損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次のⅠ～Ⅶの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。（各７点）

Ⅰ．ある保険商品の免責金額・支払限度額を設定しない場合の個々のクレーム額 X は、平均 θ の指数分布に従っている。支払限度額を 500 として引き受けた保険契約の支払データとして、次のデータを得た。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

支払保険金	支払件数	支払総額
500 未満	30	8,000
500	20	10,000
計	50	18,000

（１）最尤法により θ を求めた場合、最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 300　**（B）** 350　**（C）** 400　**（D）** 450　**（E）** 500
（F） 550　**（G）** 600　**（H）** 650　**（I）** 700　**（J）** 750

（２）支払限度額 500 に加え、免責金額 100（エクセス方式）を設定した場合の支払保険金の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、θ は最尤法により算出した数値を使用し、必要があれば $e^{-1}=0.368$、$e^{-\frac{1}{3}}=0.717$、$e^{-\frac{1}{5}}=0.819$ を使用すること。

（A） 287　**（B）** 297　**（C）** 307　**（D）** 317　**（E）** 327
（F） 337　**（G）** 347　**（H）** 357　**（I）** 367　**（J）** 377

Ⅱ．ある保険会社の自動車保険の料率は、年齢（X 歳以上か X 歳未満か）と免許の色（ゴールド免許かゴールド免許以外か）の二つの危険標識で複合的に区分されている。この自動車保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。

＜エクスポージャ（E_{ij}）＞

	ゴールド免許	ゴールド免許以外	計
X 歳以上	E_{11}＝　500	E_{12}＝1,000	$E_{1.}$＝1,500
X 歳未満	E_{21}＝　250	E_{22}＝　500	$E_{2.}$＝　750
計	$E_{.1}$＝　750	$E_{.2}$＝1,500	$E_{..}$＝2,250

＜クレーム総額（C_{ij}）＞

	ゴールド免許	ゴールド免許以外	計
X 歳以上	C_{11}＝　800	C_{12}＝1,800	$C_{1.}$＝2,600
X 歳未満	C_{21}＝1,000	C_{22}＝2,400	$C_{2.}$＝3,400
計	$C_{.1}$＝1,800	$C_{.2}$＝4,200	$C_{..}$＝6,000

この複合リスクの構造が加法型であると仮定して、2 つの危険標識について相対クレームコスト指数および料率係数を Minimum Bias 法により求めるとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。
なお、計算の途中において、クレームコストおよび相対クレームコスト指数は、全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

（1）年齢「X 歳未満」、免許の色「ゴールド免許以外」に対応する相対クレームコスト指数の実績値 r_{22} に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 1.750　**（B）** 1.760　**（C）** 1.770　**（D）** 1.780　**（E）** 1.790
（F） 1.800　**（G）** 1.810　**（H）** 1.820　**（I）** 1.830　**（J）** 1.840

（2）年齢「X 歳未満」、免許の色「ゴールド免許以外」に対応する料率係数の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 1.750　**（B）** 1.760　**（C）** 1.770　**（D）** 1.780　**（E）** 1.790
（F） 1.800　**（G）** 1.810　**（H）** 1.820　**（I）** 1.830　**（J）** 1.840

Ⅲ. 事故年度から翌々年度までに保険金支払いが完了する保険商品について、次の実績データを基に 2011 年度末の支払備金（普通支払備金＋ＩＢＮＲ備金）を累計発生保険金により見積もることとする。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

＜事故年度別　経過年度別累計発生保険金の推移＞

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	5,450	6,030	6,210
2010	5,780	6,280	
2011	6,300		

＜事故年度別　既経過保険料と 2011 年度末累計支払保険金＞

事故年度	既経過保険料	2011 年度末累計支払保険金
2009	10,200	6,210
2010	11,400	6,030
2011	12,100	5,850

ただし、累計発生保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いることとする。また、インフレ率は考慮しないものとする。
なお、計算の途中において、保険金・支払備金については全て小数点以下第１位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

（１）ボーンヒュエッターファーガソン法により推定した 2011 年度末支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、最終累計発生保険金の当初予測値は、事故年度別既経過保険料に予定損害率（各年度とも 60%とする。）を乗じた値を使用することとする。

（A） 1,523　**（B）** 1,553　**（C）** 1,583　**（D）** 1,613　**（E）** 1,643
（F） 1,673　**（G）** 1,703　**（H）** 1,733　**（I）** 1,763　**（J）** 1,793

（２）ベンクテンダー法により推定した 2011 年度末支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、最終累計発生保険金の当初予測値は、事故年度別既経過保険料に予定損害率（各年度とも 60%とする。）を乗じた値を使用し、信頼係数には 2011 年度末における保険金出現割合（チェインラダー法により推定した事故年度別の最終累計発生保険金に対する 2011 年度末累計発生保険金の割合）を使用することとする。なお、信頼係数および保険金出現割合については全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

（A） 1,528　**（B）** 1,558　**（C）** 1,588　**（D）** 1,618　**（E）** 1,648
（F） 1,678　**（G）** 1,708　**（H）** 1,738　**（I）** 1,768　**（J）** 1,798

Ⅳ. 全損失効時には当該保険年度末の払戻積立金にαを乗じた額を返す積立保険の年払積立保険料を求めたい。なお、全損失効は保険年度末に発生するものとし、満期返れい金をW、保険期間をn年、予定利率をi、現価率を$v\left(=\frac{1}{1+i}\right)$、予定契約消滅率を$q$とする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）第t保険年度末の払戻積立金を${}_tV$、年払積立保険料を${}_nP$とすると、${}_tV$が満たす再帰式は選択肢のうちのどれか。

(A) ${}_tV\times(1-q+\alpha)\times v={}_{t-1}V+{}_nP$

(B) ${}_tV\times(1+\alpha\cdot q)\times v={}_{t-1}V+{}_nP$

(C) ${}_tV\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}={}_{t-1}V+{}_nP$

(D) ${}_tV\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v={}_{t-1}V+{}_nP$

(E) ${}_tV\times v={}_{t-1}V+{}_nP$

(F) ${}_tV\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v={}_{t-1}V+{}_nP\times v$

(G) ${}_tV\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}/v={}_{t-1}V+{}_nP$

(H) ${}_tV\times(1-q+\alpha)={}_{t-1}V+{}_nP$

(I) ${}_tV\times(1+\alpha\cdot q)/v={}_{t-1}V+{}_nP$

(J) ${}_tV\times(1+\alpha\cdot q)={}_{t-1}V+{}_nP$

(K) いずれにも該当しない

（2）${}_nP$として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

(A) $W\times\{(1-q+\alpha)\times v\}^n\times\dfrac{1-\{(1-q+\alpha)\times v\}}{1-\{(1-q+\alpha)\times v\}^n}$

(B) $W\times v^n\times\dfrac{1-v}{1-v^n}$

(C) $W\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}/v]^n\times\dfrac{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}/v]}{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}/v]^n}$

(D) $W\times(1-q+\alpha)^n\times\dfrac{q-\alpha}{1-(1-q+\alpha)^n}$

(E) $W\times\{(1+\alpha\cdot q)\times v\}^n\times\dfrac{1-\{(1+\alpha\cdot q)\times v\}}{1-\{(1+\alpha\cdot q)\times v\}^n}$

(F) $W\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}^n\times\dfrac{(1-\alpha)\cdot q}{1-\{1-(1-\alpha)\cdot q\}^n}$

(G) $W\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^n\times\dfrac{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]}{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^n}$

(H) $W\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^n\times\dfrac{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]}{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^n}\times\dfrac{1}{v}$

(I) $W\times\{(1+\alpha\cdot q)/v\}^n\times\dfrac{1-\{(1+\alpha\cdot q)/v\}}{1-\{(1+\alpha\cdot q)/v\}^n}$

(J) $W\times(1+\alpha\cdot q)^n\times\dfrac{-\alpha\cdot q}{1-(1+\alpha\cdot q)^n}$

(K) いずれにも該当しない

V．次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）下表は４つの保険料算出原理が、正の同次性と独立なリスクに対する加法性を満たすかどうかをまとめたものである。①から⑧に入る適切な記号は選択肢のうちのどれか。

	正の同次性	独立なリスクに対する加法性
指数原理	①	②
パーセンタイル原理	③	④
エッシャー原理	⑤	⑥
ワンの保険料算出原理	⑦	⑧

（A）○（性質を満たしている）　　**（B）**×（性質を満たしていない）

（2）X が平均 μ_X、分散 σ_X^2 の正規分布に従うとき、指数原理（$P(X)=\log M_X(h)/h$）で $h=0.2$ として算出した保険料と同額になるものは選択肢のうちのどれか。

（A）期待値原理（$P(X)=(1+h)\mu_X$）で h=0.4 として算出した保険料
（B）期待値原理（$P(X)=(1+h)\mu_X$）で h=0.2 として算出した保険料
（C）期待値原理（$P(X)=(1+h)\mu_X$）で h=0.1 として算出した保険料
（D）分散原理（$P(X)=\mu_X+h\sigma_X^2$）で h=0.4 として算出した保険料
（E）分散原理（$P(X)=\mu_X+h\sigma_X^2$）で h=0.2 として算出した保険料
（F）分散原理（$P(X)=\mu_X+h\sigma_X^2$）で h=0.1 として算出した保険料
（G）標準偏差原理（$P(X)=\mu_X+h\sigma_X$）で h=0.4 として算出した保険料
（H）標準偏差原理（$P(X)=\mu_X+h\sigma_X$）で h=0.2 として算出した保険料
（I）標準偏差原理（$P(X)=\mu_X+h\sigma_X$）で h=0.1 として算出した保険料
（J）いずれにも該当しない

VI. ある保険商品において、年間の支払件数が平均 0.5 のポアソン分布に従っており、また、支払保険金 1 件の金額 X が下表の分布に従っている。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、個々の支払保険金の額と支払件数は独立であるものとする。必要があれば $e^{-\frac{1}{2}} = 0.607$ を使用すること。

支払保険金 1 件の金額： X	発生確率
10	0.2
20	0.5
30	0.3

（1）年間の支払保険金総額 S が 20 となる確率 $f_S(20)$ に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.155　**（B）** 0.160　**（C）** 0.165　**（D）** 0.170　**（E）** 0.175
（F） 0.180　**（G）** 0.185　**（H）** 0.190　**（I）** 0.195　**（J）** 0.200

（2）エクセスポイントを 40 とするストップロス再保険をこの保険商品に設定する場合、当該ストップロス再保険の年間の回収保険金期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.61　**（B）** 0.66　**（C）** 0.71　**（D）** 0.76　**（E）** 0.81
（F） 0.86　**（G）** 0.91　**（H）** 0.96　**（I）** 1.01　**（J）** 1.06

Ⅶ. あるポートフォリオについて、個々のクレーム額がパレート分布に従うことが分かっている。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１） $X_1, X_2, \cdots X_n$ を互いに独立に同一の分布 F に従う確率変数列とし、その最大値 $M_n = \max(X_1, X_2, \cdots X_n)$ を考える。このとき、M_n をある数列 c_n, d_n により正規化した値 $Z_n = (M_n - d_n)/c_n$ については、c_n, d_n を適当に選ぶことで、特定の分布に法則収束することを示すことができる。

$X_1, X_2, \cdots X_n$ がパレート分布 $F_{X_i}(x) = 1-(\beta/x)^{\alpha} \quad (x > \beta)$ に従うとき、$c_n = \beta n^{\frac{1}{\alpha}}, d_n = 0$ とすると、以下のとおりとなる。

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} \left(\boxed{①}\right)^{-\left(\boxed{②}\right)^{\boxed{③}}} \qquad (x > 0)$$

①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A） e **（B）** $-e$ **（C）** x **（D）** $-x$ **（E）** α **（F）** $-\alpha$
（G） $1/\alpha$ **（H）** $-1/\alpha$ **（I）** β **（J）** $-\beta$ **（K）** $1/\beta$ **（L）** $-1/\beta$
（M） いずれにも該当しない

（２）個々のクレーム額がパレート分布 $F(x) = 1 - 2/x \quad (x > 2)$ に従うポートフォリオにおいて、100 件のクレームを観測したとき、（１）で導出した近似分布を用いて最大クレーム額を計算する。このとき、最大クレーム額の 90%VaR の値は $\boxed{④}$ である。なお、必要があれば、$\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$ を使用すること。
④に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 800 **（B）** 960 **（C）** 1,120 **（D）** 1,280 **（E）** 1,440
（F） 1,600 **（G）** 1,760 **（H）** 1,920 **（I）** 2,080 **（J）** 2,240

問題２． 次のⅠ～Ⅴの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　（各８点）

Ⅰ．ある保険商品の予定料率構成割合は下表のとおりであり、予定社費率に対応する社費のうち半分は契約条件により増減することはなく、残りの半分が保険金支払件数に比例するものとなっている。ただし、代理店手数料と利潤は営業保険料に比例するものとする。

予定損害率	60%
予定社費率	20%
代理店手数料率	15%
予定利潤率	5%

また、この保険商品の個々のクレーム額 X が以下の確率密度関数に従うことが分かっている。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left(-\frac{(\log x+3)^2}{2}\right)\quad (x>0)$$

この保険商品に、以下の商品内容の改定を行うことを検討している。

・フランチャイズ方式の免責金額 $e^{-3.5}$ を導入する（個々のクレーム額 X に免責金額を加味した額が保険金である）

・保険金の 10%を費用保険金として支払う（たとえば、保険金が 100 の場合は、費用保険金 10 とあわせて、合計 110 が支払われる）

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0.309	0.159	0.067	0.023
$u(\varepsilon)$	0.500	1.000	1.500	2.000

（１）商品内容の改定により、保険金支払件数が $\boxed{\quad ① \quad}$ %減少する。①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 6　**（B）** 11　**（C）** 16　**（D）** 21　**（E）** 26
（F） 31　**（G）** 36　**（H）** 41　**（I）** 46　**（J）** 51

（２）商品内容の改定により、営業保険料が $\boxed{\quad ② \quad}$ %減少する。②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.9　**（B）** 1.4　**（C）** 1.9　**（D）** 2.4　**（E）** 2.9
（F） 3.4　**（G）** 3.9　**（H）** 4.4　**（I）** 4.9　**（J）** 5.4

Ⅱ．ある 1 年契約の保険商品について、今年度（X 年度）は 17 件の契約を引き受けている。このうち次年度に契約を更改する件数（更改件数）を推定する。各契約者が契約を更改するか否かは、パラメータ Θ の二項分布 $B(1,\Theta)$（確率関数 $f(y)=\binom{1}{y}\Theta^{y}(1-\Theta)^{1-y}$、確率変数 Y は、契約を更改する場合は 1 を、契約を更改しない場合は 0 をとるものとする）に従い、Θ は、確率密度関数が、$f_{\Theta}(\theta)=72\theta^{7}(1-\theta)\ \ (0<\theta<1)$ のベータ分布に従うことが分かっている。また、過去 3 年間の契約件数と更改件数は下表のとおりとなっている。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

	X－3 年度	X－2 年度	X－1 年度	X 年度
契約件数	12	13	15	17
更改件数	6	7	7	②

(例) X－3 年度は、12 件の契約を引き受け、うち 6 件が次年度に契約を更改した。

（1）実績データに対する信頼度を Bühlmann-Straub モデルにより計算すると、信頼度の値は ① である。
①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.10 **（B）** 0.20 **（C）** 0.30 **（D）** 0.40 **（E）** 0.50
（F） 0.60 **（G）** 0.70 **（H）** 0.80 **（I）** 0.90 **（J）** 1.00

（2）Bühlmann-Straub モデルを用いて推計した X 年度の更改件数は ② である。
②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 8.5 **（B）** 9.0 **（C）** 9.5 **（D）** 10.0 **（E）** 10.5
（F） 11.0 **（G）** 11.5 **（H）** 12.0 **（I）** 12.5 **（J）** 13.0

III. 次の条件を満たす保険商品の引き受けを実施するにあたり、事業年度における破産確率を検討する。

①１契約あたりのクレーム件数は平均 0.02 のポアソン分布に従い、クレーム額は平均 50 万円の指数分布に従う。また、クレーム総額の分布は近似的に正規分布に従う。
②この保険商品のみの引き受けを行い、保険金支払いは事業年度期初のサープラス 500 万円と、純保険料に安全割増 15%を加えた保険料収入で賄う。
③契約引受件数は、5,000 件。
④契約はすべて事業年度期初に締結されると同時に保険料が領収され、保険金支払いは事業年度中にすべて行われるものとする。なお、運用益は考慮しない。

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側ε点）の数値（表に記載のない数値は直線補間により算出された数値）および$e^{-1}=0.368$を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.080	0.050	0.025	0.020	0.015	0.010
$u(\varepsilon)$	1.405	1.645	1.960	2.054	2.170	2.326

（１）当該事業年度における破産確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 2.5%　**（B）** 3.0%　**（C）** 3.5%　**（D）** 4.0%　**（E）** 4.5%
（F） 5.0%　**（G）** 5.5%　**（H）** 6.0%　**（I）** 6.5%　**（J）** 7.0%

（２）１クレームごとに、100 万円を超える部分は 50%の縮小支払とすることとした※。
この場合、当該事業年度における破産確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。
※たとえば、200 万円のクレームの場合は、保険金支払額は 150 万円となる。
100 万円＋（200 万円－100 万円）×50% = 150 万円

（A） 1.1%　**（B）** 1.6%　**（C）** 2.1%　**（D）** 2.6%　**（E）** 3.1%
（F） 3.6%　**（G）** 4.1%　**（H）** 4.6%　**（I）** 5.1%　**（J）** 5.6%

Ⅳ. ある保険会社が販売している保険商品の個々のクレーム額 X は、以下の確率密度関数に従うことが分かっている。

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 \quad (1 < x)$$

現在この保険会社では、この保険商品に対してエクセスポイント 2、カバーリミット 3 の超過損害額再保険特約を設定している。
ここで、来年度以降、個々のクレーム額 X が一律 10%上昇する場合を想定する。この保険会社ではカバーリミットを変更することで、再保険特約の回収期待値をクレーム額が増加する前と同じ金額にしたいと考えている。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）現在の超過損害額再保険特約の回収期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.10　**（B）** 0.15　**（C）** 0.20　**（D）** 0.25　**（E）** 0.30
（F） 0.35　**（G）** 0.40　**（H）** 0.45　**（I）** 0.50　**（J）** 0.55

（2）クレーム額の増加後に設定すべきカバーリミットの金額に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、エクセスポイントは 2 のままで変更しないこととする。

（A） 2.0　**（B）** 2.1　**（C）** 2.2　**（D）** 2.3　**（E）** 2.4
（F） 2.5　**（G）** 2.6　**（H）** 2.7　**（I）** 2.8　**（J）** 2.9

V．次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）以下のイからハのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ．ベイズ方法論は、実務的には、事前分布を決定する必要があること、簡単な事例を除き解析的な計算が困難な場合が多い、といった問題がある。Bühlmann モデルは、この問題を緩和した方法となっている。

ロ．Bailey-Simon 法では、目的変数の期待値は説明変数の線形結合を要素としたリンク関数で表され、目的変数は指数型分布族に従い、その分散は平均の関数で表せる。このため、損害保険で取り扱う正規分布がなじみにくいクレーム頻度やクレーム額の分布もモデル化が可能となる。

ハ．保険負債の確率論的アプローチは、将来キャッシュフローを一点（期待値）で予測する手法であるため、これをリスクフリーレートではなく、低めに調整した割引率で割り引くことで、リスクと不確実性に関する調整を行う。

（A） 全て正しい	**（B）** イ、ロのみ正しい
（C） イ、ハのみ正しい	**（D）** ロ、ハのみ正しい
（E） イのみ正しい	**（F）** ロのみ正しい
（G） ハのみ正しい	**（H）** 全て誤り

（2）以下のニからへのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

ニ．確率変数$\left(X_1,\cdots,X_N\right)$のコピュラが積コピュラであるとき、$\left(X_1,\cdots,X_N\right)$は独立である。また、その逆も必ず成り立つ。

ホ．クレーム件数が負の二項分布 $f(n)=\binom{r+n-1}{n}p^r(1-p)^n \quad (n=0,1,2,\cdots)$ に従う場合のクレーム総額Sの積率母関数は、クレーム額Xの積率母関数$M_X(t)$を用いて、以下のとおり書ける。

$$M_S(t)=\left(\frac{1}{1-(1-p)M_X(t)}\right)^r$$

へ．リスクの集中に対しペナルティを課すべきとの批判にこたえるため、コヒーレント・リスク尺度が満たす公理のうち、劣加法性および正の同次性を、

$0\le c\le 1$に対し、$\rho\left(cX_1+(1-c)X_2\right)\le c\rho\left(X_1\right)+(1-c)\rho\left(X_2\right)$

に置き換えた尺度を、歪みリスク尺度という。

（A） 全て正しい	**（B）** ニ、ホのみ正しい
（C） ニ、へのみ正しい	**（D）** ホ、へのみ正しい
（E） ニのみ正しい	**（F）** ホのみ正しい
（G） へのみ正しい	**（H）** 全て誤り

問題３． 次の問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。（11 点）

ある保険事故が発生した場合に、保険金 X と保険金 Y をそれぞれ支払う保険商品がある。
保険金 X と保険金 Y は、それぞれ次の確率密度関数に従うことが分かっている。

$$f(x)=\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} \quad (x \geq 0) \qquad\qquad g(y)=50y^{-3} \quad (y>5)$$

また、保険金 X と保険金 Y の同時分布は、アルキメデス型コピュラ $C(u_1,u_2)=\phi^{-1}(\phi(u_1)+\phi(u_2))$ で構成され、その生成作用素が、$\phi(u)=(u^{-\alpha}-1)/\alpha$ であることが分かっている。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）このポートフォリオにおいて、直近に観察された保険金 X と保険金 Y が下表のとおりとなっている。これらの観察値からケンドールの τ を算出すると ① となる。

事故番号	1	2	3	4	5	6	7	8
保険金 X の観察値	4	16	33	3	38	11	15	5
保険金 Y の観察値	6	18	45	8	14	26	10	7

①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.00　**（B）** 0.10　**（C）** 0.20　**（D）** 0.30　**（E）** 0.40
（F） 0.50　**（G）** 0.60　**（H）** 0.70　**（I）** 0.80　**（J）** 0.90

（２）ケンドールの τ が観察値から算出した値と一致するように、コピュラのパラメータ α を定めたとき、保険金 X と保険金 Y がともに 10 以下となる確率は ② である。また、必要があれば、$e=2.718$ を使用すること。
（ヒント：アルキメデス型コピュラのケンドールの τ は、

$$\tau=4\int_0^1\frac{\phi(u)}{\phi'(u)}du+1$$

と表される。）
②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.43　**（B）** 0.45　**（C）** 0.47　**（D）** 0.49　**（E）** 0.51
（F） 0.53　**（G）** 0.55　**（H）** 0.57　**（I）** 0.59　**（J）** 0.61

以上

損保数理（解答例）

問題１.

Ⅰ.

（１）**（G）**　（２）**（A）**　　　［（１）３点、（２）４点］

（１）

X の分布関数は、$F(x)=1-e^{-\frac{x}{\theta}}\quad (x>0)$ であるから、$P(X\geq 500)=1-F(500)=e^{-\frac{500}{\theta}}$

尤度関数は、

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{50}f(x_i;\theta)=\left\{\prod_{i=1}^{30}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}\right\}\left\{\prod_{i=31}^{50}e^{-\frac{500}{\theta}}\right\}=\theta^{-30}e^{-\frac{8000}{\theta}}\cdot e^{-\frac{10000}{\theta}}=\theta^{-30}e^{-\frac{18000}{\theta}}$$

したがって、$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=0$ となる θ が求める値となる。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-30\log\theta-\frac{18000}{\theta}\right)=-\frac{30}{\theta}+\frac{18000}{\theta^2}=0$$

これを θ について解いて、$\theta=600$

（２）

支払限度額 500 に加えて免責金額 100 を設定した場合の支払保険金を Y とすると、

$$E(Y)=\int_{100}^{600}(x-100)\cdot f(x)dx+500\cdot P(X\geq 600)$$

$$=\int_{100}^{600}(x-100)\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx+500\cdot\{1-F(600)\}$$

$$=\int_{100}^{600}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx-100\int_{100}^{600}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx+500\cdot e^{-\frac{600}{\theta}}$$

$$=600\cdot\left(e^{-\frac{1}{6}}-e^{-1}\right)$$

$$=287.3$$

問題１.

Ⅱ.

（１）**（F）**　（２）**（A）**　　　［（１）２点、（２）５点］

（１）

各リスク区分ごとのクレームコスト $R_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$ および相対クレームコスト指数 $r_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$ を計算すると、

＜クレームコスト R_{ij} ＞

	ゴールド免許　b_1	ゴールド免許以外　b_2	計
X 歳以上　a_1	1.600	1.800	1.733
X 歳未満　a_2	4.000	4.800	4.533
計	2.400	2.800	2.667

＜相対クレームコスト指数 r_{ij} ＞

	ゴールド免許　b_1	ゴールド免許以外　b_2	計
X 歳以上　a_1	0.600	0.675	0.650
X 歳未満　a_2	1.500	1.800	1.700
計	0.900	1.050	1

よって、相対クレームコスト指数の実績値 $r_{22}=1.800$

（２）

相対クレームコスト指数の推定値 $\hat{r}_{ij}$ としたとき、Minimum Bias 法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=0$

$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$

$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=0$

$E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$

この連立方程式において、C を定数として、

$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})=E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=C$

$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=-C$

と表すことができる。この複合リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、$\hat{r}_{ij}=x_i+y_j\quad(i=1,2\quad j=1,2)$ と表される。

これを、上記連立方程式に代入して整理すると、

$x_1 + y_1 = r_{11} - C / E_{11} \cdots (a)$, $x_1 + y_2 = r_{12} + C / E_{12}$ $\cdots (b)$

$x_2 + y_1 = r_{21} + C / E_{21} \cdots (c)$, $x_2 + y_2 = r_{22} - C / E_{22}$ $\cdots (d)$

となる。

$(a) + (d) = (b) + (c)$ より、

$$(r_{11} - \frac{C}{E_{11}}) + (r_{22} - \frac{C}{E_{22}}) = (r_{12} + \frac{C}{E_{12}}) + (r_{21} + \frac{C}{E_{21}})$$

であり、各 E_{ij} , r_{ij} を代入して C について解くと、 $C = 25$

$$\therefore \hat{r}_{22} = x_2 + y_2 = r_{22} - C / E_{22} = 1.800 - 25 / 500 = 1.750$$

問題１．

III.

（１）**（H）**　（２）**（G）**　　　［（１）３点、（２）４点］

（１）ボーンヒュエッターファーガソン法による推定は以下のとおり。

事故年度	既経過保険料	予定損害率	当初予測値	2011 年度末累計発生保険金	B_j	$1/B_j$	最終発生保険金
2009	10,200	60%	6,120	6,210	1.000	1.000	6,210
2010	11,400	60%	6,840	6,280	1.030	0.971	6,478
2011	12,100	60%	7,260	6,300	1.130	0.885	7,135

支払備金（普通支払備金＋ＩＢＮＲ備金）は、最終発生保険金と 2011 年度末累計支払保険金との差額となるので、以下のとおり計算される。

(6,210 － 6,210) + (6,478 － 6,030) + (7,135 － 5,850) = <u>1,733</u>

（２）ベンクテンダー法による推定は以下のとおり。

まず、チェインラダー法により、各年度の 3 年度経過時累計発生保険金を求める。

①LDF

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2009	1.106	1.030
2010	1.087	1.030
2011	1.097	1.030

②経過年度ごとの累計発生保険金（網掛けセル部分が計算値）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	5,450	6,030	6,210
2010	5,780	6,280	6,468
2011	6,300	6,911	7,118

信頼係数には 2011 年度末における保険金出現割合を用いることとしているため、（１）の解答過程において算出した $1/B_j$ を信頼係数として、各事故年度における最終発生保険金を推定する。

2009 年度：6,210

2010 年度：6,468×0.971 + 6,478×(1-0.971) = 6,468

2011 年度：7,118×0.885 + 7,135×(1-0.885) = 7,120

以上より、支払備金は以下のとおり計算される。

(6,210 - 6,210) + (6,468 - 6,030) + (7,120 – 5,850)= <u>1,708</u>

問題１.

Ⅳ.

<u>（１）①**（D）**（２）**（G）**</u>　　　　［（１）３点、（２）４点］

（１）

再帰式は、${}_{t}V\times(1-q)=({}_{t-1}V+{}_{n}P)\times(1+i)-\alpha\cdot q\cdot{}_{t}V$ を変形して、

${}_{t}V\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v={}_{t-1}V+{}_{n}P$ となる。

（２）

第1保険年度から第n保険年度までの再帰式は、以下のとおりである。

${}_{1}V\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v={}_{0}V+{}_{n}P$

${}_{2}V\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{2}=({}_{1}V+{}_{n}P)\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v$

・・・

${}_{n}V\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{n}=({}_{n-1}V+{}_{n}P)\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{n-1}$

加算すると、

$$
\begin{aligned}
&{}_{0}V+{}_{n}P\times\left\langle 1+[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]+[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{2}\cdots+[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{n-1}\right\rangle \\
&\qquad={}_{n}V\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{n}
\end{aligned}
$$

${}_{0}V=0$、${}_{n}V=W$ より

$${}_{n}P=W\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{n}\times\frac{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]}{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{n}}$$

となる。

問題１.

Ⅴ.

（１）**①（B）　②（A）　③（A）　④（B）　⑤（B）　⑥（A）　⑦（A）　⑧（B）**

（２）**（F）**

［（１）①,②完答で１点、③,④完答で１点、⑤,⑥完答で１点、⑦,⑧完答で１点、（２）３点］

（１）

（テキスト７－６より）

（２）

$$P(X) = \log M_X(h)/h = \frac{\left(\mu_x h + \frac{\sigma_x^2 h^2}{2}\right)}{h} = \mu_x + \frac{h}{2}\sigma_x^2 = \mu_x + 0.1\sigma_x^2$$

問題１.

VI.

（１）**（A）**　（２）**（D）**　　　［（１）２点、（２）５点］

（１）

$f_S(20)$ ＝（支払件数 1 件、支払保険金 20 である確率）

＋（支払件数 2 件、支払保険金がそれぞれ 10 である確率）

$$=\frac{0.5}{1!}\times e^{-0.5}\times 0.5+\frac{0.5^2}{2!}\times e^{-0.5}\times 0.2^2$$

$$=0.255\times e^{-0.5}$$

＝0.155

（２）

（１）と同様に、

$f_S(0)$ ＝（支払件数 0 件である確率）

$$=e^{-0.5}$$

$f_S(10)$ ＝（支払件数 1 件、支払保険金 10 である確率）

$$=\frac{0.5}{1!}\times e^{-0.5}\times 0.2$$

$$=0.1\times e^{-0.5}$$

$f_S(30)$ ＝（支払件数 1 件、支払保険金 30 である確率）

＋（支払件数 2 件、支払保険金がそれぞれ 10、20 である確率）

＋（支払件数 3 件、支払保険金がすべて 10 である確率）

$$=\frac{0.5}{1!}\times e^{-0.5}\times 0.3+\frac{0.5^2}{2!}\times e^{-0.5}\times 2\times 0.5\times 0.2+\frac{0.5^3}{3!}\times e^{-0.5}\times 0.2^3$$

$$=0.175167\times e^{-0.5}$$

以上の結果を用いて、

$$E(I_{40})=\sum_{k=5}^{\infty}10(k-4)f_s(10k)=E(S)-40+\sum_{k=0}^{3}10(4-k)f_s(10k)$$

$$=0.5\times E(X)-40+\sum_{k=0}^{3}10(4-k)f_s(10k)$$

＝0.76

問題１.

Ⅶ.

（１）①**（A）**②**（C）**③**（F）**　（２）**（H）**　　　［（１）①～③完答で３点、（２）４点］

（１）

$$
\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= P\left((M_n - d_n)/c_n \le x\right) = P\left(M_n \le c_n x + d_n\right) \\
&= P\left(\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le c_n x + d_n\right) \\
&= P\left(X_1 \le c_n x + d_n, X_2 \le c_n x + d_n, \cdots, X_n \le c_n x + d_n\right) \\
&= \left\{P\left(X_i \le c_n x + d_n\right)\right\}^n = \left\{F_{X_i}\left(c_n x + d_n\right)\right\}^n = \left\{F_{X_i}\left(\beta n^{1/\alpha} x\right)\right\}^n \\
&= \left\{1 - \left(\beta/(\beta n^{1/\alpha} x)\right)^\alpha\right\}^n = \left(1 - x^{-\alpha}/n\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x^{-\alpha}}
\end{aligned}
$$

（２）

$P(M_{100} \le \mu) = 0.9$ となる μ を求める。

$P\left(M_{100}/200 \le \mu/200\right) \approx e^{-(\mu/200)^{-1}}$ より、$e^{-(\mu/200)^{-1}} = 0.9$

両辺の対数をとると、

$-\left(\mu/200\right)^{-1} = \log 0.9$

したがって、$\mu = -\dfrac{200}{\log 0.9} = -\dfrac{200}{2\log 3 - \log 2 - \log 5} = \dfrac{200}{0.104} = 1923$

問題２．

Ⅰ．

（１）①**（F）**（２）**（C）**　　　　［（１）３点、（２）５点］

（１）

フランチャイズ免責の導入により、保険金が発生する割合は、

$$\int_{e^{-3.5}}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{-\frac{(\log x+3)^2}{2}\right\} = \int_{-3.5}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y+3)^2}{2}\right\} = \int_{-0.5}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}$$

$$= 1 - 0.309 = 0.691$$

したがって、保険金支払件数が減少する割合は 30.9%

（２）

商品内容改定前の純保険料は、

$$\int_{0}^{\infty} dx \frac{x}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{-\frac{(\log x+3)^2}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y+3)^2}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y+2)^2}{2} - \frac{5}{2}\right\} = e^{-2.5}$$

商品内容改定後の純保険料は、

$$1.1 \cdot \int_{e^{-3.5}}^{\infty} dx \frac{x}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{-\frac{(\log x+3)^2}{2}\right\} = 1.1 \cdot \int_{-3.5}^{\infty} dy \frac{e^y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y+3)^2}{2}\right\} = 1.1 \cdot \int_{-3.5}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y+2)^2}{2} - \frac{5}{2}\right\}$$

$$= 1.1 \cdot \int_{-1.5}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2} - \frac{5}{2}\right\} = 1.1 \cdot e^{-2.5} \cdot (1 - 0.067)$$

したがって、商品改定により純保険料は $1.1 \cdot (1 - 0.067) = 1.0263$ 倍になる。

これと（１）の結果から、営業保険料の割引率は

$$1 - \frac{0.6 \times 1.0263 + 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.31)}{1 - 0.15 - 0.05} = 0.019025$$

問題２.

Ⅱ.

（１）①**（H）**（２）②**（C）**　　　［（１）３点、（２）５点］

（１）

各契約者の更改件数（更改率）を N とすると、

$$E(N \mid \theta) = \theta$$
$$V(N \mid \theta) = \theta(1-\theta)$$
$$v = E(V(N \mid \theta)) = E(\theta(1-\theta)) = E(\theta) - E(\theta^2) = 4/5 - 36/55 = 8/55$$
$$w = V(E(N \mid \theta)) = V(\theta) = 4/275$$

よって、$Z = \dfrac{m}{m + \dfrac{v}{w}} = \dfrac{40}{40+10} = 0.80$

（２）

$\mu = E(E(N \mid \theta)) = E(\theta) = 4/5$ であるから、

$$Z \times \frac{20}{40} + (1-Z) \times \mu = 0.80 \times \frac{20}{40} + 0.20 \times \frac{4}{5} = 0.56$$

$$17 \times 0.56 = 9.52$$

問題２.

III.

（１）**（D）**　（２）**（D）**　　　［（１）３点、（２）５点］

（１）

①平均値

クレーム件数の平均値は$n_1 = 5000 \times 0.02 = 100$、１クレームあたりの支払額期待値は$m_1 = 50$万円であるので、支払総額の期待値は$E(S_1) = m_1 \times n_1 = 50 \times 100 = 5000$万円となる。

②標準偏差

クレーム額は平均50万円の指数分布に従うことから、クレーム額の原点周りの２次モーメントが

$$\int_0^\infty x^2 \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx = 5000 \quad \cdots \mathrm{A}$$

であることから、標準偏差は、$\sqrt{V(S_1)} = \sqrt{n_1 \times A} = 500\sqrt{2}$ 万円である。

③破産確率

期初のサープラスをu_0とすると、破産確率は次のとおり表される。

$$P\left(u_0 + 1.15E(S_1) - S_1 < 0\right) = P\left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sqrt{V(S_1)}} > \frac{u_0 + 0.15E(S_1)}{\sqrt{V(S_1)}}\right)$$

ここで、$Z = \dfrac{S_1 - E(S_1)}{\sqrt{V(S_1)}}$は標準正規分布に従うものとし、期初サープラス値および①・②で求めた数値を上式に代入して、直線補間により確率を求めると、4.0% と計算される。

$$P\left(Z > \frac{u_0 + 0.15E(S_1)}{\sqrt{V(S_1)}}\right) = P(Z > 1.7678)$$

$$= \frac{0.025 - 0.050}{1.960 - 1.645}(1.768 - 1.645) + 0.05$$

$$= 0.040$$

（２）１クレームごとに100万円超の部分は50%の支払いとなることから、$x > 100$の場合は実際のクレーム額xに対して実際の支払額が、$100 + 0.5(x - 100) = 0.5x + 50$（$x > 100$）となる。

①平均値

クレーム件数の平均値は$n_2 = 5000 \times 0.02 = 100$、１クレームあたりの支払額期待値は

$$m_2 = \int_0^{100} x \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx + \int_{100}^\infty (0.5x + 50) \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx = 25\left(2 - e^{-2}\right)$$

よって、支払総額の期待値は$E(S_2) = m_2 \times n_2 = 2500\left(2 - e^{-2}\right)$となる。

②標準偏差

（１）と同様に、クレーム額の原点周りの２次モーメントから標準偏差を求める。

$$\int_0^{100} x^2 \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx + \int_{100}^{\infty} (0.5x + 50)^2 \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx = 5000 - 8750e^{-2} \quad \cdots \mathrm{B}$$

よって、標準偏差は、$\sqrt{V(S_2)} = \sqrt{n_2 \times B} = \sqrt{100\left(5000 - 8750e^{-2}\right)} = 250\sqrt{8 - 14e^{-2}}$ 万円である。

③破産確率

（１）と同様にして直線補間により確率を求めると、2.6%と計算される。

$$P\left(Z > \frac{u_0 + 0.15E\left(S_2\right)}{\sqrt{V\left(S_2\right)}} \right) = P\left(Z > \frac{500 + 0.15 \times 2500\left(2 - 0.368^2\right)}{250\sqrt{8 - 14 \times 0.368^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} &= P\left(Z > 1.942\right) \\ &= \frac{0.025 - 0.05}{1.960 - 1.645}\left(1.942 - 1.645\right) + 0.05 \\ &= 0.026 \end{aligned}$$

問題２.

Ⅳ.

（１）**（E）**　（２）**（A）**　　　　［（１）３点、（２）５点］

（１）

回収期待値Lは、エクセスポイントαとカバーリミットβを用いて、下式にて求められる。

$$L \quad = \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} (x-\alpha)\cdot f(x)dx + \int_{\alpha+\beta}^{\infty} \beta\cdot f(x)dx$$

現在の回収期待値L_1は、上式に$\alpha = 2$，$\beta = 3$，$f(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)^3$を代入して、

$$L_1 = \int_2^5 (x-2)\cdot 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 dx + \int_5^{\infty} 3\cdot 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 dx$$

$$= 2\int_2^5 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx - 4\int_2^5 \left(\frac{1}{x}\right)^3 dx + 6\int_5^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^3 dx$$

$$= 2\left[-\frac{1}{x}\right]_2^5 - 4\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]_2^5 + 6\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]_5^{\infty}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}\right) + 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}$$

$$= \frac{3}{10}$$

（２）

クレーム額増加後の元受支払保険金を$Y = 1.1X$とおくと、Yの確率密度関数は、

$$f(x) = 1.1^2\cdot 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 \quad 1.1 < x$$

となる。

そのため、回収期待値L_2は

$$L_2 = 1.1^2\left\{\int_2^{2+a} (x-2)\cdot 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 dx + \int_{2+a}^{\infty} a\cdot 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 dx\right\}$$

$$= 1.1^2\left\{2\int_2^{2+a} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx - 4\int_2^{2+a} \left(\frac{1}{x}\right)^3 dx + 2a\int_{2+a}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^3 dx\right\}$$

$$=1.1^2\cdot\left\{2\left[-\frac{1}{x}\right]_2^{2+a}-4\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]_2^{2+a}+2a\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]_{2+a}^{\infty}\right\}$$

$$=1.1^2\cdot\left\{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+a}\right)+2\left(\frac{1}{(2+a)^2}-\frac{1}{4}\right)+a\cdot\frac{1}{(2+a)^2}\right\}$$

$$=1.1^2\cdot\left\{\frac{1}{2}-\frac{2}{2+a}+\frac{2+a}{(2+a)^2}\right\}$$

$$=1.1^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+a}\right)$$

回収期待値$L_1=L_2$となるのは、

$$L_1=L_2$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{10}=1.1^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+a}\right)$$

これを解いて、$a=1.967\ldots$

問題２.

Ⅴ.

<u>（１）**（E）**（２）**（H）**</u>　　　　［（１）３点、（２）５点］

（１）

イ　正しい（テキスト 3-32)。

ロ　同文の説明は、一般化線形モデル（テキスト 4-18)。

ハ　同文の説明は、決定論的モデル（テキスト 5-25)。

（２）

ニ　逆が成り立つのは、$\left(X_1,\cdots,X_N\right)$の周辺分布が連続の場合（テキスト 10-32)。

ホ　正しくは$M_S(t)=\left(\frac{p}{1-(1-p)M_X(t)}\right)^r$（テキスト 2-14)。

へ　同文の説明は、凸リスク尺度（テキスト 10-50)。

問題３.

<u>（1）**（F）**（2）**（G）**</u>　　　［（1）４点、（2）７点］

（1）

保険金 X と保険金 Y の観察値を、それぞれ x と y とする。

事故番号が $i > j$ であるようなすべての $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ の組に対して、($x_i - x_j$, $y_i - y_j$) の符号を調べると、

(x, y)	(4, 6)	(16,18)	(33,45)	(3, 8)	(38,14)	(11,26)	(15,10)	(5, 7)
(4, 6)		(+, +)	(+, +)	(-, +)	(+, +)	(+, +)	(+, +)	(+, +)
(16,18)			(+, +)	(-, -)	(+, -)	(-, +)	(-, -)	(-, -)
(33,45)				(-, -)	(+, -)	(-, -)	(-, -)	(-, -)
(3, 8)					(+, +)	(+, +)	(+, +)	(+, -)
(38,14)						(-, +)	(-, -)	(-, -)
(11,26)							(+, -)	(-, -)
(15,10)								(-, -)
(5, 7)								

となる。よって、$sign((x_i - x_j)(y_i - y_j))$ を計算すると、

(x, y)	(4, 6)	(16,18)	(33,45)	(3, 8)	(38,14)	(11,26)	(15,10)	(5, 7)
(4, 6)		1	1	-1	1	1	1	1
(16,18)			1	1	-1	-1	1	1
(33,45)				1	-1	1	1	1
(3, 8)					1	1	1	-1
(38,14)						-1	1	1
(11,26)							-1	1
(15,10)								1
(5, 7)								

であることから、ケンドールの τ は、

$$\frac{2}{8 \cdot 7} \sum_{i > j} sign((x_i - x_j)(y_i - y_j)) = \frac{14}{28} = 0.5$$

（2）

生成作用素を $\phi(u) = (u^{-\alpha} - 1)/\alpha$ とするアルキメデス型コピュラは、$\phi^{-1}(u) = (\alpha\phi(u) + 1)^{-\frac{1}{\alpha}}$ より、

$C(u_1, u_2) = \left\{(u_1^{-\alpha} - 1) + (u_2^{-\alpha} - 1) + 1\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}$ である。また、ヒントより、ケンドールの τ は、

$$\tau = 4\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)} du + 1 = 4\int_0^1 \frac{1}{\alpha}(u^{\alpha+1} - u) du + 1 = \frac{4}{\alpha}\left[\frac{u^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{u^2}{2}\right]_0^1 + 1$$

$$= \frac{4}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{\alpha}{\alpha+2}$$

となることから、$\alpha/(\alpha+2) = 0.5$ より、$\alpha = 2.0$

以上から、$C(u_1, u_2) = (u_1^{-2} + u_2^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・①

続いて、

$$u_1 = P(X \leq 10) = \int_0^{10} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[-e^{-x/10}\right]_0^{10} = 1 - e^{-1} = 0.6321$$ ・・・・・・・・②

$$u_2 = P(Y \leq 10) = \int_5^{10} 50 y^{-3} dy = \left[-\frac{50}{2} y^{-2}\right]_5^{10} = 0.75$$ ・・・・・・・・・・・・・・③

ゆえに、①～③より、

$$P(X \leq 10, Y \leq 10) = C(0.6321, 0.75) = \left(0.6321^{-2} + 0.75^{-2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2.5028 + 1.7778 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.5521$$

よって、0.55