率は $P(A \cup B \cup C)$ であり、それは次式で表される。

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

ここで、確率 $P(A), P(B), P(C)$ はそれぞれ、

$$P(A) = \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。

$A \cap B$ は、1回目の試行において1の目、２回目の試行において３以下の目、４回目の試行において1の目が出る事象である。

$B \cap C$ は、1回目と２回目の試行において３以下の目、3回目と４回目の試行において奇数の目が出る事象である。

$C \cap A$ は、1回目と４回目の試行において1の目、３回目の試行において奇数の目が出る事象である。

また、$A \cap B \cap C$ は、1回目と４回目の試行において1の目、２回目の試行において３以下の目、3回目の試行において奇数の目が出る事象である。

よって、確率 $P(A \cap B), P(B \cap C), P(C \cap A), P(A \cap B \cap C)$ はそれぞれ、

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$P(C \cap A) = \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{144}$$

である。

したがって、

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{36}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{72}-\frac{1}{16}-\frac{1}{72}+\frac{1}{144}$$

$$=\boxed{\frac{4}{9}}$$

である。

よって、<u>解答は（B）</u>

（2）

確率変数X,Yが互いに独立な場合に、$X+Y$の積率母関数を求めることにより、再生性があるか調べる。

（A） X,Yは独立で、それぞれ$b(m,p),b(n,p)$に従うとすると、

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=(pe^t+q)^m(pe^t+q)^n=(pe^t+q)^{m+n}$$

よって、$X+Y$は$b(m+n,p)$に従うことがわかり、（A）二項分布は再生性を持つ。

（B） X,Yは独立で、それぞれ$Po(\lambda),Po(\mu)$に従うとすると、

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=e^{\lambda(e^t-1)}e^{\mu(e^t-1)}=e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}$$

よって、$X+Y$は$Po(\lambda+\mu)$に従うことがわかり、（B）ポアソン分布は再生性を持つ。

（C） X,Yは独立で、それぞれ$NB(\alpha,p),NB(\beta,p)$に従うとすると、

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=p^\alpha(1-qe^t)^{-\alpha}p^\beta(1-qe^t)^{-\beta}=p^{\alpha+\beta}(1-qe^t)^{-(\alpha+\beta)}$$

よって、$X+Y$は$NB(\alpha+\beta,p)$に従うことがわかり、（C）負の二項分布は再生性を持つ。

（D） X,Yは独立で、それぞれ$G(p),G(r)$に従うとすると、

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=\frac{p}{\{1-(1-p)e^t\}}\frac{r}{\{1-(1-r)e^t\}}\neq\frac{p+r}{1-\{1-(p+r)e^t\}}$$

（ただし、$(1-p)e^t<1,(1-r)e^t<1$）

よって、$X+Y$は$G(p+r)$に従わないことがわかり、（D）$\boxed{\text{幾何分布は再生性を持たない}}$。

（E） X,Yは独立で、それぞれ$N(\mu,\sigma^2),N(\nu,\tau^2)$に従うとすると、

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=(e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2})(e^{\nu t+\frac{1}{2}\tau^2t^2})=e^{(\mu+\nu)t+\frac{1}{2}(\sigma^2+\tau^2)t^2}$$

よって、$X+Y$は$N(\mu+\nu,\sigma^2+\tau^2)$に従うことがわかり、（E）正規分布は再生性を持つ。

（F） X,Yは独立で、それぞれ$e(\lambda),e(\mu)$に従うとすると、

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}\frac{\mu}{\mu-t}\neq\frac{\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)-t}$$ （ただし、$t<\lambda,t<\mu$）

よって、$X+Y$ は $e(\lambda+\mu)$ に従わないことがわかり、（F）$\boxed{\text{指数分布は再生性を持たない}}$。

（G） X,Y は独立で、それぞれ $\Gamma(p,\sigma),\Gamma(r,\sigma)$ に従うとすると、

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=(1-\sigma t)^{-p}(1-\sigma t)^{-r}=(1-\sigma t)^{-(p+r)} \quad （ただし、t<\frac{1}{\sigma}）$$

よって、$X+Y$ は $\Gamma(p+r,\sigma)$ に従うことがわかり、（G）ガンマ分布は再生性を持つ。

（H） X,Y は独立で、それぞれ $\chi^2(m),\chi^2(n)$ に従うとすると、

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=(1-2t)^{-\frac{m}{2}}(1-2t)^{-\frac{n}{2}}=(1-2t)^{-\frac{m+n}{2}} \quad （ただし、t<\frac{1}{2}）$$

よって、$X+Y$ は $\chi^2(m+n)$ に従うことがわかり、（H） χ^2 分布は再生性を持つ。

よって、解答は（D）（F）

（3）

X を勝ち数を表す確率変数とすると、このプレイヤーが k 回ゲームに勝つ確率は

$$P(X=k)=\binom{500}{k}\times 0.28^k\times(1-0.28)^{500-k} \ : \ k=0,1,\cdots,500$$

また、

$$E(X)=500\times 0.28=140$$
$$V(X)=500\times 0.28\times 0.72=100.8$$

であるから、このプレイヤーが１５０回以上勝つ確率は中心極限定理より、

$$\begin{aligned} P(X\geq 150)&=P(\frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\geq\frac{150-140}{\sqrt{100.8}}) \\ &\approx u(1) \\ &=0.16 \end{aligned}$$

また３割以上勝つ確率が０．２以下となるためには、ゲームの回数を n 回とおくと

$$E(X)=n\times 0.28$$
$$V(X)=n\times 0.28\times 0.72$$

となるので

$$P(X\geq 0.3n)=P(\frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\geq\frac{0.02n}{\sqrt{n\times 0.28\times 0.72}})\leq 0.2$$

$$0.2\approx u(0.8416)$$

$$0.8416=\frac{0.02n}{\sqrt{n\times 0.28\times 0.72}}$$

を解くと $n=356.9\cdots$ であり、ゲームの回数は $\boxed{357\text{回}}$以上である必要がある。

よって、<u>解答は①（A）②（H）</u>

（4）

$A=Z^2, B=X^2+Y^2$ とおくと、A,B は負の値をとらず、$U=\dfrac{Z^2}{4\left(X^2+Y^2\right)}=\dfrac{A}{4B}$

$u=\dfrac{a}{4b}, v=b$ とおけば、この変換は ab 平面の $a>0, b>0$ なる部分（第1象限）を uv 平面の $u>0, v>0$ なる部分に移す1対1の変換である。
$a=4uv, b=v$ より

$$\frac{\partial(a,b)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}4v & 4u\\ 0 & 1\end{vmatrix}=4v$$

である。

また、$A=Z^2$ および $B=X^2+Y^2$ は互いに独立でそれぞれ自由度1,2の χ^2-分布に従うので、確率密度関数はそれぞれ

$$g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{a}{2}} & (a>0)\\ 0 & (a\le 0)\end{cases}\qquad h(b)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{b}{2}} & (b>0)\\ 0 & (b\le 0)\end{cases}$$

であり、A,B の確率密度関数は

$$\varphi(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{a+b}{2}} & (a>0, b>0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となる。ゆえに、$U=\dfrac{Z^2}{4\left(X^2+Y^2\right)}=\dfrac{A}{4B}, V=B$ の結合確率密度関数は $u>0, v>0$ のとき

$$\phi(u,v)=\varphi(a,b)\left|\frac{\partial(a,b)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(4uv)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{v(4u+1)}{2}}4v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v(4u+1)}{2}}$$

また、u,v は負の値をとらないから $u>0, v>0$ でないときは、$\phi(u,v)=0$
よって、U の（周辺）確率密度関数は $u>0$ のとき

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(u,v)dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}v^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v(4u+1)}{2}}dv$$

ここで $w=\dfrac{v(4u+1)}{2}$ とおけば

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty v^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v(4u+1)}{2}}dv=\frac{2}{\sqrt{\pi}}u^{-\frac{1}{2}}(4u+1)^{-\frac{3}{2}}\int_0^\infty w^{\frac{1}{2}}e^{-w}dw$$

$$\boxed{=u^{-\frac{1}{2}}(4u+1)^{-\frac{3}{2}}}$$

（最後の符号で $\int_0^\infty w^{\frac{1}{2}}e^{-w}dw=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いた）

なお、$u\le 0$ のとき $\phi(u,v)=0$ より $f(u)=0$ である。
よって、解答は（E）

（別解）

確率変数 A,B が互いに独立でそれぞれ自由度 m,n の χ^2 −分布に従うとき、$\dfrac{A}{m}\Big/\dfrac{B}{n}$ は自由度 (m,n) の F −分布に従うことから、$W=\dfrac{2Z^2}{X^2+Y^2}$ は自由度 $(1,2)$ の F −分布に従う。
したがって、W の確率密度関数 $g(w)$ は、$w\ge 0$ のとき、

$$g(w)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}\cdot w^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}w\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}\cdot w^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}w\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot w^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}w\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$U=\dfrac{Z^2}{4(X^2+Y^2)}=\dfrac{W}{8}$ なので、変数変換により $f(u)=u^{-\frac{1}{2}}(4u+1)^{-\frac{3}{2}}$ を得る。

（５）
5 回の試行で、1 度だけ同じ数字が記入された球が取り出される確率 $f(n)$ は、

$$f(n)=\frac{5\times 4}{2\times 1}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{10(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}$$

$f(n)$ を最大にする n $(n\ge 4)$ を求めればよい。

$f(7)=0.4998$
$f(8)=0.5127$
$f(9)=0.5121$
$f(10)=0.5040$

・

・

となり、$n=8$のとき $f(n)$ は最大となることから、n の最尤推定値は$\boxed{8}$となる。

よって、解答は　**（D）**

（6）

データの観測が X 時間で打ち切られた場合、全体の電球の個数を N 、観測終了時点までに寿命が判明した電球の個数を n 、観測された電球の寿命を x_i （寿命判明分のみ）とすると、指数分布の母平均の信頼区間は

$$\left(\frac{2n}{{\chi_{2n}}^2(\varepsilon/2)} \cdot \hat{\mu}, \quad \frac{2n}{{\chi_{2n}}^2(1-\varepsilon/2)} \cdot \hat{\mu} \right)$$

である。ただし、ここで $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i + (N-n)X\right\}$ とする。

なお、信頼係数は$1-\varepsilon$ とし、${\chi_{2n}}^2(\varepsilon)$ は自由度$2n$ の χ^2-分布の上側ε 点とする。

信頼区間の幅が 867 であることから、

$$\frac{2n}{{\chi_{2n}}^2(1-\varepsilon/2)} \cdot \hat{\mu} - \frac{2n}{{\chi_{2n}}^2(\varepsilon/2)} \cdot \hat{\mu} = 867$$

が成り立つ。これより、

$$\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i + (N-n)X\right\} \times 2n\left\{\frac{1}{{\chi_{2n}}^2(1-\varepsilon/2)} - \frac{1}{{\chi_{2n}}^2(\varepsilon/2)}\right\} = 867$$

となる。

これを X について解くと、

$$X = \frac{\dfrac{867}{2\left\{\dfrac{1}{{\chi_{2n}}^2(1-\varepsilon/2)} - \dfrac{1}{{\chi_{2n}}^2(\varepsilon/2)}\right\}} - \sum_{i=1}^{n} x_i}{N-n}$$

となる。

ここに $N=12$、$n=10$、$\sum_{i=1}^{n} x_i = 3{,}870$　および付表より　$\chi_{2n}{}^2(\varepsilon/2) = \chi_{20}{}^2(0.025) = 34.1696$、

$\chi_{2n}{}^2(1-\varepsilon/2) = \chi_{20}{}^2(0.975) = 9.5908$を代入して計算すると

$X = \boxed{955}$

となる。

よって、解答は　（B）

（7）

A工場の標本数$n_1 = 15$、標本平均$=30$、標準偏差$s_1 = 3$、B工場の標本数$n_2 = 10$、標本平均$\bar{x}$、標準偏差$s_2 = 1$である。

帰無仮説H_0：「A工場とB工場の平均時間には違いがない」

対立仮説H_1：「A工場とB工場の平均時間には違いがある」として、

有意水準5％で検定を行う。自由度$n_1 + n_2 - 2 = 23$のt分布の2.5％点は、$t(0.025) = 2.0687$であり、

$$t_0 = \frac{30-\bar{x}}{\sqrt{\dfrac{n_1 \cdot s_1^2 + n_2 \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \sqrt{\frac{138}{145}} \cdot (30-\bar{x})$$

$|t_0| < 2.0687$であれば、H_0は採択される。

$\Leftrightarrow 27.8795 < \bar{x} < 32.1205$であれば$H_0$は採択される。

$\Leftrightarrow$ B工場からの標本の平均時間が$\boxed{27.8795}$時間超、$\boxed{32.1205}$時間未満であればA工場とB工場である製品を作るのにかかる時間は違いがないといえる。

よって、解答は　①（B）　②（I）

（8）

母集団の数$N=9$、標本数$n=2$で、抽出した標本(X_1, X_2)について、

$\dfrac{2}{9}Z_R = X_1 + X_2$の期待値$E(X_1+X_2)$、分散$V(X_1+X_2) = \dfrac{4}{81}V(Z_R)$を求めればよい。

（ここで、Z_Rは、母集団の総計の推定量とする）

母平均をμ、母分散をσ^2とすると、定義より、

$\mu = 5$

$\sigma^2 = 6.67$

ここで、

$$E(Z_R)=N\mu \text{、}\quad V(Z_R)=N^2\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

との関係を用いて、

$E(Z_R)=45$、　$V(Z_R)=236.25$

これより、

$E(X_1+X_2)=\boxed{10}$、　$V(X_1+X_2)=\boxed{11.67}$

よって、解答は　①（B）　②（E）

（９）

各パラメータの平均、分散、共分散は下記の通り。

$\bar{x}=32.20$

$\bar{y}=62$

$\bar{z}=6$

$$S_x^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=2.66$$

$$S_y^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\bar{y}\right)^2=106$$

$$S_z^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(z_i-\bar{z}\right)^2=6$$

$$S_{xz}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_iz_i-\bar{x}\bar{z}=2.2$$

$$S_{yz}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_iz_i-\bar{y}\bar{z}=21$$

以上より、

$$r_{xz}=\frac{S_{xz}}{S_xS_z}=\frac{2.2}{\sqrt{2.66}\sqrt{6}}=\boxed{0.55068\ldots}$$

$$r_{yz}=\frac{S_{yz}}{S_yS_z}=\frac{21}{\sqrt{106}\sqrt{6}}=\boxed{0.83270\ldots}$$

よって、解答は　①（H）　②（J）

（１０）

この粒子の数直線上の位置は、マルコフ過程（連鎖）のモデルで表現することができる。

P_{ij}を数直線上の点i $(i=0,1,\ldots,5)$に位置していた状態から次の1秒後に点j $(j=0,1,\ldots,5)$に移動する確率とすると、このモデルの推移確率行列Pは

$$P=\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & P_{04} & P_{05} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ P_{40} & P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} \\ P_{50} & P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表せる。ここで、

$$P^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^4=\left(P^2\right)^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

ある時点で点1,2,3,4のいずれかに等しい確率で置かれるため、求める確率 p は

$$p=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=\frac{2}{19}=\boxed{0.10526\cdots}$$

である。

よって、解答は　（C）

（１１）

ユール＝ウォーカー方程式

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{cases}$$

をϕ_1、ϕ_2について解くと

$$\phi_1 = \rho_1 - \rho_1 \phi_2$$

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1{}^2}{1 - \rho_1{}^2}$$

一方、自己相関の定義より $\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{0.5}{0.7} = 0.714$、$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{0.4}{0.7} = 0.571$　であるので、

上記の式にρ_1、ρ_2を代入し、

$\phi_1 = \boxed{0.625}$、$\phi_2 = \boxed{0.125}$
となる。

ϕ_0については、$\phi_0 = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2) = \boxed{5.00}$
分散σ^2については、$\sigma^2 = \gamma_0 - \gamma_1 \phi_1 - \gamma_2 \phi_2 = \boxed{0.338}$
となる。

よって、解答は　①（Ｆ）　②（Ｉ）　③（Ｂ）　④（Ｂ）

（１２）
標本分散および標本平均の分散は以下のとおりである。

標本分散 $\hat{\sigma}_6{}^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}\left\{\exp(U_i) - \hat{\theta}_6\right\}^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}\left\{\exp(U_i) - 1.5381\right\}^2 = 0.1224$

標本平均$\hat{\theta}_6$の分散 $= Var\left[\hat{\theta}_6\right] = \frac{1}{6}\hat{\sigma}_6{}^2 = \frac{1}{6} \cdot 0.1224 = \boxed{0.02039}$

負の相関法による平均の分散は以下のとおりである。

共分散 $= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[\left\{\exp(U_i) - 1.6083\right\}\left\{\exp(1 - U_i) - 1.7347\right\}\right] = -0.1073$

負の相関法の平均$\hat{\theta}_6{}^{(2)}$の分散 $= Var\left[\hat{\theta}_6{}^{(2)}\right] = Var\left[\hat{\theta}_6\right] + \frac{1}{6}$共分散 $= \boxed{0.00250}$

よって、解答は　①（Ｄ）　②（Ａ）

（注）本問は指定教科書「モデリング」に準拠した出題であるが、標本分散を演習書「確

率統計演習２ 統計」における定義、共分散を演習書「確率統計演習１ 確率」における定義を用いて算出した場合の解答①（C）②（D）も正解とした。

問題２

（１）

$i \neq j$ のとき、事象 $\{X_i = 1, X_j = 1\}$ に属する標本点の個数は ${}_{n_1}\mathrm{P}_2 \times {}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}$ であるから、

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{{}_{n_1}\mathrm{P}_2 \times {}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}}{{}_n\mathrm{P}_r} = \frac{n_1(n_1 - 1)}{n(n-1)} \qquad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r, i \neq j)$$

となる。

同様に、事象 $\{X_i = 1, X_j = 0\}$ または事象 $\{X_i = 0, X_j = 1\}$ に属する標本点の個数は、

$n_1 \times n_2 \times {}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}$ であるから、

$$P(X_i = 1, X_j = 0) = P(X_i = 0, X_j = 1)$$

$$= \frac{n_1 \times n_2 \times {}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}}{{}_n\mathrm{P}_r} = \frac{n_1 n_2}{n(n-1)} \qquad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r, i \neq j)$$

となる。

また、事象 $\{X_i = 0, X_j = 0\}$ に属する標本点の個数は ${}_{n_2}\mathrm{P}_2 \times {}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}$ であるから、

$$P(X_i = 0, X_j = 0) = \frac{{}_{n_2}\mathrm{P}_2 \times {}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}}{{}_n\mathrm{P}_r} = \frac{n_2(n_2 - 1)}{n(n-1)} \qquad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r, i \neq j)$$

となる。

したがって、X_i の確率分布は、

$$P(X_i = 0) = P(X_i = 0, X_j = 0) + P(X_i = 0, X_j = 1)$$

$$= \frac{n_2(n_2 - 1)}{n(n-1)} + \frac{n_1 n_2}{n(n-1)} = \frac{n_2(n_1 + n_2 - 1)}{n(n-1)} = \frac{n_2(n-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n_2}{n} \qquad (1 \leq i \leq r)$$

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 1, X_j = 0) + P(X_i = 1, X_j = 1)$$

$$= \frac{n_1(n_1 - 1)}{n(n-1)} + \frac{n_1 n_2}{n(n-1)} = \frac{n_1(n_1 + n_2 - 1)}{n(n-1)} = \frac{n_1(n-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n_1}{n} \qquad (1 \leq i \leq r)$$

である。

よって、解答は　①　（O）　②　（Q）　③　（P）　④　（J）　⑤　（I）

（２）
（１）より、確率変数X_iの期待値$E\left(X_i\right)$は、

$$E\left(X_i\right)=1\times P\left(X_i=1\right)+0\times P\left(X_i=0\right)=\frac{n_1}{n}\qquad\left(1\leq i\leq r\right)$$

となる。
よって、確率変数Yの期待値は、

$$E\left(Y\right)=E\left(X_1+X_2+\cdots+X_r\right)=\frac{rn_1}{n}$$

となる。

また、X_i^2の期待値$E\left(X_i^2\right)$は、

$$E\left(X_i^2\right)=1^2\times P\left(X_i=1\right)+0^2\times P\left(X_i=0\right)=\frac{n_1}{n}\qquad\left(1\leq i\leq r\right)$$

となる。したがって、X_iの分散$V\left(X_i\right)$は、

$$V\left(X_i\right)=E\left(X_i^2\right)-E\left(X_i\right)^2=\frac{n_1}{n}-\left(\frac{n_1}{n}\right)^2=\frac{n_1n_2}{n^2}\qquad\left(1\leq i\leq r\right)$$

となる。

さらに$i\neq j$のとき、（１）より$X_i\times X_j$の期待値$E\left(X_iX_j\right)$は、

$$\begin{aligned}E\left(X_iX_j\right)&=1\times1\times P\left(X_i=1,X_j=1\right)+1\times0\times P\left(X_i=1,X_j=0\right)+0\times1\times P\left(X_i=0,X_j=1\right)\\&\quad+0\times0\times P\left(X_i=0,X_j=0\right)\\&=\frac{n_1\left(n_1-1\right)}{n\left(n-1\right)}\qquad\left(1\leq i\leq r,1\leq j\leq r,i\neq j\right)\end{aligned}$$

となるので、共分散$Cov\left(X_i,X_j\right)$は、

$$\begin{aligned}Cov\left(X_i,X_j\right)&=E\left(X_iX_j\right)-E\left(X_i\right)\times E\left(X_j\right)\\&=\frac{n_1\left(n_1-1\right)}{n\left(n-1\right)}-\frac{n_1}{n}\times\frac{n_1}{n}=\frac{nn_1^2-nn_1-nn_1^2+n_1^2}{n^2\left(n-1\right)}\\&=\frac{-n_1n_2}{n^2\left(n-1\right)}\qquad\left(1\leq i\leq r,1\leq j\leq r,i\neq j\right)\end{aligned}$$

となる。

したがって、確率変数Yの分散$V(Y)$は、

$$V(Y)=V(X_1+X_2+\cdots+X_r)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_r)+2\sum_{i<j}Cov(X_i,X_j)$$

$$=r\times\frac{n_1n_2}{n^2}+2\times\binom{r}{2}\times\left(-\frac{n_1n_2}{n^2(n-1)}\right)$$

$$=r\times\frac{n_1n_2}{n^2}+2\times\frac{r(r-1)}{2}\times\left(-\frac{n_1n_2}{n^2(n-1)}\right)$$

$$=r\times\frac{n_1n_2}{n^2}\left(1-\frac{r-1}{n-1}\right)$$

$$=\frac{rn_1n_2}{n^2}\times\frac{n-r}{n-1}$$

である。

よって、解答は　⑥（Ｋ）　⑦（Ｕ）　⑧（Ｙ）　⑨（Ｖ）　⑩（Ｅ）
（⑨と⑩は順不同）

（３）
確率変数Yのとりうる値は$0,1,2,\cdots,\min(n_1,r)$であり、$0\le k\le\min(n_1,r)$なる整数kに対して、$\{w;Y=k\}$なる事象に属する標本点の個数は$\binom{n_1}{k}\times\binom{n_2}{r-k}\times r!$である。
また、標本点の総数は${}_n\mathrm{P}_r$であるから、

$$P(Y=k)=\frac{\binom{n_1}{k}\times\binom{n_2}{r-k}\times r!}{{}_n\mathrm{P}_r}$$

$$=\frac{\binom{n_1}{k}\times\binom{n_2}{r-k}\times r!}{\binom{n}{r}\times r!}$$

$$=\frac{\binom{n_1}{k}\times\binom{n_2}{r-k}}{\binom{n}{r}}\quad(0\le k\le\min(n_1,r))$$

となる。
したがって、確率変数Yは超幾何分布に従うことが分かる。
つぎに、$P(Y=k)$を展開すると、

$$P(Y=k)=\frac{n_1!}{(n_1-k)!\times k!}\times\frac{n_2!}{(n_2-r+k)!\times(r-k)!}\times\frac{(n-r)!\times r!}{n!}$$
$$=\frac{r!}{(r-k)!\times k!}\times\frac{n_1!}{(n_1-k)!}\times\frac{n_2!}{(n_2-r+k)!}\times\frac{(n-r)!}{n!}$$
$$=\binom{r}{k}\times\frac{n_1(n_1-1)\cdots(n_1-k+1)\times n_2(n_2-1)\cdots(n_2-r+k+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}$$
$$=\binom{r}{k}\times\frac{\frac{n_1}{n}\left(\frac{n_1}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n_1}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\times\frac{n_2}{n}\left(\frac{n_1}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n_2}{n}-\frac{r-k-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}$$

であるため、$n_1:n_2$ の比は一定のまま n を十分大きくすると、

$$P(Y=k)\approx\binom{r}{k}\left(\frac{n_1}{n}\right)^k\left(\frac{n_2}{n}\right)^{r-k}$$

と近似され、確率変数 Y は二項分布 $B\left(r,\frac{n_1}{n}\right)$ に従う。

したがって、分散 $V(Y)$ は、

$$V(Y)\approx\frac{rn_1n_2}{n^2}$$

と近似される。

※$V(Y)$ については、（２）より $V(Y)=\frac{rn_1n_2}{n^2}\times\frac{n-r}{n-1}$ であるため、

$$V(Y)\approx\lim_{n\to\infty}\frac{rn_1n_2}{n^2}\times\frac{n-r}{n-1}=\frac{rn_1n_2}{n^2}$$ と解くこともできる。

よって、解答は　⑪（Ｆ）　⑫（Ｍ）　⑬（Ｂ）　⑭（Ｎ）　⑮（Ｉ）　⑯（Ｂ）　⑰（Ｊ）　⑱（Ｆ）　⑲（Ｖ）　（⑪と⑫は順不同、また⑮⑯と⑰⑱のペアは順不同）

問題３

n 個の標本中の i 番目 $(1\le i\le n)$ の標本が不良品のときに 1、良品のときに 0 となる確率変数を X_i とおくと、不良率 p の最尤推定量 $\hat{p}$ は、$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{k}{n}$ である。ところで、n 個の標本中の不良品の個数を表す確率変数 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ は二項分布に従うから

$$P(\hat{p}=x)=P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=x\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=nx\right)=\binom{n}{nx}p^{nx}(1-p)^{n(1-x)}$$

となる。

よって、解答は　①（Ｂ）　②（Ｅ）　③（Ｊ）

信頼係数$1-\varepsilon$のpの信頼区間を求めるには、$b(i;n,p)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$とおくと

$$P\{\hat{p}\le h_1(p)\}=P\{k\le nh_1(p)\}=\sum_{i=0}^{nh_1(p)}b(i;n,p)=\frac{\varepsilon}{2}$$

$$P\{\hat{p}\ge h_2(p)\}=P\{k\ge nh_2(p)\}=\sum_{i=nh_2(p)}^{n}b(i;n,p)=\frac{\varepsilon}{2}$$

となる$h_1(p)$, $h_2(p)$を求めなければならない。

ここで、a，bを正の整数とし、ベータ関数$B(a,b)=\dfrac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$であることに注意して

$\dfrac{1}{B(k+1,n-k)}\displaystyle\int_0^{1-p}t^{n-k-1}(1-t)^k dt$の部分積分を考えると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p}t^{n-k-1}(1-t)^k dt\\
&=\frac{1}{B(k+1,n-k)}\left[\frac{1}{n-k}t^{n-k}(1-t)^k\right]_0^{1-p}+\frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p}\frac{k}{n-k}t^{n-k}(1-t)^{k-1}dt\\
&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^{1-p}t^{n-k}(1-t)^{k-1}dt
\end{aligned}$$

となる。

よって、解答は　④（Ｂ）　⑤（Ｅ）　⑥（Ｋ）　⑦（Ｆ）

これを帰納的に用いて、

$$\sum_{i=0}^{k}b(i;n,p)=\frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p}t^{n-k-1}(1-t)^k dt$$

と表せる。ここで右辺において$t=\dfrac{\phi_2}{\phi_1F+\phi_2}$，$\phi_1=2(k+1)$, $\phi_2=2(n-k)$とおけば

$$F=\frac{\phi_2}{\phi_1}\left(\frac{1}{t}-1\right),\quad \frac{dF}{dt}=\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\frac{1}{t^2},\quad dt=\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)t^2dF,$$

$$t^{n-k-1}(1-t)^k dt = t^{\frac{\phi_2}{2}-1}(1-t)^{\frac{\phi_1}{2}-1}dt = t^{\frac{\phi_2}{2}-1}t^{\frac{\phi_1}{2}-1}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{\phi_1}{2}-1}dt$$

$$= t^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{\phi_1}{2}-1}t^{-2}dt = \left(1+\frac{\phi_1}{\phi_2}F\right)^{-\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}F\right)^{\frac{\phi_1}{2}-1}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)dF$$

$$= -\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{\frac{\phi_1}{2}}F^{\frac{\phi_1}{2}-1}\left(1+\frac{\phi_1}{\phi_2}F\right)^{-\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}dF$$

となることより

$$\sum_{i=0}^{k} b(i;n,p) = \int_{\frac{\phi_2 p}{\phi_1(1-p)}}^{\infty}\frac{1}{B\left(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2}\right)}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{\frac{\phi_1}{2}}F^{\frac{\phi_1}{2}-1}\left(1+\frac{\phi_1}{\phi_2}F\right)^{-\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}dF$$

を得る。

よって、解答は　⑧　（Ｇ）　⑨　（Ｄ）　⑩　（Ｋ）　⑪　（Ｍ）　⑫　（Ｏ）

右辺の被積分関数は自由度(ϕ_1,ϕ_2)のF分布の確率密度関数である。したがって、自由度(ϕ_1,ϕ_2)のF分布に従う確率変数を$F_{\phi_2}^{\phi_1}$とおくと

$$\sum_{i=0}^{k} b(i;n,p) = P\left(F_{n_2'}^{n_1'} \geq \frac{n_2' p}{n_1'(1-p)}\right)$$

ここで、$n_1' = 2(k+1),\ \ n_2' = 2(n-k)$である。また、

$$\sum_{i=k+1}^{n} b(i;n,p) = P\left(F_{n_2'}^{n_1'} < \frac{n_2' p}{n_1'(1-p)}\right)$$

であり、$k+1$をkとおき直すと

$$\sum_{i=k}^{n} b(i;n,p) = P\left(F_{n_1}^{n_2} < \frac{n_1 p}{n_2(1-p)}\right) = P\left(\frac{1}{F_{n_1}^{n_2}} \geq \frac{n_2(1-p)}{n_1 p}\right)$$

ここで、$n_1 = 2(n-k+1),\ \ n_2 = 2k$である。$F_{\phi_2}^{\phi_1}$が自由度$(\phi_1,\phi_2)$の$F$分布に従うとき、$\frac{1}{F_{\phi_2}^{\phi_1}}$は自由度$(\phi_2,\phi_1)$の$F$分布に従うから

$$\sum_{i=k}^{n} b(i;n,p) = P\left(F_{n_2}^{n_1} \geq \frac{n_2(1-p)}{n_1 p}\right)$$

となる。

よって、解答は　⑬（Ｋ）　⑭（Ｉ）　⑮（Ｂ）　⑯（Ｆ）　⑰（Ｆ）　⑱（Ｂ）

これより $h_1(p),\ h_2(p)$ について

$$\frac{n_2' p}{n_1'(1-p)} = F_{n_2'}^{n_1'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \iff P\left(k \le nh_1(p)\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{n_2(1-p)}{n_1 p} = F_{n_2}^{n_1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \iff P\left(k \ge nh_2(p)\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

を得る。したがって、$h_1(p) < \hat{p} < h_2(p)$ より、 p の信頼区間として

$$\frac{n_2}{n_1 F_{n_2}^{n_1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n_2} < p < \frac{n_1' F_{n_2'}^{n_1'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{n_1' F_{n_2'}^{n_1'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n_2'}$$

を得る。

よって、解答は　⑲（Ｂ）　⑳（Ｍ）　㉑（Ｋ）　㉒（Ｏ）

この結果を用いて、4 個の標本のうち1個が不良品だったとすると、

$$n_1 = 2(n-k+1) = 8,\ \ n_2 = 2k = 2,\ \ n_1' = 2(k+1) = 4,\ \ n_2' = 2(n-k) = 6$$

$$F_{n_2}^{n_1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = F_2^8(0.025) = 39.3730,\ \ F_{n_2'}^{n_1'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = F_6^4(0.025) = 6.2272$$

$$\frac{n_2}{n_1 F_{n_2}^{n_1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n_2} = \frac{2}{8 \times 39.3730 + 2} = 0.0063$$

$$\frac{n_1' F_{n_2'}^{n_1'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{n_1' F_{n_2'}^{n_1'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n_2'} = \frac{4 \times 6.2272}{4 \times 6.2272 + 6} = 0.8059$$

となることより、信頼係数95％のもとで p の信頼区間の下限は0.0063、上限は0.8059 となる。

よって、解答は　㉓（Ａ）　㉔（Ｇ）

問題１

<table>
<tr><td>（１）</td><td colspan="2">（B）</td><td>5点</td><td rowspan="2">（９）</td><td>①</td><td>（H）</td><td>2.5点</td></tr>
<tr><td>（２）</td><td colspan="2">（D）、（F）</td><td>完答で5点</td><td>②</td><td>（J）</td><td>2.5点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（３）</td><td>①</td><td>（A）</td><td>2.5点</td><td>（１０）</td><td colspan="2">（C）</td><td>5点</td></tr>
<tr><td>②</td><td>（H）</td><td>2.5点</td><td rowspan="4">（１１）</td><td>①</td><td>（F）</td><td>1点</td></tr>
<tr><td>（４）</td><td colspan="2">（E）</td><td>5点</td><td>②</td><td>（I）</td><td rowspan="2">完答で2点</td></tr>
<tr><td>（５）</td><td colspan="2">（D）</td><td>5点</td><td>③</td><td>（B）</td></tr>
<tr><td>（６）</td><td colspan="2">（B）</td><td>5点</td><td>④</td><td>（B）</td><td>2点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（７）</td><td>①</td><td>（B）</td><td rowspan="2">完答で5点</td><td rowspan="2">（１２）</td><td>①</td><td>（D）</td><td>1点</td></tr>
<tr><td>②</td><td>（I）</td><td>②</td><td>（A）</td><td>①と完答で4点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（８）</td><td>①</td><td>（B）</td><td>2点</td><td colspan="4" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>②</td><td>（E）</td><td>3点</td></tr>
</table>

（１２）は指定教科書「モデリング」に準拠した出題であるが、標本分散を演習書「確率統計演習 2 統計」における定義、共分散を演習書「確率統計演習 1 確率」における定義を用いて算出した場合の解答①（C）②（D）も正解とした。

問題２

<table>
<tr><td rowspan="5">（１）</td><td>①</td><td>（O）</td><td>1点</td><td rowspan="9">（３）</td><td>⑪</td><td>（F）</td><td rowspan="3">完答で2点
⑪⑫は順不同</td></tr>
<tr><td>②</td><td>（Q）</td><td>1点</td><td>⑫</td><td>（M）</td></tr>
<tr><td>③</td><td>（P）</td><td>1点</td><td>⑬</td><td>（B）</td></tr>
<tr><td>④</td><td>（J）</td><td>1点</td><td>⑭</td><td>（N）</td><td rowspan="5">完答で4点
⑮⑯　⑰⑱の
ペアは順不同</td></tr>
<tr><td>⑤</td><td>（I）</td><td>1点</td><td>⑮</td><td>（I）</td></tr>
<tr><td rowspan="5">（２）</td><td>⑥</td><td>（K）</td><td>1点</td><td>⑯</td><td>（B）</td></tr>
<tr><td>⑦</td><td>（U）</td><td>1点</td><td>⑰</td><td>（J）</td></tr>
<tr><td>⑧</td><td>（Y）</td><td>1点</td><td>⑱</td><td>（F）</td></tr>
<tr><td>⑨</td><td>（V）</td><td rowspan="2">完答で4点
順不同</td><td>⑲</td><td>（V）</td><td>2点</td></tr>
<tr><td>⑩</td><td>（E）</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

問題３

①	（B）	１点	⑬	（K）	完答で２点
②	（E）	完答で１点	⑭	（Ｉ）	
③	（Ｊ）		⑮	（B）	完答で２点
④	（B）	完答で２点	⑯	（F）	
⑤	（E）		⑰	（F）	完答で２点
⑥	（K）		⑱	（B）	
⑦	（F）		⑲	（B）	完答で２点
⑧	（G）	２点	⑳	（M）	
⑨	（D）	完答で４点	㉑	（K）	
⑩	（K）		㉒	（O）	
⑪	（M）		㉓	（A）	完答で２点
⑫	（O）		㉔	（G）	