数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　（６０点）

（１）A, B, C の３人がこの順番（$ABCABC\cdots$）でサイコロ投げを繰り返し、１または２の目を出した者を勝ちと定める。３人のうち最初に１人が勝った後は、引き続き残りの２人がサイコロ投げを繰り返すとき、最初に A が勝つ確率は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、最初に A または C が勝った後、２番目に B が勝つ確率は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

(A) $\dfrac{1}{19}$　(B) $\dfrac{2}{19}$　(C) $\dfrac{3}{19}$　(D) $\dfrac{4}{19}$　(E) $\dfrac{5}{19}$

(F) $\dfrac{6}{19}$　(G) $\dfrac{7}{19}$　(H) $\dfrac{8}{19}$　(I) $\dfrac{9}{19}$　(J) $\dfrac{10}{19}$

（２）確率変数 X, Y の結合確率密度関数を

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & (0<x<1,\ 0<y<1)\\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases}$$

とする。$Z=X+Y$ であるとき、Z の確率密度関数は、

$$g(z)=\begin{cases}\boxed{\quad ① \quad} & (0<z\le 1)\\ \boxed{\quad ② \quad} & (1<z<2)\\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases}$$

である。

(A) $\dfrac{-9z^3+27z^2-20z+4}{3}$　(B) $\dfrac{-4z^3+10z^2-4z}{3}$　(C) $\dfrac{-2z^3+12z-8}{3}$

(D) $\dfrac{-z^3+z^2+2z}{3}$　(E) $\dfrac{-z^3+9z^2-6z}{3}$　(F) $\dfrac{z^3+z}{3}$

(G) $\dfrac{2z^3-4z^2-4z+8}{3}$　(H) $\dfrac{2z^3}{3}$　(I) $\dfrac{4z^3-2z}{3}$

(J) いずれにも該当しない

（3）確率変数X, Yが互いに独立で、ともに標準正規分布$N(0,1)$に従うとき、確率ベクトル(X,Y)の積率母関数$\phi(\theta_1,\theta_2)$は ① である。また、$U=\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y$、$V=\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y$とするとき、確率ベクトル$(U,V)$の積率母関数$\psi(\theta_1,\theta_2)$は ② である。

（A）$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1+\theta_2)^2\right]$　（B）$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right]$　（C）$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1-\theta_2)^2\right]$

（D）$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1^2-\theta_2^2)\right]$　（E）$\exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)^2\right]$　（F）$\exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right]$

（G）$\exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2\right]$　（H）$\exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1^2-\theta_2^2)\right]$　（I）$\exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)^2\right]$

（J）$\exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1^2-\theta_2^2)^2\right]$

（4）確率変数X_i（$i=1,\cdots,n$）は互いに独立で、すべて平均λの指数分布に従うとき、確率変数$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$の標準偏差は ① である。また、中心極限定理より、

$P\{|Y-E(Y)|\leq 0.2E(Y)\}\geq 0.9$となるための最小の$n$は ② である。

（A）$\frac{n}{\lambda^2}$　（B）$\frac{\sqrt{n}}{\lambda}$　（C）$\sqrt{n}\lambda$　（D）$n\lambda$　（E）$n\lambda^2$

（F）30　（G）42　（H）57　（I）68　（J）85

（5）確率変数X, Yの結合確率密度関数が

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^3\exp\{-x(1+y)\}\quad(0<x<\infty,0<y<\infty)$$

であるとき、Xの平均は ① であり、Yの平均は ② である。また、X, Yの相関係数は ③ である。

[①、②の選択肢]

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) 1　(E) $\frac{4}{3}$

(F) $\frac{7}{4}$　(G) 2　(H) $\frac{19}{9}$　(I) $\frac{8}{3}$　(J) 3

[③の選択肢]

(A) $-\frac{3}{4}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{3}$　(D) $-\frac{2}{9}$

(E) $\frac{2}{9}$　(F) $\frac{1}{3}$　(G) $\frac{1}{2}$　(H) $\frac{3}{4}$

(6) 区間(a,b)の一様分布に従う母集団から次の標本値を得た。モーメント法によりa,b $(a<b)$を推定すると、aに最も近い数値は[①]であり、bに最も近い数値は[②]である。

2.6 , 3.2 , −1.3 , 0.8 , 4.7

(A) −1.58　(B) −1.50　(C) −1.41　(D) −1.35　(E) −1.30

(F) 4.70　(G) 5.30　(H) 5.41　(I) 5.50　(J) 5.58

(7) あるメーカーの同じ種類の缶ジュースを無作為に5本選択し、中身の量を測定したところ、次のとおりであった。ただし、測定の誤差が無視できないものとし、この分散が0.06 (ml^2)と、多くのくり返しにより推定されていたものとする。

200.7 , 198.9 , 199.9 , 201.2 , 199.4 (単位 ml)

次に改めて、同じ種類の缶ジュースを無作為に100本選択し、すべて一緒にして漏れなく十分大きな容器へ移し変えた。その容器の中のジュースの量の分散（測定の誤差分散は除く）について区間推定を行ったとき、信頼係数を95％とした場合の信頼区間の下限に最も近い数値は[①]ml^{2}であり、上限に最も近い数値は[②]ml^{2}である。

(A) 21　(B) 25　(C) 31　(D) 33　(E) 37

(F) 416　(G) 718　(H) 724　(I) 730　(J) 899

（8）n を3以上の整数とする。14n 人の子どものうち、8n 人にインフルエンザの予防接種を施した。その後、インフルエンザに罹患した子どもの数と罹患しなかった子どもの数を調べたところ、下表の結果を得た。このとき、「有意水準1％で予防接種の効果がある」といえるための最小の n は [ ] である。

A \ B	B_1（インフルエンザに罹患しなかった）	B_2（インフルエンザに罹患した）	計
A_1（予防接種を施した）	$5n$	$3n$	$8n$
A_2（予防接種を施さなかった）	$2n$	$4n$	$6n$
計	$7n$	$7n$	$14n$

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

（E）7　（F）8　（G）9　（H）10

（9）ある学力テストの受験者から100人を無作為に抽出して、数学の得点と英語の得点の相関関係を調査したところ、相関係数は r であった。また、このテストにおける受験者全体の数学の得点と英語の得点の相関係数を z 変換を用いて区間推定したところ、信頼係数を95%とした場合の信頼区間の下限が0.7616 であった。このとき、r に最も近い数値は [ ] である。

（A）0.8227　（B）0.8233　（C）0.8325　（D）0.8334

（E）0.8690　（F）0.8702　（G）0.8836　（H）0.8850

（10）(x,y) のデータが下表のとおり与えられている。このデータから、ロジットモデル $y=\dfrac{e^{\alpha+\beta x}}{1+e^{\alpha+\beta x}}(\beta>0)$ を用いた回帰式を求めると、α に最も近い数値は [①] であり、β に最も近い数値は [②] である。

x	1.2	2.2	2.7	4.5	4.9
y	10%	20%	50%	90%	90%

（A）-9.7　（B）-3.8　（C）-2.8　（D）-0.7　（E）-0.2

（F）.0.2　（G）0.6　（H）1.0　（I）1.3　（J）2.1

（１１）A,B,C,D という４つの小さな部屋があり、それぞれが互いに通路でつながっている。この部屋のどこかに虫を入れて各部屋間をどのように移動するか観察する。ただし、A および B の部屋には粘着剤が設置されているため、虫が A または B の部屋にいる場合は、虫はその後そこから移動せずにその部屋にとどまる。

また、次の２つのことが分かっている。

ア）虫が C の部屋にいる場合、１分後に A,B,C,D の部屋にいる確率はそれぞれ $\frac{2}{7},\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{7}$ である。

イ）虫が D の部屋にいる場合、１分後に A,B,C,D の部屋にいる確率はそれぞれ $\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{4}{7}$ である。

虫が、現在の部屋から１分後にどの部屋へ移動するのかを表す推移確率行列を

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

と表すとすれば、$(p_{32},p_{43})=$ ($\boxed{①}$, $\boxed{②}$) である。

また、無作為に C または D の部屋に虫を１匹入れて、十分な時間をおいて観察したところ、その虫が A の部屋にいた。このとき、虫を入れた部屋が C の部屋であった確率は $\boxed{③}$ である。

【ヒント】４行４列行列 P の左上２行２列行列が単位行列 E、右上２行２列行列が零行列 O である、すなわち $P=\begin{pmatrix} E & O \\ U & R \end{pmatrix}$（$U,R$ は２行２列行列）と表される場合、$P^n=\begin{pmatrix} E & O \\ (E-R^n)(E-R)^{-1}U & R^n \end{pmatrix}$ となる。

[①、②の選択肢]

(A) 0　(B) $\frac{1}{7}$　(C) $\frac{2}{7}$　(D) $\frac{3}{7}$

(E) $\frac{4}{7}$　(F) $\frac{5}{7}$　(G) $\frac{6}{7}$　(H) 1

[③の選択肢]

(A) $\frac{3}{7}$　(B) $\frac{4}{9}$　(C) $\frac{5}{11}$　(D) $\frac{6}{13}$

(E) $\frac{7}{13}$　(F) $\frac{6}{11}$　(G) $\frac{5}{9}$　(H) $\frac{4}{7}$

（１２） X を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とする。$|X|$ の値を、平均1の指数分布に従う確率変数 Y および区間 $(0,1)$ の一様分布に従う確率変数 U を用いて棄却法で生成したい。$|X|$ の値を生成するときの反復回数が最小になるようにしてシミュレーションを行うとき、下表の Y および U のシミュレーション結果から生成される $|X|$ の値の平均値に最も近い数値は $\boxed{}$ である。なお、U の対数の値は付表に指定したものを用いること。

Y	1.7	0.2	0.5	2.0	2.8
U	0.8	0.4	0.1	0.6	0.2

（A） 0.35　　（B） 0.54　　（C） 0.90　　（D） 1.10

（E） 1.38　　（F） 1.44　　（G） 2.17　　（H） 2.25

問題2． 表の出る確率が p （$0<p<1$）である硬貨を無限に投げ続けるとき、初めて n 回続けて表が出るまでに投げた回数を表す確率変数を X_n とする。このとき、次の（1）、（2）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。（２０点）

（1） $n=2$ のケースを考える。

硬貨を k 回続けて投げるとき、２回続けては表が出ない確率 q_k は、初めて２回続けて表が出るまでに投げた回数を表す確率変数 X_2 を用いて、[①]と表すことができる。

さて、q_k は、$k\geq 2$ のとき、次の２つの排反な事象に関する確率の和として捉えることができる。すなわち、

事象Ⅰ：１回目に[②]が出て、残りの $k-1$ 回のうちに２回続けては表が出ないという事象

事象Ⅱ：１回目に[③]、２回目に[④]が出て、残りの $k-2$ 回のうちに２回続けては表が出ないという事象

したがって、q_k に関する漸化式 $q_k=$ [⑤] $q_{k-1}+$ [⑥] q_{k-2} （$k\geq 2$）が成立する。

ここで、$p=\dfrac{2}{3}$ のとき、$q_k=$ [⑦] （$k\geq 0$）である。

（2） $n=3$ のケースを考える。

硬貨を k 回続けて投げるとき、３回続けては表が出ない確率を r_k とすれば、$n=2$ のケースと同様に考えて、r_k に関する漸化式 $r_k=$ [⑧] $r_{k-1}+$ [⑨] $r_{k-2}+$ [⑩] r_{k-3} （$k\geq 3$）が成立する。

以下、初めて３回続けて表が出るまでに投げた回数を表す確率変数 X_3 の平均値 $E(X_3)$ を求める。
まず、X_3 は離散的確率変数であることから、次式が成立する。

$$E(X_3)=\sum_{l=1}^{\infty} l\cdot P(X_3=l)、\qquad r_k=\sum_{l=k+1}^{\infty} P(X_3=l)$$

したがって、$E(X_3)$ は r_k を用いて次のように表すことができる。

$E(X_3)=$ [⑪]

さらに、r_k に関する漸化式を利用すれば、$E(X_3)$ は p を用いて表すことができる。

ここで、$p=\dfrac{1}{3}$ のとき、$E(X_3)=$ [⑫]である。

[①の選択肢]

(A) $P(X_2 < k)$　(B) $P(X_2 \le k)$　(C) $P(X_2 > k)$　(D) $P(X_2 \ge k)$

(E) $P(X_2 = k)$　(F) $1 - P(X_2 = k)$

[②、③、④の選択肢]

(A) 表　(B) 裏

[⑤、⑥、⑧、⑨、⑩の選択肢]

(A) p　(B) $1-p$　(C) p^2　(D) $p(1-p)$

(E) $(1-p)^2$　(F) p^3　(G) $p^2(1-p)$　(H) $p(1-p)^2$

[⑦の選択肢]

(A) $\frac{4}{5}\left(\frac{4}{3}\right)^k + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$　(B) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{k+1} + 5\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$　(C) $2\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}$

(D) $\frac{2}{7}\left(-\frac{2}{3}\right)^k + \frac{5}{7}\left(\frac{5}{3}\right)^k$　(E) $-\frac{2}{5}\left(-\frac{4}{3}\right)^k + \frac{7}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^k$　(F) $\frac{8}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{1}{7}\left(-\frac{5}{3}\right)^k$

(G) $\frac{16}{11}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} - \frac{5}{11}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$　(H) $\frac{21}{13}\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1} - \frac{8}{13}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}$

[⑪の選択肢]

(A) $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$　(B) $\sum_{k=2}^{\infty} r_k$　(C) $\sum_{k=3}^{\infty} r_k$　(D) $\sum_{k=4}^{\infty} r_k$

(E) $\sum_{k=1}^{\infty} r_k + 3$　(F) $\sum_{k=2}^{\infty} r_k + 3$　(G) $\sum_{k=3}^{\infty} r_k + 3$　(H) $\sum_{k=4}^{\infty} r_k + 3$

[⑫の選択肢]

(A) 20　(B) 24　(C) 27　(D) 30

(E) 39　(F) 48　(G) 54　(H) 60

問題3． 母分散が等しく互いに独立な２つの正規母集団（母平均、母分散ともに未知）がある。これら両母集団からの標本値を用いて、尤度比検定法により両者の母平均の差を検定したい。このとき、次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

注：以下の各問において、次のとおり記号を定義する。

μ_x、μ_y	：２つの正規母集団の母平均（未知）
σ^2	：２つの正規母集団で同一の母分散（未知）
$x_i (i=1,\cdots,n_x)$	：正規母集団 $N(\mu_x,\sigma^2)$ からの標本値
$y_i (i=1,\cdots,n_y)$	：正規母集団 $N(\mu_y,\sigma^2)$ からの標本値
$\bar{x}$、$\bar{y}$	：$\bar{x}=\dfrac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x}x_i$、$\bar{y}=\dfrac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y}y_i$
s_x^2、s_y^2	：$s_x^2=\dfrac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2$、$s_y^2=\dfrac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2$

（１）　帰無仮説 $H_0:\mu_x=\mu_y$ を対立仮説 $H_1:\mu_x\neq\mu_y$ に対して検定するために、まず帰無仮説と対立仮説の両仮説における母数 μ_x、μ_y、σ^2 の最尤推定値を求める。

標本値として $x_i (i=1,\cdots,n_x)$ と $y_i (i=1,\cdots,n_y)$ を用いる場合、母数 μ_x、μ_y、σ^2 に関する尤度関数 l は、

$$l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)=\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\boxed{\quad ② \quad})^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\boxed{\quad ③ \quad})^2\right\}\right]$$

となるので、帰無仮説 $H_0:\mu_x=\mu_y=\mu$ のもとでの母数 μ、σ^2 の最尤推定値は、それぞれ

$\hat{\mu}=\boxed{\quad ④ \quad}$、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n_x+n_y}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\boxed{\quad ⑤ \quad})^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\boxed{\quad ⑤ \quad})^2\right\}$$

である。

同様に、対立仮説$H_1 : \mu_x \neq \mu_y$のもとでの母数μ_x、μ_y、σ^2の最尤推定値は、それぞれ

$$\tilde{\mu}_x = \boxed{⑥}、\quad \tilde{\mu}_y = \boxed{⑦}、$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n_x + n_y}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \boxed{⑧})^2 + \sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \boxed{⑨})^2\right\}$$

である。

（2）次に、（1）の結果をもとに、尤度比検定法を用いて検定するときの棄却域を求める。
棄却域R_kは、尤度比λを用いて、

$$R_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n_x}, y_1, y_2, \cdots, y_{n_y}); \lambda \leq k\} \qquad (k \text{ は定数})$$

によって与えられる。ここで、尤度比λは（1）の尤度関数lおよび最尤推定値を用いて、

$$\lambda = \frac{\boxed{⑩}}{\boxed{⑪}}$$

である。さらに、（1）の最尤推定値の結果を代入すれば、

$$\boxed{⑩} = \left(\boxed{⑫}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}} \exp\left(\boxed{⑬}\right)$$

と表され、また、$\boxed{⑪}$についても、同様の式で表されることから、

$$\lambda = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \boxed{⑭})^2 + \sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \boxed{⑮})^2}{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \boxed{⑯})^2 + \sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \boxed{⑰})^2}\right\}^{\frac{n_x+n_y}{2}}$$

となる。ここで

$$\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i - \boxed{⑯}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i - \boxed{⑭}\right)^2 + n_x \cdot \boxed{⑱}$$

であり、$\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i - \boxed{⑰}\right)^2$についても同様であるから、

$$\lambda = \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n_x + n_y - 2}} \right)^{\frac{n_x + n_y}{2}} \qquad \left(\text{ただし} \quad t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\boxed{\quad ⑲ \quad} \cdot \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \right)}} \right)$$

と変形できる。したがって、領域 R_k は、

$$\left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_{n_x}, y_1, y_2, \cdots, y_{n_y}) ; |t| \geq K \right\} \qquad (K \text{は定数})$$

なる領域と等しくなる。

一方、統計値 t を実現する統計量 T は、$H_0 : \mu_x = \mu_y$ なる条件の下で自由度 $\phi = \boxed{\quad ⑳ \quad}$ の t・分布に従うので、有意水準 ε の両側検定を行うには、$|t| > t_\phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ のとき H_0 を棄却すればよい。

[①、⑫の選択肢]

(A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$　(B) $\frac{1}{2\pi\sigma^2}$　(C) $\frac{1}{\sigma^2}$　(D) $\frac{1}{\pi\hat{\sigma}^2}$

(E) $\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}$　(F) $\frac{1}{\hat{\sigma}}$　(G) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}}$　(H) $\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}^2}$

(I) $\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}}$　(J) $\frac{1}{\pi}$

[②、③の選択肢]

(A) μ_x　(B) μ_y　(C) $\frac{\mu_x + \mu_y}{2}$　(D) $\mu_x + \mu_y$

(E) $\sqrt{\mu_x \cdot \mu_y}$　(F) $2\sqrt{\mu_x \cdot \mu_y}$　(G) $\frac{n_x\mu_x + n_y\mu_y}{n_x + n_y}$　(H) $\frac{n_y\mu_x + n_x\mu_y}{n_x + n_y}$

(I) $\frac{n_y}{n_x}\mu_x + \frac{n_x}{n_y}\mu_y$　(J) $\frac{n_x}{n_y}\mu_x + \frac{n_y}{n_x}\mu_y$

[④～⑨の選択肢]

(A) $\overline{x}$　(B) $\overline{y}$　(C) $\dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$　(D) $\overline{x}+\overline{y}$

(E) $\sqrt{\overline{x}\cdot\overline{y}}$　(F) $2\sqrt{\overline{x}\cdot\overline{y}}$　(G) $\dfrac{n_x\overline{x}+n_y\overline{y}}{n_x+n_y}$　(H) $\dfrac{n_y\overline{x}+n_x\overline{y}}{n_x+n_y}$

(I) $\dfrac{n_y}{n_x}\overline{x}+\dfrac{n_x}{n_y}\overline{y}$　(J) $\dfrac{n_x}{n_y}\overline{x}+\dfrac{n_y}{n_x}\overline{y}$　(K) $\dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{n_x+n_y}$　(L) $\dfrac{\overline{x}}{n_x}+\dfrac{\overline{y}}{n_y}$

[⑩、⑪の選択肢]

(A) $l(\hat{\mu},\hat{\mu},\tilde{\sigma}^2)$　(B) $l(\tilde{\mu}_x,\tilde{\mu}_y,\hat{\sigma}^2)$　(C) $l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)$　(D) $l(\tilde{\mu}_x,\tilde{\mu}_y,\tilde{\sigma}^2)$

(E) $l(\tilde{\mu}_x,\tilde{\mu}_y,\sigma^2)$　(F) $l(\mu_x,\mu_y,\tilde{\sigma}^2)$　(G) $l(\mu,\mu,\sigma^2)$　(H) $l(\hat{\mu},\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$

(I) $l(\hat{\mu},\hat{\mu},\sigma^2)$　(J) $l(\mu,\mu,\hat{\sigma}^2)$

[⑬の選択肢]

(A) n_x+n_y　(B) $\dfrac{n_x+n_y}{2}$　(C) $\dfrac{n_x+n_y}{3}$　(D) $-\dfrac{n_x+n_y}{2}$

(E) $-\dfrac{n_x+n_y}{3}$　(F) $\dfrac{2n_x\cdot n_y}{n_x+n_y}$　(G) $\dfrac{n_x+n_y}{n_x\cdot n_y}$　(H) $-n_x\cdot n_y$

[⑭～⑰の選択肢]

(A) $\overline{x}$　(B) $\overline{y}$　(C) $\dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$　(D) $2\sqrt{\overline{x}\cdot\overline{y}}$

(E) $\overline{x}+\overline{y}$　(F) $\dfrac{n_y}{n_x}\overline{x}$　(G) $\dfrac{n_x}{n_y}\overline{y}$　(H) $\dfrac{n_y}{n_x}\overline{x}+\dfrac{n_x}{n_y}\overline{y}$

(I) $\dfrac{n_x\overline{x}+n_y\overline{y}}{n_x+n_y-2}$　(J) $\dfrac{n_x\overline{x}+n_y\overline{y}}{n_x+n_y}$　(K) $n_x\overline{x}+n_y\overline{y}$　(L) $\dfrac{n_x\overline{x}+n_y\overline{y}}{n_x\cdot n_y}$

[⑱の選択肢]

(A) $\left(\dfrac{n_x\bar{x}-n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2$　(B) $\left(\dfrac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2$　(C) $\left\{\dfrac{\bar{x}+\bar{y}}{n_x+n_y}\right\}^2$　(D) $\left\{\dfrac{n_y(\bar{x}+\bar{y})}{n_x+n_y}\right\}^2$

(E) $\dfrac{1}{(n_x+n_y)^2}$　(F) $\left\{\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{n_x+n_y}\right\}^2$　(G) $\left\{\dfrac{n_x(\bar{x}-\bar{y})}{n_x+n_y}\right\}^2$　(H) $\left\{\dfrac{n_y(\bar{x}-\bar{y})}{n_x+n_y}\right\}^2$

[⑲の選択肢]

(A) $\dfrac{s_x^2+s_y^2}{n_x+n_y-2}$　(B) $\dfrac{s_x^2+s_y^2}{n_x+n_y}$　(C) $\dfrac{n_xs_x^2+n_ys_y^2}{n_x+n_y-2}$　(D) $\dfrac{n_ys_x^2+n_xs_y^2}{n_x+n_y-1}$

(E) $\dfrac{n_ys_x^2+n_xs_y^2}{n_x+n_y}$　(F) $\dfrac{s_x^2}{n_x}+\dfrac{s_y^2}{n_y}$　(G) $n_y\dfrac{s_x^2}{n_x}+n_x\dfrac{s_y^2}{n_y}$　(H) $\dfrac{n_xs_x^2+n_ys_y^2}{n_x+n_y}$

[⑳の選択肢]

(A) n_x-n_y+2　(B) n_x-n_y+1　(C) $n_x\cdot n_y-n_x-n_y$　(D) n_x+n_y-2

(E) n_x+n_y-1　(F) n_x+n_y　(G) n_x+n_y+1　(H) $n_x^2+n_y^2$

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon) \to \varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi_{\varphi}^{2}(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
36	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812
37	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833
38	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814
39	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252	104.2149
80	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163	128.2989
100	67.3276	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067	140.1695

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側ε点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon=$ 0.100

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon=$ 0.050

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon=$ 0.025

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon=$ 0.010

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon=$ 0.005

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数の値 $\log(k)$

k	log(k)
0.1	-2.30
0.2	-1.61
0.3	-1.20
0.4	-0.92
0.5	-0.69
0.6	-0.51
0.7	-0.36
0.8	-0.22
0.9	-0.11
1.0	0.00

VI.　z-変換表

r を　$z = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+r}{1-r}$ より読む表

この表に記載されていないzに対応するrは直線補間することにより求めるものとする。

z	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0599	0.0699	0.0798	0.0898
0.1*	0.0997	0.1096	0.1194	0.1293	0.1391	0.1489	0.1586	0.1684	0.1781	0.1877
0.2*	0.1974	0.2070	0.2165	0.2260	0.2355	0.2449	0.2543	0.2636	0.2729	0.2821
0.3*	0.2913	0.3004	0.3095	0.3185	0.3275	0.3364	0.3452	0.3540	0.3627	0.3714
0.4*	0.3799	0.3885	0.3969	0.4053	0.4136	0.4219	0.4301	0.4382	0.4462	0.4542
0.5*	0.4621	0.4699	0.4777	0.4854	0.4930	0.5005	0.5080	0.5154	0.5227	0.5299
0.6*	0.5370	0.5441	0.5511	0.5581	0.5649	0.5717	0.5784	0.5850	0.5915	0.5980
0.7*	0.6044	0.6107	0.6169	0.6231	0.6291	0.6351	0.6411	0.6469	0.6527	0.6584
0.8*	0.6640	0.6696	0.6751	0.6805	0.6858	0.6911	0.6963	0.7014	0.7064	0.7114
0.9*	0.7163	0.7211	0.7259	0.7306	0.7352	0.7398	0.7443	0.7487	0.7531	0.7574
1.0*	0.7616	0.7658	0.7699	0.7739	0.7779	0.7818	0.7857	0.7895	0.7932	0.7969
1.1*	0.8005	0.8041	0.8076	0.8110	0.8144	0.8178	0.8210	0.8243	0.8275	0.8306
1.2*	0.8337	0.8367	0.8397	0.8426	0.8455	0.8483	0.8511	0.8538	0.8565	0.8591
1.3*	0.8617	0.8643	0.8668	0.8692	0.8717	0.8741	0.8764	0.8787	0.8810	0.8832
1.4*	0.8854	0.8875	0.8896	0.8917	0.8937	0.8957	0.8977	0.8996	0.9015	0.9033
1.5*	0.9051	0.9069	0.9087	0.9104	0.9121	0.9138	0.9154	0.9170	0.9186	0.9201
1.6*	0.9217	0.9232	0.9246	0.9261	0.9275	0.9289	0.9302	0.9316	0.9329	0.9341
1.7*	0.9354	0.9366	0.9379	0.9391	0.9402	0.9414	0.9425	0.9436	0.9447	0.9458
1.8*	0.9468	0.9478	0.9488	0.9498	0.9508	0.9517	0.9527	0.9536	0.9545	0.9554
1.9*	0.9562	0.9571	0.9579	0.9587	0.9595	0.9603	0.9611	0.9618	0.9626	0.9633
2.0*	0.9640	0.9647	0.9654	0.9661	0.9667	0.9674	0.9680	0.9687	0.9693	0.9699
2.1*	0.9705	0.9710	0.9716	0.9721	0.9727	0.9732	0.9737	0.9743	0.9748	0.9753
2.2*	0.9757	0.9762	0.9767	0.9771	0.9776	0.9780	0.9785	0.9789	0.9793	0.9797
2.3*	0.9801	0.9805	0.9809	0.9812	0.9816	0.9820	0.9823	0.9827	0.9830	0.9833
2.4*	0.9837	0.9840	0.9843	0.9846	0.9849	0.9852	0.9855	0.9858	0.9861	0.9863
2.5*	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0.9876	0.9879	0.9881	0.9884	0.9886	0.9888
2.6*	0.9890	0.9892	0.9895	0.9897	0.9899	0.9901	0.9903	0.9905	0.9906	0.9908
2.7*	0.9910	0.9912	0.9914	0.9915	0.9917	0.9919	0.9920	0.9922	0.9923	0.9925
2.8*	0.9926	0.9928	0.9929	0.9931	0.9932	0.9933	0.9935	0.9936	0.9937	0.9938
2.9*	0.9940	0.9941	0.9942	0.9943	0.9944	0.9945	0.9946	0.9947	0.9949	0.9950

以上

数学（解答例）

問題１

（１）

１回のサイコロ投げで１または２の目が出る事象をT、その他の目が出る事象をT^cとする。

$P(T)=\frac{1}{3}$、$P(T^c)=\frac{2}{3}$

$ABCABC\cdots$の順番でサイコロ投げを繰り返すとき、最初にAが勝つ確率$P_{ABC}(A)$は、

1）１巡目にAが勝つ確率

2）２巡目に突入し、２巡目以降にAが勝つ確率

の合計であることから、

$$P_{ABC}(A)=P(T)+P(T^c)^3 P_{ABC}(A)$$

これを解いて、

$$P_{ABC}(A)=\frac{9}{19}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$P_{ABC}(A)$は、第k巡目にAが勝つ確率を合計したものと考え、次のように無限等比級数の和として捉えることができる。

$$\begin{aligned}P_{ABC}(A)&=P(T)+P(T^c)^3P(T)+P(T^c)^6P(T)+\cdots+P(T^c)^{3(k-1)}P(T)+\cdots\\&=\frac{P(T)}{1-P(T^c)^3}\\&=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}\\&=\frac{9}{19}\end{aligned}$$

以下も同様。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

次に$ABCABC\cdots$の順番でサイコロ投げを繰り返すとき、最初にCが勝つ確率$P_{ABC}(C)$を求める。これは、

1）１巡目にCまで順番が回りCが勝つ確率

2）２巡目に突入し、２巡目以降にCが勝つ確率

の合計であることから、

$$P_{ABC}(C)=P(T^c)^2P(T)+P(T^c)^3P_{ABC}(C)$$

これを解いて、

$$P_{ABC}(C)=\frac{4}{19}$$

さて、最初にAが勝った後は、$BCBC\cdots$の順番でサイコロ投げを繰り返すことから、この２人でサイコロ投げを行う場合に、Bが勝つ確率$P_{BC}(B)$を求めると、

$$P_{BC}(B)=P(T)+P(T^c)^2P_{BC}(B) \qquad \therefore \quad P_{BC}(B)=\frac{3}{5}$$

同様に、最初にCが勝った後は、$ABAB\cdots$の順番でサイコロ投げを繰り返すことから、この２人でサイコロ投げを行う場合に、Bが勝つ確率$P_{AB}(B)$を求めると、

$$P_{AB}(B)=P(T^c)P(T)+P(T^c)^2P_{AB}(B) \qquad \therefore \quad P_{AB}(B)=\frac{2}{5}$$

ここで、２番目にBが勝つ確率$P(B)$は、最初にAが勝った後Bが勝つ確率と最初にCが勝った後Bが勝つ確率の合計であり、また、最初にA（またはC）が勝つ事象と、その後、BC（またはAB）の２人でサイコロ投げを行い、Bが勝つ事象は互いに独立であることから、

$$\begin{aligned}P(B)&=P_{ABC}(A)P_{BC}(B)+P_{ABC}(C)P_{AB}(B)\\&=\frac{9}{19}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{19}\cdot\frac{2}{5}\\&=\frac{7}{19}\end{aligned}$$

となる。

よって、<u>解答は①　(Ｉ)　　②　(Ｇ)</u>

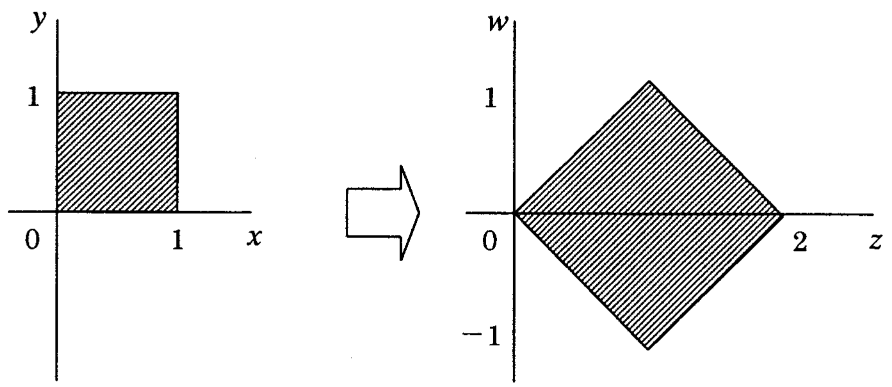
（2）

$z = x + y, w = x - y$ とすると、

$$x = \frac{z+w}{2}, y = \frac{z-w}{2}$$

また $0 < x < 1, 0 < y < 1$ より

$0 < z + w < 2, 0 < z - w < 2$



確率変数 Z, W の結合確率密度関数を $h(z,w)$ とすると

$$h(z,w) = f\left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\right)\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = f\left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\right)\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 4\left(\frac{z+w}{2}\right)\left(\frac{z-w}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{z^2 - w^2}{2} \qquad （ただし 0 < z + w < 2, 0 < z - w < 2）$$

したがって、Z の確率密度関数は、

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z,w)\,dw = \begin{cases} \displaystyle\int_{-z}^{z} \frac{z^2 - w^2}{2}\,dw = \frac{2}{3}z^3 & (0 < z \leq 1) \\ \displaystyle\int_{z-2}^{2-z} \frac{z^2 - w^2}{2}\,dw = \frac{-2z^3 + 12z - 8}{3} & (1 < z < 2) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

である。

よって、解答は①　(H)　　②　(C)

（3）

確率変数 X , Y の積率母関数 $\phi_0(\theta)$ は以下のとおり。

$$\begin{aligned}\phi_0(\theta) &= E\left[e^{\theta X}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2+\theta x\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2+\frac{1}{2}\theta^2\right\}dx \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\right)\end{aligned}$$

X , Y は互いに独立であることから、確率ベクトル (X,Y) の積率母関数 $\phi(\theta_1,\theta_2)$ は

$$\phi(\theta_1,\theta_2)=E\left[e^{(\theta_1X+\theta_2Y)}\right]=\phi_0(\theta_1)\phi_0(\theta_2)=\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right)\right\}$$

また、確率ベクトル (U,V) の積率母関数 $\psi(\theta_1,\theta_2)$ は、確率ベクトル (X,Y) の積率母関数を用いて以下のとおり表せる。

$$\psi(\theta_1,\theta_2)=E\left[e^{(\theta_1U+\theta_2V)}\right]=E\left[e^{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1+\theta_2)X+\frac{1}{\sqrt{2}}(-\theta_1+\theta_2)Y\right\}}\right]=\phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1+\theta_2),\frac{1}{\sqrt{2}}(-\theta_1+\theta_2)\right)$$

これより、

$$\psi(\theta_1,\theta_2)=\exp\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1+\theta_2)\right\}^2+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\theta_1+\theta_2)\right\}^2\right]=\exp\left[\frac{1}{2}\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right)\right]$$

よって、解答は①　（F）　　②　（F）

（4）

$E(X_i)=\lambda$、$V(X_i)=\lambda^2$であり、確率変数X_i（$i=1,\cdots,n$）は互いに独立であるから、

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\lambda、V(Y)=V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=n\lambda^2、\sqrt{V(Y)}=\sqrt{n}\lambda$$

中心極限定理より、nが十分大きければ、$\dfrac{Y-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}$は標準正規分布に従う。

ここで、$E(Y)=\sqrt{n}\cdot\sqrt{V(Y)}$であることから、

$$P\left[|Y-E(Y)|\le 0.2E(Y)\right]=P\left(\left|\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right|\le 0.2\sqrt{n}\right)$$
$$=\int_{-0.2\sqrt{n}}^{0.2\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

したがって、$P\left[|Y-E(Y)|\le 0.2E(Y)\right]\ge 0.9$となるためには、標準正規分布の上側$\varepsilon$点を$u(\varepsilon)$として、

$0.2\sqrt{n}\ge u(0.05)$となる必要がある。

ここで、付表の数値を使用すると

$$n\ge\left\{\frac{u(0.05)}{0.2}\right\}^2=\left(\frac{1.6449}{0.2}\right)^2=67.64\cdots$$

nは整数であることから、題意の条件を満たすnの最小値は68である。

よって、解答は①　(C)　　②　(I)

（5）

確率変数X，Yの確率密度関数を$f(x)$，$g(y)$とすると、$f(x)$，$g(y)$はそれぞれ、

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{1}{2}x^3\exp\{-x(1+y)\}dy$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2\exp\{-x(1+y)\}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{1}{2}x^2\exp(-x)$$

$$g(y)=\int_0^\infty \frac{1}{2}x^3\exp\{-x(1+y)\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{2(1+y)}\exp\{-x(1+y)\}\right]_0^\infty+\int_0^\infty \frac{3x^2}{2(1+y)}\exp\{-x(1+y)\}dx$$
$$\vdots$$
$$=\frac{3}{(1+y)^4}$$

であるから、X，Yの平均は、それぞれ

$$E(X)=\int_0^\infty \frac{1}{2}x^3\exp(-x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^3\exp(-x)\right]_0^\infty+\int_0^\infty \frac{3}{2}x^2\exp(-x)dx$$
$$\vdots$$
$$=3$$

$$E(Y)=\int_0^\infty \frac{3y}{(1+y)^4}dy$$
$$=\left[-\frac{y}{(1+y)^3}\right]_0^\infty+\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^3}dy$$
$$=\left[-\frac{1}{2(1+y)^2}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{1}{2}$$

である。また、

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{2}x^4\exp(-x)dx-9$$
$$=4\int_0^\infty \frac{1}{2}x^3\exp(-x)dx-9$$
$$=3$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$$
$$=\int_0^\infty \frac{3y^2}{(1+y)^4}dy-\frac{1}{4}$$
$$=\int_0^\infty \frac{2y}{(1+y)^3}dy-\frac{1}{4}$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^2}dy-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{3}{4}$$

$$E(XY)=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{2}x^4 y\exp\{-x(1+y)\}dydx$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{2}x^3\exp\{-x(1+y)\}dydx$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{2}x^2\exp(-x)dx$$
$$=\int_0^\infty x\exp(-x)dx$$
$$=\int_0^\infty \exp(-x)dx$$
$$=1$$

であるから、X, Yの相関係数$R(X,Y)$は、

$$R(X,Y)=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$
$$=\frac{1-3\times\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{3}{4}}}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

である。

よって、解答は① （J）　② （B）　③ （C）

（6）

母集団は一様分布$U(a,b)$に従うので、母平均$\mu = \dfrac{a+b}{2}$、母分散$\sigma^2 = \dfrac{(a-b)^2}{12}$となる。これより$a = \mu - \sqrt{3}\sigma$、$b = \mu + \sqrt{3}\sigma$が得られる。モーメント法から、母平均$\mu$の推定値$\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$および母分散$\sigma^2$の推定値$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$を用いて、$a = \hat{\mu} - \sqrt{3}\hat{\sigma}$および$b = \hat{\mu} + \sqrt{3}\hat{\sigma}$と推定される。与えられた標本値から$\hat{\mu} = 2.000$、$\hat{\sigma}^2 = 4.284$となるので、

$a = 2.000 - \sqrt{3} \times \sqrt{4.284} = -1.58$

$b = 2.000 + \sqrt{3} \times \sqrt{4.284} = 5.58$

と推定できる。

よって、<u>解答は①　（A）　②　（J）</u>

（7）

測定された5本の缶それぞれの中身の量をx_i（$i = 1,2,\cdots,5$）と表すと、

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 200.02、\quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5} = 0.7016$$

であることから、母平均が未知の場合における缶1本の中身の量の分散に対する信頼係数を95％とした場合の信頼区間は、自由度（$5-1=4$）のχ^2表の上側2.5％点、下側2.5％点をそれぞれ　$\chi_1^2 = 11.1433$、$\chi_2^2 = 0.4844$としたとき、次のように表される。

$$\left(\frac{5 \times 0.7016}{\chi_1^2},\ \frac{5 \times 0.7016}{\chi_2^2}\right) = \left(\frac{5 \times 0.7016}{11.1433},\ \frac{5 \times 0.7016}{0.4844}\right)$$

また、分散の加成性より測定された缶1本の中身の量の分散は、（本来の中身の量の分散）＋（測定の誤差分散）であるから、缶1本分の本来の中身の量の分散の信頼区間は、

$$\left(\frac{5 \times 0.7016}{11.1433} - 0.06,\ \frac{5 \times 0.7016}{0.4844} - 0.06\right)$$

となる。

これは、缶1本における中身の量の分散であるため、100本分のジュースが入れられた容器の中身の量（問題文より中身は漏れなく移し変えられている）は、分散の加成性より

$$\left(100 \times \left(\frac{5 \times 0.7016}{11.1433} - 0.06\right),\ 100 \times \left(\frac{5 \times 0.7016}{0.4844} - 0.06\right)\right) = (25.4\cdots,\ 718.1\cdots) \fallingdotseq (25,\ 718)$$

となる。

よって、<u>解答は①　（B）　②　（G）</u>

（8）

題意から、

帰無仮説H_0：予防接種を施すこととインフルエンザに罹患することとは関係がない

対立仮説H_1：予防接種を施すこととインフルエンザに罹患することとは関係がある

としたとき、χ^2検定において、帰無仮説H_0が有意水準1%で棄却される、すなわち、

$$\chi^2 = \frac{(5n \cdot 4n - 3n \cdot 2n)^2 \cdot 14n}{7n \cdot 7n \cdot 8n \cdot 6n} = \frac{7}{6}n > \chi_1^2(0.01)$$

を満たすような最小の整数nを求めればよい。

付表から$\chi_1^2(0.01) = 6.6349$であり、上式から$n > 5.6871$となるので、$n = 6$となる。

よって、解答は（D）

【別解】母比率の差の検定を用いて解く場合

インフルエンザに罹患しなかった子どもの割合（比率）をp

予防接種を施した子どもがインフルエンザに罹患しなかった割合（比率）をp_1

予防接種を施さなかった子どもがインフルエンザに罹患しなかった割合（比率）をp_2

とする。

帰無仮説H_0：$p = p_1 = p_2$

対立仮説H_1：$p_1 \neq p_2$（両側検定）

としたとき、帰無仮説H_0が有意水準1%で棄却されるためには、統計量T（※）の実現値tについて

$$t = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1-\hat{p}) \cdot (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} > u(0.005)$$

を満たすような最小の整数nを求めればよい。

ここで、$n_1 = 8n$、$n_2 = 6n$、$\hat{p}_1 = \frac{5n}{8n} = \frac{5}{8}$、$\hat{p}_2 = \frac{2n}{6n} = \frac{1}{3}$、$\hat{p} = \frac{5n + 2n}{8n + 6n} = \frac{7n}{14n} = \frac{1}{2}$であり、

$u(\varepsilon)$は標準正規分布の上側ε点。

付表から$u(0.005) = 2.5758$であり、上式をnについてとくと、$n > \frac{6}{7} \times 2.5758^2 = 5.6869$が得られる。

よって、$n = 6$となる。

よって、解答は（D）

※　上記の統計量Tについては、以下の統計量T'の実現値t'を用いて検定を行うことも可能である。

$$t' = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} > u(0.005)$$

この場合、$n > 5.1735$が得られ、同様の結果$n = 6$となる。

（注）本問の出題意図は、独立性の検定（「予防接種を施すこと」と「インフルエンザに罹患すること」との間に関係があるかについての検定（両側検定））に関する理解を問うことであった。

しかし、問題文中の「予防接種の効果がある」は、「予防接種を施すことにより、インフルエンザに罹患しにくくなる」とも解釈でき、その場合は、片側検定における棄却域から n を求めることになるため、導かれる解答は下記のとおり（C）となる。

そのため、（C）についても正答とすることとした。

【上記の解釈にもとづく解答】

母比率の差の検定において、

帰無仮説 H_0 ： $p = p_1 = p_2$

対立仮説 H_1 ： $p_1 > p_2$ （片側検定）

として、題意を満たす n を求める。

この場合、別解における $u(0.005)$ の部分を $u(0.01) = 2.3263$ として n を求めることになるので、

$n > \dfrac{6}{7} \times 2.3263^2 = 4.6386$ より、$n = 5$。よって、解答は（C）となる。

（9）

標本数をn、標本相関係数をr、母相関係数をρとし、$z=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$、$\eta=\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$とする。

nが大きいとき、zの標本分布は$N(\eta,1/(n-3))$となることから、信頼係数を$1-\varepsilon$とした場合のηの信頼区間は次式で表わされる。

$$z-\frac{u(\varepsilon/2)}{\sqrt{n-3}}<\eta=\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}<z+\frac{u(\varepsilon/2)}{\sqrt{n-3}}$$

ここで、$u(\varepsilon/2)$は、標準正規分布の上側$\varepsilon/2$点。

よって、

$$z-\frac{1.96}{\sqrt{100-3}}<\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}<z+\frac{1.96}{\sqrt{100-3}}$$

⇔

$$z-0.1990<\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}<z+0.1990$$

ここで、母相関係数ρの信頼区間の下限0.7616についてz変換した値を付表から読み取ると、1.00であるから、$z-0.1990=1.00$すなわち、$z=1.1990$となる。

再び付表から、$z=1.1990$に対応するrを読み取ると、$r=0.8334$

よって、解答は（D）

（10）

ロジットモデルにおいて、αおよびβを推定するためには、$y'=\log\left(\frac{y}{1-y}\right)$として$y$を変換したデータ$y'$に対して線形回帰を行えばよく、変換後のデータは下表のとおりとなる。

x	1.2	2.2	2.7	4.5	4.9
y'	-2.19	-1.39	0	2.19	2.19

したがって、αおよびβを線形回帰により推定すると

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y'_i-\bar{y}')}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=1.270\cong 1.3$$

$$\alpha=\bar{y}'-\hat{\beta}\cdot\bar{x}=-3.777\cong -3.8$$

よって、解答は①　（B）　　②　（I）

（１１）

推移確率行列Pにおける第１行ベクトルおよび第２行ベクトルがそれぞれ$(1,0,0,0)$および$(0,1,0,0)$であること、また、$p_{31}=\dfrac{2}{7}$であることから、

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{4}{7}\end{pmatrix}$$

であることがわかる。よって、$(p_{32},p_{43})=(\frac{1}{7},\frac{1}{7})$。

また、$P=\begin{pmatrix}E&O\\U&R\end{pmatrix}$とおくと、ヒントより

$$P^n=\begin{pmatrix}E&O\\(E-R^n)(E-R)^{-1}U&R^n\end{pmatrix}$$

なので、

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}E&O\\(E-R)^{-1}U&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{7}{11}&\frac{4}{11}&0&0\\\frac{6}{11}&\frac{5}{11}&0&0\end{pmatrix}$$

となって、求める確率は$\dfrac{\frac{7}{11}}{\frac{7}{11}+\frac{6}{11}}=\dfrac{7}{13}$

よって、<u>解答は①　（B）　②　（B）　③　（E）</u>

（１２）

確率変数Xが標準正規分布に従うことから、$|X|$の確率密度関数fおよび平均1の指数分布の確率密度関数gは、

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (0<x<\infty)$$

$$g(x)=e^{-x} \qquad (0<x<\infty)$$

である。したがって、

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{x}=\sqrt{\frac{2e}{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\le\sqrt{\frac{2e}{\pi}} \qquad (0<x<\infty)$$

であることから、棄却法の場合、定数$c=\sqrt{\frac{2e}{\pi}}$として、$U\le\frac{f(Y)}{c\cdot g(Y)}$のとき$|X|$の生成値を$Y$とすればよい。ここで、$U\le\frac{f(Y)}{c\cdot g(Y)}=e^{-\frac{(Y-1)^2}{2}}\Leftrightarrow -\log U\ge\frac{(Y-1)^2}{2}$であることに注意すれば、

試行	1	2	3	4	5
Y	1.7	0.2	0.5	2.0	2.8
U	0.8	0.4	0.1	0.6	0.2
$-\log U$	0.22	0.92	2.30	0.51	1.61
$\frac{(Y-1)^2}{2}$	0.245	0.32	0.125	0.5	1.62
$-\log U\ge\frac{(Y-1)^2}{2}$	偽	真	真	真	偽
$\lvert X\rvert$	（棄却）	0.2	0.5	2.0	（棄却）

以上より、$|X|$の生成値の平均は、$\frac{0.2+0.5+2.0}{3}=0.90$となる。

よって、解答は（C）

問題2

（1）

硬貨をk回続けて投げるとき、2回続けては表が出ない確率q_kは、初めて2回続けて表が出るまでに投げた回数を表す確率変数X_2がkよりも大きくなる確率であり、$P(X_2 > k)$と表すことができる。

（これは、硬貨をk回続けて投げるとき、2回続けては表が出ないということを、初めて2回続けて表が出るまでに硬貨を投げる回数がk回を超えるということに読み替えたものである。）

さて、q_kは、$k \geq 2$のとき、次の2つの排反な事象に関する確率の和として捉えることができる。
すなわち、

事象Ⅰ：1回目に$\boxed{\text{裏}}$が出て、2回目からk回目までの$k-1$回のうちに2回続けては表が出ないという事象

事象Ⅱ：1回目に$\boxed{\text{表}}$、2回目に$\boxed{\text{裏}}$が出て、3回目からk回目までの$k-2$回のうちに2回続けては表が出ないという事象

事象Ⅰの確率は$(1-p)q_{k-1}$、事象Ⅱの確率は$p(1-p)q_{k-2}$であることから、q_kに関する次の漸化式が成立する。

$$q_k = (1-p)q_{k-1} + p(1-p)q_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

ここで、$p = \dfrac{2}{3}$とすれば、$q_k = \dfrac{1}{3}q_{k-1} + \dfrac{2}{9}q_{k-2}$

これを変形し、$q_1 = q_0 = 1$を用いると、次の2式を得る。

$$q_k + \frac{1}{3}q_{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(q_{k-1} + \frac{1}{3}q_{k-2}\right) = \cdots = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(q_1 + \frac{1}{3}q_0\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$q_k - \frac{2}{3}q_{k-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(q_{k-1} - \frac{2}{3}q_{k-2}\right) = \cdots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\left(q_1 - \frac{2}{3}q_0\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

これより、

$$q_k = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} \quad (k \geq 2)$$

となる。これは、$q_1 = q_0 = 1$を満たすため、$k \geq 0$において成立する。

よって、解答は

① （C）　② （B）　③ （A）　④ （B）

⑤ （B）　⑥ （D）　⑦ （C）

（2）

硬貨をk回続けて投げるとき、3回続けては表が出ない確率r_kは、初めて3回続けて表が出るまでに投げた回数を表す確率変数X_3がkよりも大きくなる確率であり、$P(X_3>k)$と表すことができる。

さて、r_kは、$k\geq 3$のとき、次の3つの排反な事象に関する確率の和として捉えることができる。
すなわち、

事象Ⅰ：1回目に$\boxed{\text{裏}}$が出て、2回目からk回目までの$k-1$回のうちに3回続けては表が出ないという事象

事象Ⅱ：1回目に$\boxed{\text{表}}$、2回目に$\boxed{\text{裏}}$が出て、3回目からk回目までの$k-2$回のうちに3回続けては表が出ないという事象

事象Ⅲ：1回目に$\boxed{\text{表}}$、2回目に$\boxed{\text{表}}$、3回目に$\boxed{\text{裏}}$が出て、4回目からk回目までの$k-3$回のうちに3回続けては表が出ないという事象

事象Ⅰの確率は$(1-p)r_{k-1}$、事象Ⅱの確率は$p(1-p)r_{k-2}$、事象Ⅲの確率は$p^2(1-p)r_{k-3}$であることから、r_kに関する次の漸化式が成立する。

$$r_k=(1-p)r_{k-1}+p(1-p)r_{k-2}+p^2(1-p)r_{k-3}\quad (k\geq 3)$$

確率変数X_3の平均値$E(X_3)$については次のように求める。
まず、X_3は離散的確率変数であることから、次式が成立する。

$$E(X_3)=\sum_{l=1}^{\infty} l\cdot P(X_3=l)、\qquad r_k=\sum_{l=k+1}^{\infty} P(X_3=l)$$

したがって、

$$E(X_3)=\sum_{l=1}^{\infty} l\cdot P(X_3=l)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{l-1} P(X_3=l)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty} P(X_3=l)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k$$

ここで、$r_2=r_1=r_0=1$より、

$$E(X_3)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k=\sum_{k=3}^{\infty} r_k+r_2+r_1+r_0=\sum_{k=3}^{\infty} r_k+3$$

次に、r_k に関する漸化式を利用すれば、

$$
\begin{aligned}
E(X_3) &= \sum_{k=3}^{\infty} r_k + 3 \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} \left\{(1-p)r_{k-1} + p(1-p)r_{k-2} + p^2(1-p)r_{k-3}\right\} + 3 \\
&= (1-p)\sum_{k=3}^{\infty} r_{k-1} + p(1-p)\sum_{k=3}^{\infty} r_{k-2} + p^2(1-p)\sum_{k=3}^{\infty} r_{k-3} + 3
\end{aligned}
$$

ここで、$r_2 = r_1 = r_0 = 1$ より、

$$
\sum_{k=3}^{\infty} r_{k-1} = E(X_3) - 2\text{、}\quad \sum_{k=3}^{\infty} r_{k-2} = E(X_3) - 1\text{、}\quad \sum_{k=3}^{\infty} r_{k-3} = E(X_3)
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
E(X_3) &= (1-p)\{E(X_3) - 2\} + p(1-p)\{E(X_3) - 1\} + p^2(1-p)E(X_3) + 3 \\
&= (1-p^3)E(X_3) + 1 + p + p^2
\end{aligned}
$$

これを整理して、

$$
E(X_3) = \frac{1 + p + p^2}{p^3}
$$

$p = \dfrac{1}{3}$ を代入して、

$$
\begin{aligned}
E(X_3) &= \frac{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= 27 + 9 + 3 \\
&= 39
\end{aligned}
$$

よって、解答は

⑧　(B)　　⑨　(D)　⑩　(G)　　⑪　(G)　　⑫　(E)

問題３.

（１）

標本値として $x_i(i=1,\cdots,n_x)$ と $y_i(i=1,\cdots,n_y)$ を用いる場合、尤度関数は、母数 μ_x、μ_y、σ^2 をパラメータとして、

$$l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu_x)^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\mu_y)^2\right\}\right]$$

で表される。最尤推定値は、尤度関数 l を各パラメータに対して最大ならしめるものであるから、

帰無仮説 $H_0:\mu_x=\mu_y=\mu$ のもとで、$l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)(=l(\mu,\mu,\sigma^2))$ を最大ならしめるものは、

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log l(\mu,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu)+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\mu)\right\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log l(\mu,\mu,\sigma^2)$$

$$=-\frac{n_x+n_y}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu)^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\mu)^2\right\}=0$$

より

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n_x+n_y}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}x_i+\sum_{i=1}^{n_y}y_i\right\}=\frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n_x+n_y}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i-\frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2\right\}$$

同様に、対立仮説 $H_1:\mu_x\neq\mu_y$ のもとで、$l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)$ を最大ならしめるものは、

$$\frac{\partial}{\partial\mu_x}\log l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu_x)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_y}\log l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\mu_y)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)$$

$$=-\frac{n_x+n_y}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu_x)^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\mu_y)^2\right\}=0$$

より

$$\tilde{\mu}_x = \frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x} x_i = \bar{x}$$

$$\tilde{\mu}_y = \frac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y} y_i = \bar{y}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n_x + n_y}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \bar{y})^2\right\}$$

よって、解答は① (B)　② (A)　③ (B)　④ (G)　⑤ (G)　⑥ (A)　⑦ (B)　⑧ (A)　⑨ (B)

（2）

尤度比は（1）の尤度関数lを用いて、$\lambda = \dfrac{\max_{\mu,\sigma^2} l(\mu,\mu,\sigma^2)}{\max_{\mu_x,\mu_y,\sigma^2} l(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)}$で与えられる。したがって、（1）の

最尤推定値を用いれば、$\lambda = \dfrac{l(\hat{\mu},\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)}{l(\tilde{\mu}_x,\tilde{\mu}_y,\tilde{\sigma}^2)}$である。

（1）の最尤推定値の結果を代入すれば、

$$l(\hat{\mu},\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i - \frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i - \frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2\right\}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}} \exp\left(-\frac{n_x+n_y}{2}\right)$$

$$l(\tilde{\mu}_x,\tilde{\mu}_y,\tilde{\sigma}^2) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \bar{y})^2\right\}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}} \exp\left(-\frac{n_x+n_y}{2}\right)$$

したがって、

$$\lambda = \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}}$$

$$=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i-\frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2}\right\}^{\frac{n_x+n_y}{2}}$$

ここで、

$$\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i-\frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2+n_x\left\{\frac{n_y(\bar{x}-\bar{y})}{n_x+n_y}\right\}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2+n_y\left\{\frac{n_x(\bar{x}-\bar{y})}{n_x+n_y}\right\}^2$$

と変形できるので、

$$\lambda=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2+\frac{n_xn_y}{n_x+n_y}(\bar{x}-\bar{y})^2}\right\}^{\frac{n_x+n_y}{2}}$$

$$=\left\{\frac{1}{1+\frac{\frac{n_xn_y}{n_x+n_y}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2}}\right\}^{\frac{n_x+n_y}{2}}$$

$$=\left\{\frac{1}{1+\frac{t^2}{n_x+n_y-2}}\right\}^{\frac{n_x+n_y}{2}}\qquad\left(\text{ただし}t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{n_xs_x^2+n_ys_y^2}{n_x+n_y-2}\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)}}\right)$$

ゆえに、領域$R_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n_x},y_1,y_2,\cdots,y_{n_y});\lambda\le k\}$は、

$$\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n_x},y_1,y_2,\cdots,y_{n_y});|t|=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{n_xs_x^2+n_ys_y^2}{n_x+n_y-2}\left(\dfrac{1}{n_x}+\dfrac{1}{n_y}\right)}}\geq K\right\}$$

なる領域と等しくなる。

一方、統計値tを実現する統計量Tは、$H_0:\mu_x=\mu_y$なる条件のもとで自由度$\phi=n_x+n_y-2$のt-分布に従うので、有意水準εの両側検定を行うには、$|t|>t_\phi\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$のとき$H_0$を棄却すればよい。

よって、<u>解答は⑩　(H)　⑪　(D)　⑫　(E)　⑬　(D)　⑭　(A)　⑮　(B)　⑯　(J)　⑰　(J)　⑱　(H)　⑲　(C)　⑳　(D)</u>

以上