損保数理（問題）

次の問題１～問題３の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、消費税については考慮しないこととし、特に断りがないかぎり、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、また、各クレームは独立であるものとする。

問題１．（20 点）

Ｉ．2 種類の危険標識によって分類される 2×2 の複合分類リスクにおいて、ある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

＜エクスポージャ（E_{ij}）＞

	b_1	b_2	計
a_1	E_{11} ＝ 25	E_{12} ＝ 45	$E_{1.}$ ＝ 70
a_2	E_{21} ＝ 80	E_{22} ＝125	$E_{2.}$ ＝205
計	$E_{.1}$ ＝105	$E_{.2}$ ＝170	$E_{..}$ ＝275

＜クレーム総額（C_{ij}）＞

	b_1	b_2	計
a_1	C_{11} ＝ 250	C_{12} ＝ 585	$C_{1.}$ ＝ 835
a_2	C_{21} ＝ 650	C_{22}＝ 975	$C_{2.}$ ＝1,625
計	$C_{.1}$ ＝ 900	$C_{.2}$ ＝1,560	$C_{..}$ ＝2,460

この複合リスクの構造が加法型であると仮定して、2 つの危険標識について相対クレームコスト指数の推定値（$\hat{r}_{ij}$）を Minimum Bias 法により求めるとき、$\hat{r}_{21}$ の値は $\boxed{①}$ 、危険標識 a_1 に対応する料率係数 x_1 の値は $\boxed{②}$ である。ただし、危険標識 b_2 に対応する料率係数 y_2 は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数 $r_{.2}$ に等しいものと仮定する。なお、計算の途中において、クレームコスト指数および相対クレームコスト指数は、全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

（１）①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.810　（B）0.830　（C）0.850　（D）0.870　（E）0.890
（F）0.910　（G）0.930　（H）0.950　（I）0.970　（J）0.990

（２）②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.030　（B）0.190　（C）0.330　（D）0.510　（E）0.680
（F）0.820　（G）0.960　（H）1.140　（I）1.220　（J）1.340

II．ある保険会社において、過去 4 年間の事業年度iの商品 A のクレーム件数x_iと、商品 B のクレーム件数y_iは、下表のとおりであった。

事業年度i	1	2	3	4
商品 A のクレーム件数x_i	3	4	2	1
商品 B のクレーム件数y_i	1	5	3	2

B の過去 4 年間のクレーム件数yを、A の過去 4 年間のクレーム件数xで最小二乗法により線形回帰する。（yのxに関する線形回帰式は、$y=\alpha+\beta x$の形で表される。）次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）データの相関係数r_{xy}は ① 、残差変動は ② と計算される。

①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.33　（B）0.38　（C）0.43　（D）0.48　（E）0.53
（F）0.58　（G）0.63　（H）0.68　（I）0.73　（J）0.78

②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1.5　（B）2.3　（C）3.1　（D）3.9　（E）4.7
（F）5.5　（G）6.3　（H）7.1　（I）7.9　（J）8.7

（2）帰無仮説$H_0:\beta=0$を対立仮説 $H_1:\beta>0$に対し有意水準 5%で検定する。標本値から算出される検定統計量 T の値 ③ が、2.920（＝自由度 2 の t 分布 t(2)の上側 5%点）より小さいので、H_0 は ④ 。

③に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.63　（B）0.68　（C）0.73　（D）0.78　（E）0.83
（F）0.88　（G）0.93　（H）0.98　（I）1.03　（J）1.08

④に入る適切な言葉は、選択肢のうちのどれか。

（A）採択される　（B）棄却される

Ⅲ. 保険料算出原理について、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）下表は、期待値原理と標準偏差原理が、保険料算出原理に求められる各性質を満たすかどうかをまとめたものである。①から⑩に入る適切な記号は選択肢のうちのどれか。

	リスクプレミアムは非負	保険料は保険金の上限額以下	平行移動不変性	正の同次性	独立なリスクに対する加法性
期待値原理	①	②	③	④	⑤
標準偏差原理	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩

（A） ○（性質を満たしている）　　**（B）** ×（性質を満たしていない）

（2）エッシャー原理による保険料の算出値が存在しないような保険金の確率分布は、選択肢のうちのどれか。ただし、**（A）** から **（H）** のうち２つ以上の確率分布が該当する場合は、**（I）** のみを正解とする。

（A） 正規分布　**（B）** ポアソン分布　**（C）** 二項分布　**（D）** 負の二項分布
（E） 指数分布　**（F）** カイ２乗分布　**（G）** 対数正規分布　**（H）** 一様分布
（I）（A）から（H）のうち２つ以上の確率分布
（J） いずれにも該当しない

Ⅳ. ある保険会社は、次のポートフォリオを保有しているものとする。

※単位時間あたりのクレーム頻度 $q=0.8(\%)$

※契約件数 500 件

※クレーム総額は複合ポアソン過程に従う

※クレーム額分布の確率密度関数は、$f(x)=e^{-2x}+\dfrac{3}{2}e^{-3x}\,(x\geq 0)$

この保険会社は、このポートフォリオの保険金支払いに備えて、単位時間あたりのクレーム総額の期待値の 50%に当たる金額を期初のサープラスとして保有している。次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）Lundberg の不等式を用いて最も保守的に評価した破産確率を e^{-1} まで容認するとした場合、調整係数 R の下限に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.600　（B）0.750　（C）0.800　（D）1.000　（E）1.200
（F）1.350　（G）1.700　（H）2.400　（I）2.750　（J）3.000

（2）（1）の場合において、必要な安全割増率 θ に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.350　（B）0.800　（C）1.150　（D）1.550　（E）1.800
（F）1.950　（G）2.400　（H）2.650　（I）3.200　（J）3.400

問題 2．（40 点）

Ⅰ．保険期間 1 年のある保険の保険料率構成は以下のようになっているとする。

p	純保険料率	55%
α	新契約費率	5%
β	維持費率	20%
θ	代理店手数料率	15%
δ	利潤率	5%

この保険を保険期間 15 年としたときの一時払営業保険料 P' を、次の前提により算出する。

※ 利潤率および代理店手数料率は、保険期間 1 年における利潤率および代理店手数料率を使用する。

※ 予定利率を i=1.5%とする。各年度の支出は各年度初にすべて支払われると考える。

※ 支払保険金は初年度から 10 年度までは保険期間 1 年における金額と同水準であるが、11 年度から 15 年度は前年度に比べ毎年 ε =5%ずつ上昇していく。

※ 新契約費は初年度のみ支出され、維持費は 2 年度以降も毎年支出される。

※ 維持費は、保険料・保険金の大小に関わらず一定額が支出される定額部分と、支払保険金に比例して変動する部分から構成されており、保険期間 1 年の維持費は、それぞれがちょうど半分ずつになっている。

このとき、収支相等の原則を用いて保険期間 15 年の長期係数を求めたい。次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、$v=\dfrac{1}{1+i}$、$V=\dfrac{1+\varepsilon}{1+i}$ とする。

（1）保険期間 1 年の営業保険料を P とすると、維持費に関する支出の現価は、保険料・保険金の大小に関わらず一定額が支出される定額部分が $P\times($ ① $)\times($ ② $)$であり、
また、支払保険金に比例して変動する部分のうち、
初年度から 10 年度までの部分が $P\times($ ③ $)\times($ ④ $)$、
11 年度から 15 年度までの部分が $P\times($ ③ $)\times($ ⑤ $\times$ ⑥ $\times$ ⑦ $)$
となる。

①から④に入る適切な式（①と②の解答は順不同）は、選択肢のうちのどれか。ただし、解答にあたっては同じ記号を複数回使用してもよい。

（A）1　（B）$\dfrac{\beta}{2}$　（C）β　（D）$\dfrac{1-v^5}{1-v}$

（E）$\dfrac{1-v^{10}}{1-v}$　（F）$\dfrac{1-v^{15}}{1-v}$　（G）$\dfrac{1-V^5}{1-V}$　（H）$\dfrac{1-V^{10}}{1-V}$

（I）$\dfrac{1-V^{15}}{1-V}$　（J）いずれにも該当しない

⑤から⑦に入る適切な式（順不同）は、選択肢のうちのどれか。ただし、⑤から⑦に入る適切な式の組み合わせが選択肢にない場合は、⑤から⑦全ての欄に（J）をマークしなさい。

（A）v　（B）V　（C）v^5　（D）V^5

（E）v^9　（F）V^9　（G）$\dfrac{1-V^5}{1-V}$　（H）$\dfrac{1-V^9}{1-V}$

（I）$\dfrac{1-V^{10}}{1-V}$　（J）いずれを用いても表現できない

（2）保険期間 15 年の長期係数として最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）11.3　（B）11.7　（C）12.1　（D）12.5

（E）12.9　（F）13.3　（G）13.7　（H）14.1

（I）14.5　（J）14.9

Ⅱ. ある保険商品を販売している保険会社が、引受を行っている契約集団から下表のクレームデータを得た。次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

クレーム額の区間	クレーム件数
0 以上　10 未満	68
10 以上　20 未満	19
20 以上　30 未満	8
30 以上　40 未満	5

（1）この保険商品のクレーム額の平均と分散を、上表のデータからモーメント法で推定した際、クレーム額の分散の推定値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、クレームデータの各集計区間において、クレーム額の分布は一様分布であると仮定する。

（A）75　（B）76　（C）77　（D）78　（E）79
（F）80　（G）81　（H）82　（I）83　（J）84

（2）この保険商品のクレームデータを下表のとおり置き直した上で、帰無仮説「H_0:クレーム額が指数分布に従い、この指数分布の平均が（1）で推定した平均となる」をχ^2適合度検定により検定する場合、検定統計量Tに最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、計算の途中において、各区間の期待観測数は、小数点以下第1位を四捨五入して整数値を用いることとする。また、必要があれば$e^{-1} = 0.368$を使用すること。

クレーム額の区間	クレーム件数
0 以上　10 未満	68
10 以上　20 未満	19
20 以上　30 未満	8
30 以上	5

（A）0.20　（B）0.40　（C）0.60　（D）0.80　（E）1.00
（F）1.20　（G）1.40　（H）1.60　（I）1.80　（J）2.00

（3）（2）のχ^2適合度検定におけるp値（H_0が正しい場合に、検定統計量Tが（2）で解答した選択肢の数値より大きくなる確率）に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、自由度 n のχ^2分布の確率密度関数は$f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}\ (0<x)$であること、$e^{-0.1}=0.905$を使用すること。

（A）0.05　（B）0.15　（C）0.25　（D）0.35　（E）0.45
（F）0.50　（G）0.55　（H）0.65　（I）0.75　（J）0.85

Ⅲ. クレーム件数を N とし、個々のクレーム額 $X_1, X_2, ..., X_N$ がそれぞれ期待値 μ の指数分布に従うようなクレーム総額モデル $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$ を考える。次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）クレーム件数 N がパラメータ λ のポアソン分布に従う場合、クレーム総額 S の積率母関数は、
$M_S(t) = \exp($ ① $)$ である。

①に入る適切な式は、選択肢のうちのどれか。

（A）$\lambda(e^t - 1)$　（B）$1 - \lambda(e^t - 1)$　（C）$\dfrac{1}{1 - \lambda(e^t - 1)}$

（D）$\lambda \dfrac{t}{\mu - t}$　（E）$\lambda\left(\dfrac{t}{\mu} - 1\right)$　（F）$\lambda \dfrac{t\mu}{1 - t\mu}$

（G）$\lambda(1 - t\mu)$　（H）$\lambda \dfrac{1}{1 - t\mu}$　（I）$\lambda \dfrac{1 - t\mu}{t\mu}$

（J）いずれにも該当しない

（2）クレーム件数 N が幾何分布 $P(N = n) = p(1-p)^n$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ に従う場合、クレーム総額 S の積率母関数及び分布関数は、
$M_S(t) =$ ②
$F_S(x) = 1 -$ ③
となる。

②に入る適切な式は、選択肢のうちのどれか。

（A）$\dfrac{p}{p - t\mu}$　（B）$\dfrac{p(1-p)}{p - t\mu}$　（C）$\dfrac{p}{1 - (1-p)e^t}$

（D）$\dfrac{p(1 - t\mu)}{p - t\mu}$　（E）$\dfrac{p(\mu - t)}{p\mu - t}$　（F）$\dfrac{p}{1 + (1-p)(1 - t\mu)}$

（G）$\dfrac{1}{1 + (1-p)(1 - t\mu)}$　（H）$\dfrac{p}{(1 - t\mu)e^t}$　（I）$\dfrac{1}{p - t\mu}$

（J）いずれにも該当しない

③に入る適切な式は、選択肢のうちのどれか。

（ヒント：$M_S(t)=p\times\boxed{\mathrm{A}}+(1-p)\ \times\boxed{\mathrm{B}}$と式変形し、$\boxed{\mathrm{A}}$と$\boxed{\mathrm{B}}$が既知の分布の積率母関数となるようにできる。）

（A）$pe^{-\frac{p}{\mu}x}$　（B）$e^{-\frac{p}{\mu}x}$　（C）$(1-p)e^{-\mu x}$

（D）$(1-p)(1-e^{-\frac{p}{\mu}x})$　（E）$(1-p)e^{-\frac{p}{\mu}x}$　（F）$1-pe^{-\frac{p}{\mu}x}$

（G）$1-e^{-\frac{p}{\mu}x}$　（H）$1-(1-p)e^{-\mu x}$　（I）$1-(1-p)(1-e^{-\frac{p}{\mu}x})$

（J）$1-(1-p)e^{-\frac{p}{\mu}x}$　（K）いずれにも該当しない

Ⅳ. 免責金額が 100、支払限度額が 900 のある保険商品について、ランダムに選択された 6 件のクレーム額の実績値が以下のとおりであった。

307　900　367　900　504　35

損害額が指数分布に従っていると仮定し、この保険商品の免責金額を 250、支払限度額を 1,750 に変更した場合の 1 件当たりのクレーム額の期待値を推定することを考える。
なお、本問において、発生した 1 件の事故に対する「クレーム額」、「支払限度額」、「損害額」は次のとおりとし、また免責はすべてエクセス方式とする。

クレーム額：保険会社の支払う保険金の額
支払限度額：1 件当たりのクレーム額の限度額
損害額　　：免責金額や支払限度額を考慮しない、事故の損害の額

（したがって、損害額が免責金額以上となった時、「損害額－免責金額」と「支払限度額」のうち小さい方の金額が「クレーム額」となる。）
また、クレーム額の分布関数の設定および期待値の計算においては、保険会社の支払対象とならない事故については含めないものとする。

損害額を X とし、免責金額が 100、支払限度額が 900 の場合のクレーム額を Y とすると、Y の分布関数 $F_Y(y)$ は、

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & (y=0) \\ \dfrac{\boxed{\quad ① \quad}-\boxed{\quad ② \quad}}{1-\boxed{\quad ③ \quad}} & (0<y<900) \\ 1 & (y \geq 900) \end{cases}$$

となる。

X が期待値 μ の指数分布に従っているものと仮定し、最尤法を用いて推定した μ の推定値 $\hat{\mu}$ は、
$\hat{\mu}=\boxed{\quad ④ \quad}$ となる。
このパラメータ（上記④で選択した解答の値を用いること）を用いて、免責金額を 250、支払限度額を 1,750 とした場合の 1 件当たりのクレーム額の期待値を求めると、$\boxed{\quad ⑤ \quad}$ となる。
次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）①から③に入る適切な式は、選択肢のうちのどれか。ただし、解答にあたっては同じ記号を複数回使用してもよい。なお $F_X(x)$ は X の分布関数を表すものとする。

（A）1　（B）$F_X(0)$　（C）$F_X(100)$　（D）$F_X(900)$
（E）$F_X(1{,}000)$　（F）$F_X(y)$　（G）$F_X(y+100)$　（H）$F_X(y+900)$
（I）$F_X(y+1{,}000)$　（J）いずれにも該当しない

（２）④に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）550　（Ｂ）575　（Ｃ）600　（Ｄ）625
（Ｅ）650　（Ｆ）675　（Ｇ）700　（Ｈ）725
（Ｉ）750　（Ｊ）775

（３）⑤に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば$e^{-\frac{1}{3}}=0.717$, $e^{-\frac{1}{5}}=0.819$ を使用すること。

（Ａ）675　（Ｂ）700　（Ｃ）725　（Ｄ）750
（Ｅ）775　（Ｆ）800　（Ｇ）825　（Ｈ）850
（Ｉ）875　（Ｊ）900

V．ある保険における 1 契約者あたりの年間発生保険金は平均θ、分散bの正規分布に従い、θ自身も平均μ、分散aの正規分布に従うことがわかっている。
契約者Aの過去n年間の発生保険金が$\mathbf{x}=(x_1,\cdots\cdot x_n)$であったとき、ベイズ方法論を用いてこの契約者の純保険料を推定する。すなわち、$\Theta=\theta$の下での各年度の発生保険金X_iの確率密度関数$f_{X_i|\Theta}(x_i\,|\,\theta)$および$\Theta$の事前確率密度関数$\pi(\theta)$が、それぞれ$f_{X_i|\Theta}(x_i|\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2b}}$、$\pi(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2a}}$と表わされるときの、契約者Aの事後分布$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x})$を考察する。次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、発生保険金は負の値を取ってもよいものとする。

（1）契約者Aの事後分布$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x})$の分散は、選択肢のうちのどれか。

（A）$\dfrac{\frac{a}{n}+b}{ab}$　（B）$\dfrac{a+\frac{b}{n}}{ab}$　（C）$\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{n}$　（D）$\dfrac{a+b}{n}$　（E）$\dfrac{a+\frac{1}{b}}{n}$

（F）$\dfrac{\frac{1}{a}+b}{n}$　（G）$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{n}{b}\right)^{-1}$　（H）$\left(\dfrac{n}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^{-1}$　（I）$\left(\dfrac{a}{b}+n\right)^{-1}$　（J）$\left(\dfrac{b}{a}+n\right)^{-1}$

（K）いずれにも該当しない

（2）契約者Aの事後分布$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x})$の平均は、$\mu\times(1-Z)+\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\times Z$と表すことができる。Zとして正しい式は、選択肢のうちのどれか。

（A）$\dfrac{b}{an+b}$　（B）$\dfrac{an}{an+b}$　（C）$\dfrac{a}{a+bn}$　（D）$\dfrac{bn}{a+bn}$　（E）$\dfrac{ab}{ab+n}$

（F）$\dfrac{n}{ab+n}$　（G）$\dfrac{a}{a+b+n}$　（H）$\dfrac{b}{a+b+n}$　（I）$\dfrac{n}{a+b+n}$　（J）$\dfrac{a+b}{a+b+n}$

（K）$\dfrac{a+n}{a+b+n}$　（L）$\dfrac{b+n}{a+b+n}$　（M）いずれにも該当しない

問題3.（40 点）

I．以下のような累計支払保険金実績データのある保険種目に関して、2009 年度末の支払備金（＝「最終累計発生保険金の合計」－「2009 年度末の累計支払保険金の合計」）の評価を行うことを考える。なお、この保険種目は第 4 経過年度で保険金の支払を完了する（支払備金が残らない）ものとし、累計支払保険金のロスディベロップメント・ファクターの予測値には、既知の事故年度別ロスディベロップメント・ファクターを単純平均した値を用いるものとする。

また、計算の途中において、ロスディベロップメント・ファクターについては小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用い、保険金・支払備金については小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用いるものとする。なお、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜事故年度別　累計支払保険金の推移＞

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2006 年度	1,187	3,035	4,232	4,990
2007 年度	1,160	3,303	4,016	
2008 年度	1,343	3,501		
2009 年度	1,384			

次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）チェイン・ラダー法を用いて評価を行うことを考える。2007 年度、2008 年度、2009 年度に用いられる累積ロスディベロップメント・ファクター（＝各事故年度における、最新の累計支払保険金に対する最終累計発生保険金の比率）は、それぞれ、$\boxed{\quad ① \quad}$、$\boxed{\quad ② \quad}$、$\boxed{\quad ③ \quad}$ であり、2009 年度末の支払備金は $\boxed{\quad ④ \quad}$ である。

①から③に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1.000　（B）1.179　（C）1.312　（D）1.539
（E）2.012　（F）2.500　（G）3.316　（H）4.108
（I）5.170　（J）7.003

④に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）4,800　（B）5,150　（C）5,500　（D）5,850
（E）6,200　（F）6,550　（G）6,900　（H）7,250
（I）7,600　（J）7,950

（2）実績データの十分性に疑義があるため、さらにボーンヒュッター・ファーガソン法を用いて評価を行うこととした。
事故年度ごとの最終累計発生保険金の当初予測値を、下表の既経過保険料および予定損害率から算出するものとすると、ボーンヒュッター・ファーガソン法による 2009 年度末の支払備金は $\boxed{⑤}$ となる。

事故年度	既経過保険料	予定損害率
2006 年度	9,115	55%
2007 年度	9,771	55%
2008 年度	10,023	60%
2009 年度	10,331	60%

⑤に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、計算に用いる累積ロスディベロップメント・ファクターについては（1）の①から③で解答した選択肢の数値を用いるものとする。

（A）4,800　（B）5,150　（C）5,500　（D）5,850
（E）6,200　（F）6,550　（G）6,900　（H）7,250
（I）7,600　（J）7,950

Ⅱ. 満期返戻金W、保険期間n年、一時払契約の積立保険について、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、期始払年金現価率を$\ddot{a}_{\overline{n}|}$とし、予定契約消滅率qを考慮した現価率、期始払年金現価率をそれぞれϕ、$\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}$とする。

（1）第t保険年度末の払戻積立金${}_tV'$として正しいものは、選択肢のうちのどれか。なお、${}_tV$は回払契約（年払契約）で平準式積立保険料を採用した場合の第t年度末の払戻積立金とする。

（A）${}_tV' = {}_tV + W\phi^n \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$　（B）${}_tV' = {}_tV + W\phi^{n-t} \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$

（C）${}_tV' = {}_tV + W \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$　（D）${}_tV' = {}_tV + W\phi^n \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$

（E）${}_tV' = {}_tV + W\phi^{n-t} \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$　（F）${}_tV' = {}_tV + W \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$

（G）${}_tV' = {}_tV + W\phi^n \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}$　（H）${}_tV' = {}_tV + W\phi^{n-t} \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}$

（I）${}_tV' = {}_tV + W \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}$　（J）${}_tV' = {}_tV + W\phi^n \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} + \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}$

（K）${}_tV' = {}_tV + W\phi^{n-t} \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} + \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}$　（L）${}_tV' = {}_tV + W \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} + \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}$

（M）いずれにも該当しない

（2）第 1 保険年度から第t保険年度末の間に全損失効となった契約に支払った返戻金の第t保険年度末の終価として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

（A）$\dfrac{W\phi^{n-t}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\left(\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n}|}\right) - \left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$　（B）$\dfrac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\left(\phi^{-t}\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n}|}\right) - \left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$

（C）$\dfrac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\left(\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n}|}\right) - \phi^{-t}\left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$　（D）$\dfrac{W\phi^{n-t}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\left(\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n}|}\right) - \left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$

（E）$\dfrac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\left(\phi^{-t}\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n}|}\right) - \left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$　（F）$\dfrac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\left(\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n}|}\right) - \phi^{-t}\left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$

（G）$\dfrac{W\phi^{n-t}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n-t}|}\right)$　（H）$\dfrac{W\phi^{n-t}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\left(\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)$

（I）$\dfrac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\left(\phi^{-t}\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n-t}|}\right) - \left(\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$　（J）$\dfrac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\left(\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n-t}|}\right) - \phi^{-t}\left(\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$

（K）$\dfrac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\left(\phi^{-t}\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n-t}|}\right) - \left(\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$　（L）$\dfrac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\left(\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n-t}|}\right) - \phi^{-t}\left(\ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\right)$

（M）いずれにも該当しない

Ⅲ．効用関数が $u(x)=-e^{-0.15x}$ である契約者が、期初に30の富を持っている。この契約者が保有するリスク X は、複合負の二項分布に従うものとし、そのクレーム件数分布は確率関数 $f(n)=\binom{1+n}{n}\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ $(n=0,1,2\cdots)$ で表わされる負の二項分布、クレーム額分布は平均 2 の指数分布であるとする。次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）この契約者が、保険を買わない場合の効用に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）$-11.75e^{-4.5}$ （B）$-12e^{-4.5}$ （C）$-12.25e^{-4.5}$ （D）$-12.5e^{-4.5}$ （E）$-12.75e^{-4.5}$
（F）$-13e^{-4.5}$ （G）$-13.25e^{-4.5}$ （H）$-13.5e^{-4.5}$ （I）$-13.75e^{-4.5}$ （J）$-14e^{-4.5}$

（2）この契約者がリスクを移転するために支払う保険料の上限に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要な場合は $\log 2=0.693$ 、$\log 3=1.099$ 、$\log 7=1.946$ を使用すること。

（A）16.1 （B）16.3 （C）16.5 （D）16.7 （E）16.9
（F）17.1 （G）17.3 （H）17.5 （I）17.7 （J）17.9

Ⅳ. 連続時間型破産確率モデルの初期サープラスをuとし、破産が発生し、かつ破産直後の欠損額がy以上である確率を$G(u,y)$とする。また、クレーム総額過程は複合ポアソン過程とし、ポアソンパラメータをλ、個々のクレーム額の分布関数を$F(x)=1-e^{-\frac{x}{\mu}}$とする。このとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1） $\dfrac{\partial}{\partial u}G(u,y)$を表す式として正しいものは、選択肢のうちのどれか。なお、cは単位時間あたりの収入保険料を表す。

(A) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^u G(u-x,y)dF(x)-\int_{u+y}^{\infty}dF(x)\right)$

(B) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^u G(u-x,y)dF(x)-\int_{u}^{\infty}dF(x)\right)$

(C) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^{u+y} G(u,y)dF(x)-\int_{u}^{\infty}dF(x)\right)$

(D) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^{u+y} G(u,y)dF(x)-\int_{u+y}^{\infty}dF(x)\right)$

(E) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^{u+y} G(u-x,u)dF(x)-\int_{u}^{\infty}dF(x)\right)$

(F) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^{u+y} G(u-x,u)dF(x)-\int_{u+y}^{\infty}dF(x)\right)$

(G) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^{u} G(u,y)dF(x)-\int_{u}^{\infty}dF(x)\right)$

(H) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^{u} G(u,y)dF(x)-\int_{u+y}^{\infty}dF(x)\right)$

(I) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^{u} G(u-x,u+y)dF(x)-\int_{u+y}^{\infty}dF(x)\right)$

(J) $\dfrac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^{u} G(u-x,u+y)dF(x)-\int_{u}^{\infty}dF(x)\right)$

(K) いずれにも該当しない

（2） 安全割増率を$\theta(>0)$、破産確率を$\varepsilon(u)$とした場合、存続確率$\rho(u)=1-\varepsilon(u)$は微分方程式$\rho''(u)=\alpha\rho'(u)$を満たす。αとして正しい式は、選択肢のうちのどれか。

(A) $-\dfrac{\theta\mu}{1+\theta}$ **(B)** $\dfrac{\theta\mu}{1+\theta}$ **(C)** $-\dfrac{\mu}{1+\theta}$ **(D)** $\dfrac{\mu}{1+\theta}$ **(E)** $-\dfrac{\mu}{1+\theta\mu}$

(F) $\dfrac{\mu}{1+\theta\mu}$ **(G)** $-\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu}$ **(H)** $\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu}$ **(I)** $-\dfrac{\mu}{(1+\theta)\theta}$ **(J)** $\dfrac{\mu}{(1+\theta)\theta}$

(K) いずれにも該当しない

（3） $\theta=0.5$、$\mu=2$、$u=9$ とした場合の存続確率 $\rho(u)=1-\varepsilon(u)$ に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば $e^{-1}=0.368$ を使用すること。

（A）0.67　（B）0.69　（C）0.71　（D）0.73　（E）0.75
（F）0.77　（G）0.79　（H）0.81　（I）0.83　（J）0.85

V．ある保険会社は k 件の火災保険を引き受けており、各契約の保険金額 A は、確率密度関数が $f(a)=\frac{1}{20}\ (10\le a\le 30)$ で表わされる一様分布に従うとみなすことができるものとする。また、各契約の年間クレーム件数 N は平均 2 のポアソン分布に従い、$A=a$ の条件の下での元受クレーム額 X は、確率密度関数が $f(x)=\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1}\quad(0\le x\le\beta)$ で表わされる分布に従うものとする。ここで、$\beta=a$、$\gamma=\frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}$ とする。

この保険会社の保有限度額は 10 であり、以下の特約再保険を手配している。

① 出再限度額 10 の超過額再保険

② エクセスポイント 10、カバーリミット 10 の超過損害額再保険（①を適用後の保有部分に適用される）

このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）超過額再保険の年間再保険金期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）3.00k　（B）3.05k　（C）3.10k　（D）3.15k　（E）3.20k

（F）3.25k　（G）3.30k　（H）3.35k　（I）3.40k　（J）3.45k

（2）$A=\alpha\ (20\le\alpha\le 30)$ の契約において、超過損害額再保険からの回収が 1 年間に発生する確率は、選択肢のうちのどれか。

（A）$-\log\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}$　（B）$\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}-2}-3$　（C）$\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}-1}-1$

（D）$\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}-2}-2$　（E）$\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}-1}-1$　（F）$1-\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}$

（G）$1-e^{\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-1}$　（H）$1-e^{2\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-2}$　（I）$e-e^{2\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-1}$

（J）$e^{-1}-e^{\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-2}$　（K）いずれにも該当しない

以上

損保数理（解答）

問題1．

Ⅰ．

（1）（C）　（2）（C）

（1）

各リスク区分ごとのクレームコスト $R_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$ および相対クレームコスト指数 $r_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$ を計算すると、

＜クレームコスト R_{ij} ＞

	b_1	b_2	計
a_1	10	13	11.929
a_2	8.125	7.8	7.927
計	8.571	9.176	8.945

＜相対クレームコスト指数 r_{ij} ＞

	b_1	b_2	計
a_1	1.118	1.453	1.334
a_2	0.908	0.872	0.886
計	0.958	1.026	1

相対クレームコスト指数の推定値 $\hat{r}_{ij}$ としたとき、Minimum Bias 法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=0$

$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$

$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=0$

$E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$

この連立方程式において、C を定数として、

$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})=E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=C$

$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=-C$

と表すことができる。この複合分類リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、$\hat{r}_{ij}=x_i+y_j\ \ (i=1,2\quad j=1,2)$ と表される。

これを、上記連立方程式に代入して整理すると、

$x_1 + y_1 = r_{11} - C/E_{11} \cdots (a)$，$x_1 + y_2 = r_{12} + C/E_{12} \cdots (b)$

$x_2 + y_1 = r_{21} + C/E_{21} \cdots (c)$，$x_2 + y_2 = r_{22} - C/E_{22} \cdots (d)$

となる。

$(a)+(d)=(b)+(c)$ より、

$$(r_{11} - \frac{C}{E_{11}}) + (r_{22} - \frac{C}{E_{22}}) = (r_{12} + \frac{C}{E_{12}}) + (r_{21} + \frac{C}{E_{21}})$$

であり、各 E_{ij}, r_{ij} を代入して C について解くと、$C = -4.4849$。

これを代入して、$\hat{r}_{21} = 0.852$

（2）

$x_1 = \hat{r}_{12} - y_2 = 1.3533 - 1.026 = 0.3273$

問題１.

Ⅱ.

（１）①（**E**）②（**G**）　（２）③（**F**）④（**A**）（③、④は完答）

（１）

$\bar{x},\bar{y}$ をそれぞれ $x_i, y_i (i=1,2,3,4)$ の平均値とすると $\bar{x}=2.5, \bar{y}=2.75$ となる。

相関係数の定義より

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2}} = 0.52915$$

決定係数 $R^2 = r_{xy}^2$ 、$R^2 = 1-\frac{残差変動}{全変動}$ 、全変動 $=\sum_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2 = 8.75$ より、残差変動 $= 6.3$

（２）

$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i^2 - 4\cdot\bar{x}^2}{4}}$ 、$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i^2 - 4\cdot\bar{y}^2}{4}}$ とすると $s_x{}^2 = 1.25, s_y{}^2 = 2.1875$ となる。

y を x で回帰した線形回帰式の係数の推定値は正規方程式を解くことにより各々 $\hat{\alpha}=1, \hat{\beta}=0.7$ で表されることがわかる。

誤差分散の推定量を $\hat{\sigma}^2$ とすると $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}(1-r_{xy}{}^2)ns_y{}^2 = 3.15$ より、

$$T = \frac{\hat{\beta}-\beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2}}} = 0.881917$$

これが、ｔより大きい場合、H_0 を棄却し、そうでない場合は H_0 を採択する。

問題１．

Ⅲ．

（１）①（A）②（B）③（B）④（A）⑤（A）（①～⑤は完答）

⑥（A）⑦（B）⑧（A）⑨（A）⑩（B）（⑥～⑩は完答）

（２）（G）

（１）

テキスト 7-6 のとおり。

（２）

テキスト 7-10 より、積率母関数が存在しない対数正規分布については、エッシャー原理による算出値は存在しない。

問題１.

Ⅳ.

<u>（１）（Ｅ）　（２）（Ｃ）</u>

（１）

題意より、クレーム件数Nのパラメータλは、

$\lambda = E(N) = 0.008 \times 500 = 4$

クレーム額の期待値は、

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x(e^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-3x})dx = \frac{5}{12}$$

よって、クレーム総額Ｓの期待値は、

$$E(S) = 4 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{3}$$

従って初期サープラス$u_0 = \frac{5}{3} \times 50\% = \frac{5}{6}$

Lundbergの不等式$\varepsilon(u_0) \le e^{-Ru_0}$と題意より、

$\varepsilon(\frac{5}{6}) \le e^{-1}$、したがって、$R \ge \frac{6}{5}$となる。

（２）

クレーム額の積率母関数は、

$$M_X(r) = \int_0^\infty e^{rx}(e^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-3x})dx = \int_0^\infty (e^{(r-2)x} + \frac{3}{2}e^{(r-3)x})dx$$

$$= \left[\frac{1}{r-2}e^{(r-2)x}\right]_0^\infty + \left[\frac{3}{2(r-3)}e^{(r-3)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2-r} + \frac{3}{2(3-r)}$$

調整係数の方程式$\lambda + \lambda\mu(1+\theta)r = \lambda M_X(r)$に代入し、

$$4 + 4 \cdot \frac{5}{12}(1+\theta)\frac{6}{5} = 4\left(\frac{1}{2-\frac{6}{5}} + \frac{3}{2\left(3-\frac{6}{5}\right)}\right)$$

$$\theta = \frac{7}{6}$$

問題2．

Ⅰ．

（1）① ② **（B）（F）**（順不同） ③ **（B）** ④ **（E）**

⑤ ⑥ ⑦ **（B）（E）（G）**（順不同）

（2）**（F）**

（1）

問題の仮定から、支出（維持費（定額部分）の現価）＝ $\mathrm{P}\times\frac{\beta}{2}\times\left(\frac{1-\mathrm{v}^{15}}{1-\mathrm{v}}\right)$ となる

（1 年間で負担する維持費が $P\times\beta$ のため、題意からこのうちの定額部分、支払保険金に比例する部分がそれぞれ $P\times\frac{\beta}{2}$ となる。保険料は 15 年間同額であることから定額部分の維持費の現価は

$P\times\frac{\beta}{2}\times\left(\frac{1-v^{15}}{1-v}\right)$）。

また、10 年度までの支払保険金に比例する部分の維持費の現価は、定額部分と同様に考えると $P\times\frac{\beta}{2}\times\left(\frac{1-v^{10}}{1-v}\right)$ となる。一方、支払保険金は 11 年目以降、ε 分ずつ上昇すると考えているため、11 年度から 15 年度までの支払保険金に比例する部分の維持費の現価は $\mathrm{P}\times\frac{\beta}{2}\times\left(\mathrm{v}^9\mathrm{V}\frac{1-\mathrm{V}^5}{1-\mathrm{V}}\right)$ となる。

（2）

維持費以外で、この保険に関する収支は以下のように考えられる。

収入（保険料の現価）＝ P'

支出（保険金の現価）＝ $P\times p\times\left(\frac{1-v^{10}}{1-v}+v^9V\frac{1-V^5}{1-V}\right)$

支出（代理店手数料部分の現価）＝ $P'\times\theta$

支出（利潤部分の現価）＝ $P'\times\delta$

（1）の結果および上記を踏まえ、収支相等の原則を考えると、長期係数 K は以下のように求められる。

$$K=\frac{\alpha+\frac{\beta}{2}\times\left(\frac{1-v^{15}}{1-v}\right)+\left(p+\frac{\beta}{2}\right)\times\left(\frac{1-v^{10}}{1-v}+v^9V\frac{1-V^5}{1-V}\right)}{1-(\theta+\delta)}$$

これに与えられた数字を代入すると 13.3･･･。

問題２．

Ⅱ．

（１）（Ｅ）　（２）（Ｆ）　（３）（Ｇ）

（１）

クレーム額をＸとすると、

$$E(X)=\int_0^{10}\frac{68}{100}\cdot\frac{x}{10-0}dx+\int_{10}^{20}\frac{19}{100}\cdot\frac{x}{20-10}dx+\int_{20}^{30}\frac{8}{100}\cdot\frac{x}{30-20}dx+\int_{30}^{40}\frac{5}{100}\cdot\frac{x}{40-30}dx$$

$$=\left[\frac{68}{200}\cdot\frac{10^2-0^2}{10-0}\right]+\left[\frac{19}{200}\cdot\frac{20^2-10^2}{20-10}\right]+\left[\frac{8}{200}\cdot\frac{30^2-20^2}{30-20}\right]+\left[\frac{5}{200}\cdot\frac{40^2-30^2}{40-30}\right]=10$$

$$E(X^2)=\int_0^{10}\frac{68}{100}\cdot\frac{x^2}{10-0}dx+\int_{10}^{20}\frac{19}{100}\cdot\frac{x^2}{20-10}dx+\int_{20}^{30}\frac{8}{100}\cdot\frac{x^2}{30-20}dx+\int_{30}^{40}\frac{5}{100}\cdot\frac{x^2}{40-30}dx$$

$$=\left[\frac{68}{300}\cdot\frac{10^3-0^3}{10-0}\right]+\left[\frac{19}{300}\cdot\frac{20^3-10^3}{20-10}\right]+\left[\frac{8}{300}\cdot\frac{30^3-20^3}{30-20}\right]+\left[\frac{5}{300}\cdot\frac{40^3-30^3}{40-30}\right]=179.333...$$

従って、$V(X)=79.333...$

（２）

$100\int_0^{10}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}=100\left(e^{-\frac{0}{10}}-e^{-\frac{10}{10}}\right)=100\left(1-e^{-1}\right)\fallingdotseq 63$ であり、同様に

$100\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}=100\left(e^{-1}-e^{-2}\right)\fallingdotseq 23$、$100\int_{20}^{30}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}=100\left(e^{-2}-e^{-3}\right)\fallingdotseq 9$、

$100\int_{30}^{\infty}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}=100e^{-3}\fallingdotseq 5$ となる。

従って検定統計量Tは　$\frac{(68-63)^2}{63}+\frac{(19-23)^2}{23}+\frac{(8-9)^2}{9}+\frac{(5-5)^2}{5}\fallingdotseq 1.20$

（３）

$$f(x)=\int_T^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{4-2}{2}}\Gamma(\frac{4-2}{2})}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{4-2}{2}-1}dx=\int_T^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx\fallingdotseq e^{-0.6}\fallingdotseq 0.55$$

問題２．

Ⅲ．

<u>（１）（F）　（２）②（D）③（E）</u>

（１）

クレーム総額Sの積率母関数は、

$$M_S(t)=E(e^{tS})=E(E(e^{t(X_1+\cdots+X_N)}\big|N))=E_N(M_X(t)^N)=E_N(e^{N\log M_x(t)})=M_N(\log M_X(t))$$

$$M_X(t)=\frac{1}{1-t\mu}$$

$$M_N(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

を代入すると、

$$M_S(t)=e^{\lambda(\exp(\log M_X(t)-1)}=e^{\lambda(M_X(t)-1)}=e^{\lambda\frac{t\mu}{1-t\mu}}$$

（２）

$$M_X(t)=\frac{1}{1-t\mu}$$

$$M_N(t)=\frac{p}{1-(1-p)e^t}$$

を代入すると、

$$M_S(t)=\frac{p}{1-(1-p)M_X(t)}=\frac{p(1-t\mu)}{p-t\mu}$$

これを変形すると、

$$M_S(t)=p\cdot1+(1-p)\cdot\frac{p}{p-t\mu}$$

となり、クレーム総額Sの積率母関数は、1と$\dfrac{p}{p-t\mu}$との加重平均となっていることが分かる。1は確率1で0となる確率変数の積率母関数、$\dfrac{p}{p-t\mu}$は期待値$\dfrac{\mu}{p}$の指数分布の積率母関数である。よって、

クレーム総額Sの分布関数は、それぞれの分布関数の加重平均により、

$$F_S(x)=p\cdot1+(1-p)\cdot(1-e^{-\frac{p}{\mu}x})=1-(1-p)e^{-\frac{p}{\mu}x}$$

問題２．

Ⅳ．

（１）①（G）　②（C）　③（C）　（①～③は完答）

（２）（I）　（３）（A）

（１）

損害額を X とし、免責金額が 100、支払限度額が 900 の場合のクレーム額を Y とすると以下の関係が成り立つ。

$$Y=\begin{cases}\text{定義されない}, X\leq 100\\ X-100, 100<X\leq 1{,}000\\ 900, X>1{,}000\end{cases}$$

また Y の分布関数は

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, y=0\\ \dfrac{F_X(y+100)-F_X(100)}{1-F_X(100)}, 0<y<900\\ 1, y\geq 900\end{cases}$$

（２）

Y の分布関数および問題の前提から、Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ は

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{f_X(y+100)}{1-F_X(100)}, 0\leq y<900\\ \dfrac{1-F_X(1{,}000)}{1-F_X(100)}, y=900\\ 0, y>900\end{cases}$$ と表される。

尤度関数を $L(\mu)$ で表し、クレーム額の実績値を $(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)=(35,307,367,504,900,900)$ と並び替えると、

$$L(\mu)=\left(\prod_{i=1}^{4}\frac{f_X(y_i+100)}{1-F_X(100)}\right)\left(\prod_{i=5}^{6}\frac{1-F_X(1{,}000)}{1-F_X(100)}\right)=\frac{(1-F_X(1{,}000))^2}{(1-F_X(100))^6}\cdot\left(\prod_{i=1}^{4}f_X(y_i+100)\right)$$

$$=\frac{(1-F_X(1{,}000))^2}{(1-F_X(100))^6}\cdot\frac{1}{\mu^4}\cdot e^{-\frac{1{,}613}{\mu}}=e^{-\frac{1{,}400}{\mu}}\cdot\frac{1}{\mu^4}\cdot e^{-\frac{1{,}613}{\mu}}$$

となる。

題意より推定値 $\hat{\mu}$ を最尤法によって求めるので、$\dfrac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu)=-\dfrac{4}{\mu}+\dfrac{3{,}013}{\mu^2}=0$ が推定値 $\hat{\mu}$ の満たす方程式となる。この方程式を解くと $\hat{\mu}=753.2\cdots$

（3）

求めるべきクレーム額の期待値は$E(\min(2{,}000, X)-\min(X,250)|X>250)$となる。したがって

$$（与式）=\frac{1}{1-F_X(250)}\left\{\int_{250}^{\infty}\min(x,2{,}000)f_X(x)dx-\int_{250}^{\infty}\min(x,250)f_X(x)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{1-F_X(250)}\left\{\int_{250}^{2{,}000}\frac{x}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}dx+2{,}000(1-F_X(2{,}000))-250(1-F_X(250))\right\}$$

$$=e^{\frac{250}{\mu}}\left(\mu\cdot e^{-\frac{250}{\mu}}-\mu\cdot e^{-\frac{2{,}000}{\mu}}\right)=\mu\left(1-e^{-\frac{1{,}750}{\mu}}\right)$$

よって、（2）の解答$\hat{\mu}=750$をμに代入すると

$$750\cdot\left(1-e^{-\frac{1{,}750}{750}}\right)=750\times\left(1-e^{-\frac{7}{3}}\right)=750\times(1-0.097147\cdots)=676.9\cdots$$

問題２.

Ｖ.

（１）**(G)**　（２）**(B)**

（１）

$$\pi_{\Theta|X}(\theta|X) \propto \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{2b}-\frac{(\theta-\mu)^2}{2a}\right)=\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{n}{b}+\frac{1}{a}\right)-\theta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{b}+\frac{\mu}{a}\right)\right)$$

上記から、事後分布は正規分布に従うことがわかり、その分散は$\left(\frac{1}{a}+\frac{n}{b}\right)^{-1}$であることがわかる。

（２）

$$\pi_{\Theta|X}(\theta|X) \propto \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{n}{b}+\frac{1}{a}\right)-\theta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{b}+\frac{\mu}{a}\right)\right)\propto \exp\left(-\left(\frac{1}{2a}+\frac{n}{2b}\right)\left(\theta-\frac{a\sum_{i=1}^{n}x_i+\mu b}{an+b}\right)^2\right)$$

従って、事後分布$\pi_{\Theta|X}(\theta|X)$の平均は

$$\frac{a\sum_{i=1}^{n}x_i+\mu b}{an+b}=\frac{an}{an+b}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{b}{an+b}\mu$$

となるので、$Z=\frac{an}{an+b}$であることがわかる。

問題３．

Ⅰ．

（１）① **(B)**　② **(D)**　③ **(H)**　④ **(G)**　（２）**(I)**

（１）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2006 年度	1, 187	3, 035	4, 232	4, 990
2007 年度	1, 160	3, 303	4, 016	
2008 年度	1, 343	3, 501		
2009 年度	1, 384			

ロス・ディベロップメント・ファクターを計算すると

経過年度	1→2	2→3	3→4
ＬＤＦ	2. 670	1. 305	1. 179

2006 年度は第 4 経過年度まで達しているため、ディベロップメント・ファクターは 1 となり、2007 年度から 2009 年度は各々、ディベロップメント・ファクターは 1. 179、1. 539･･･、4. 109･･･となる。これらを各事故年度の直近実績保険金額に乗じると、予想最終発生保険金は 4, 990、4, 735、5, 388、5, 687 となる。したがって、支払備金は

$$(4{,}990+4{,}735+5{,}388+5{,}687)-(4{,}990+4{,}016+3{,}501+1{,}384)=6{,}909$$

となる。

（２）

与えられた既経過保険料と予定損害率から、予測発生損害額は 5, 013、5, 374、6, 014、6, 199 となる。

これより、第 1 事故年度は $\left(1-\dfrac{1}{1}\right)\times 5{,}013+4{,}990=4{,}990$

第 2 事故年度は $\left(1-\dfrac{1}{1.179}\right)\times 5{,}374+4{,}016=4{,}832$

第 3 事故年度は $\left(1-\dfrac{1}{1.539}\right)\times 6{,}014+3{,}501=5{,}607$

第 4 事故年度は $\left(1-\dfrac{1}{4.108}\right)\times 6{,}199+1{,}384=6{,}074$

が、各事故年度のボーンヒュッター・ファーガソン法による予想最終発生保険金となる。

したがって支払備金は

$$(4{,}990+4{,}832+5{,}607+6{,}074)-(4{,}990+4{,}016+3{,}501+1{,}384)=7{,}612$$

となる。

問題３.

Ⅱ.

<u>（１）**（A）**　（２）**（B）**</u>

（１）

テキスト 6-16、6-19 のとおり（証明略）。

（２）

テキスト 6-19、6-20 のとおり（証明略）。

問題3.

Ⅲ.

（1）（C）　（2）（D）

（1）

$$M_Y(t)=\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}+ty}dy=\frac{1}{1-2t}$$

$$M_N(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}\binom{1+n}{n}\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{0.25}{1-0.75e^t}\right)^2$$

から、

$$M_X(t)=\left(\frac{0.25}{1-0.75M_Y(t)}\right)^2=\left(\frac{0.25}{1-\frac{0.75}{1-2t}}\right)^2$$

また、$E(u(30-X))=E(-e^{-0.15(30-X)})=-e^{-4.5}E(e^{0.15X})=-e^{-4.5}M_X(0.15)$ であることから

$$E(u(30-X))=-e^{-4.5}\left(\frac{0.25}{1-\frac{0.75}{0.7}}\right)^2=-12.25e^{-4.5}$$

（2）

求める保険料をＰとすると、保険を買った場合の効用が $u(30-P))=-e^{-0.15(30-P)}=-e^{-4.5}e^{0.15P}$ となることから、

$$-e^{-4.5}e^{0.15P}=-e^{-4.5}\left(\frac{0.25}{1-\frac{0.75}{0.7}}\right)^2$$

$$e^{0.15P}=12.25$$

$$P=\frac{Log12.25}{0.15}=\frac{(2Log(7)-2Log(2))}{0.15}\fallingdotseq 16.71$$

問題３.

Ⅳ.

(1) **(A)**　(2) **(G)**　(3) **(J)**

(1)

$$G(u,y)=(1-\lambda\Delta t)G(u+c\Delta t,y)+\lambda\Delta t\int_0^{u+c\Delta t}G(u+c\Delta t-x,y)dF(x)+\lambda\Delta t\int_{u+c\Delta t+y}^{\infty}dF(x)$$

$$\frac{G(u+c\Delta t,y)-G(u,y)}{c\Delta t}=\frac{\lambda}{c}(G(u+c\Delta t,y)-\int_0^{u+c\Delta t}G(u+c\Delta t-x,y)dF(x)-\int_{u+c\Delta t+y}^{\infty}dF(x))$$

$\Delta t\to 0$ とすることで、

$$\frac{\partial}{\partial u}G(u,y)=\frac{\lambda}{c}\left(G(u,y)-\int_0^u G(u-x,y)dF(x)-\int_{u+y}^{\infty}dF(x)\right)$$

(2)

$\varepsilon(u)=G(u,0)$ なので、

$$\varepsilon'(u)=\frac{\lambda}{c}\left(\varepsilon(u)-\int_0^u\varepsilon(u-x)dF(x)-\int_u^{\infty}dF(x)\right)$$

$$\rho'(u)=\frac{\lambda}{c}\left(\rho(u)-\int_0^u\rho(u-x)dF(x)\right)$$

$$\rho'(u)=\frac{\lambda}{c}\left(\rho(u)-\frac{1}{\mu}\int_0^u\rho(u-x)e^{-\frac{x}{\mu}}dx\right)=\frac{1}{(1+\theta)\mu}\left(\rho(u)-\frac{1}{\mu}e^{-\frac{u}{\mu}}\int_0^u\rho(x)e^{\frac{x}{\mu}}dx\right)\cdot\cdot ①$$

$$\rho''(u)==\frac{1}{(1+\theta)\mu}\left(\rho'(u)+\frac{1}{\mu^2}e^{-\frac{u}{\mu}}\int_0^u\rho(x)e^{\frac{x}{\mu}}dx-\frac{1}{\mu}\rho(u)\right)\cdot\cdot ②$$

①、②より、$\rho''(u)=-\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu}\rho'(u)$

(3)

$\rho''(u)=-\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu}\rho'(u)$ を解くと、

$\rho(u)=C_1e^{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}}+C_2$ であり、$\rho(0)=1-G(0,0)=\dfrac{\theta}{1+\theta}$、$\rho'(0)=\dfrac{1}{(1+\theta)\mu}\rho(0)=\dfrac{\theta}{(1+\theta)^2\mu}$ から、

$C_1=-\dfrac{1}{1+\theta}$ および $C_2=1$ となる。

$$\rho(u)=1-\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}}=1-\frac{1}{1.5}e^{-1.5}\fallingdotseq 0.85$$

問題３．

Ｖ．

（１）（Ｆ）　（２）（Ｈ）

（１）

１契約あたりの年間保険金期待値は、

$$2\times\int_0^{\beta}x\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1}dx=2\times\frac{\beta\gamma}{\gamma+1}=2\times\frac{a\dfrac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}}{\dfrac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}+1}=2\times\sqrt{a}$$

$10\le A\le 20$ のとき、１契約あたりの超過額再保険の再保険期待値は、

$$\int_{10}^{20}\frac{1}{10}\times 2\times\sqrt{a}\times\frac{a-10}{a}da$$

$$=\int_{10}^{20}\left(\frac{\sqrt{a}}{5}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)da=\left[\frac{2a^{\frac{3}{2}}}{15}-4a^{\frac{1}{2}}\right]_{10}^{20}\fallingdotseq 2.4698$$

同様に、$20\le A\le 30$ のとき、１契約あたりの超過額再保険の再保険期待値は、

$$\int_{20}^{30}\frac{1}{10}\times 2\times\sqrt{a}\times\frac{10}{a}da=\int_{20}^{30}\frac{2}{\sqrt{a}}da=\left[4a^{\frac{1}{2}}\right]_{20}^{30}\fallingdotseq 4.020$$

となる。従って、超過額再保険の年間再保険金期待値は、

$$P(10\le A\le 20)\times\int_{10}^{20}\frac{1}{10}\times 2\times\sqrt{a}\times\frac{a-10}{a}da\times \mathrm{k}+P(20\le A\le 30)\times\int_{20}^{30}\frac{1}{10}\times 2\times\sqrt{a}\times\frac{10}{a}da\times \mathrm{k}\fallingdotseq 3.25\,\mathrm{k}$$

（２）

$A=\alpha$ の場合の超過額再保険出再率は $\dfrac{10}{\alpha}$ となるので、超過額再保険の適用は元受クレーム額が

$10\times\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{10}{\alpha}}\right)=\dfrac{10\alpha}{\alpha-10}$ 以上となる場合に、超過損害額再保険の回収が適用される。

この確率は、$\displaystyle\int_{\frac{10\alpha}{\alpha-10}}^{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1}dx=\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma}\right]_{\frac{10\alpha}{\alpha-10}}^{\alpha}=1-\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}$

従って、１年間に超過損害額再保険の回収が発生しない確率は、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}e^{-2}\cdot\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{-2\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}}\cdot\left(2\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}\right)^{n}e^{2\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}}e^{-2}=e^{2\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-2}$$

よって、１年間に超過損害額再保険の回収が発生する確率は $1-e^{2\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-2}$