損保数理（問題）

問題. 次の（１）～（１３）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

なお、消費税については考慮しないこととし、特に断りがないかぎり、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、また、各クレームは独立であるものとする。

さらに、必要な場合は$e = 2.718$として計算すること。（100 点）

（１）ある保険商品の直近年度の実績データは以下の表のとおりであった。

計上契約件数	10,000
計上保険料	50,000,000
支払保険金	27,500,000
実績社費	8,500,000
実績代理店手数料	10,000,000
発生クレーム件数	735
既経過保険料	47,500,000
既発生保険金（インカードロス）	30,870,000
経過契約件数	9,800

また、この保険商品の現行の予定料率構成割合と営業保険料は以下の表のとおりであり、全契約の営業保険料は同一であるものとする。

予定損害率	60%
予定社費率	15%
予定代理店手数料率	20%
予定利潤率	5%
営業保険料	5,000

次のⅠ～Ⅲの各問に答えなさい。

Ⅰ. 直近年度の実績データを用いて、純保険料法により改定純保険料を求める。算出にあたっては信頼度を勘案するものとし、全信頼度に必要なクレーム件数は 1,082 とすると、信頼度は［ ① ］であるから、改定純保険料は［ ② ］となる。

①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

なお、以後、信頼度を計算で用いる場合は、ここで選んだ小数点以下第４位までの数値を用いることとする。

（A）0.0112　（B）0.1531　（C）0.2089　（D）0.3712　（E）0.4611
（F）0.5092　（G）0.6398　（H）0.7271　（I）0.8242　（J）0.9123

②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。
なお、以後、改定純保険料を計算で用いる場合は、ここで選んだ整数値を用いることとする。

（A）3,000　（B）3,040　（C）3,080　（D）3,120　（E）3,160
（F）3,200　（G）3,240　（H）3,280　（I）3,320　（J）3,360

Ⅱ. Ⅰで求めた改定純保険料に基づき、営業保険料を算出することを考える。改定後の社費率、代理店手数料率および利潤率は、それぞれ実績社費率、予定代理店手数料率および予定利潤率と同一とした場合、営業保険料は ③ となる。

③に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）5,000　（B）5,135　（C）5,170　（D）5,200　（E）5,330
（F）5,380　（G）5,400　（H）5,585　（I）5,600　（J）5,790

Ⅲ.（本問はⅡの内容を考慮せず解答しなさい。）純保険料はⅠで求めた改定純保険料と、社費率および代理店手数料率は実績社費率および実績代理店手数料率と、営業保険料は表にある現行の営業保険料と、それぞれ同一であるものとする。今後のある期間に 8,000 件の計上契約件数があった場合、この期間の予定利潤の総額は ④ となる。

④に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）180,000　（B）200,000　（C）220,000　（D）240,000　（E）260,000
（F）280,000　（G）300,000　（H）320,000　（I）340,000　（J）360,000

（2）ある保険商品の免責金額・支払限度額を設定しない場合のクレーム額（損害額）X は、平均 μ の指数分布に従っている。下表は、この保険商品を免責金額 2（エクセス方式）、支払限度額 30 で販売し、得られた支払保険金のデータである。次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

支払保険金	支払件数	支払総額
30 未満	95	610
30	5	150
合計	100	760

Ⅰ．上記のデータから、最尤法により推定した μ の最尤推定値 $\hat{\mu}$ に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）7.25　（B）7.50　（C）7.75　（D）8.00　（E）8.25
（F）8.50　（G）8.75　（H）9.00　（I）9.25　（J）9.50

Ⅱ．この保険商品を免責金額および支払限度額を設定しないで販売する場合の予定料率構成割合は下表のとおりとする。
免責金額および支払限度額を設定しない場合と比較して、免責金額 2（エクセス方式）および支払限度額 30 を設定することによる営業保険料の割引率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。
ただし、免責金額および支払限度額を設定した場合の営業保険料について、予定社費は免責金額および支払限度額を設定しない場合と同一額とし、代理店手数料率および利潤率は免責金額および支払限度額を設定しない場合と同一の率を適用することとする。また、μ はⅠで求めた最尤推定値 $\hat{\mu}$ を用いることとする。

予定損害率	60%
予定社費率	20%
予定代理店手数料率	15%
予定利潤率	5%

（A）15%　（B）16%　（C）17%　（D）18%　（E）19%
（F）20%　（G）21%　（H）22%　（I）23%　（J）24%

（3）クレーム件数Nがパラメータλのポアソン分布に従い、個々のクレーム額X_i $(i=1,\cdots,N)$がそれぞれガンマ分布 Γ (2,1)（確率密度関数： $f(x)=x\cdot e^{-x}$ $(0\le x<\infty)$）に従うようなクレーム総額モデル$S=X_1+\cdots+X_N$について、移動ガンマ分布による近似を考える。次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

Ⅰ．ポアソン分布の積率母関数$M_N(t)$は、

$M_N(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}\cdot e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}=$ $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

また、ガンマ分布Γ(2,1)の積率母関数$M_X(t)$は、

$M_X(t)=$ $\boxed{\quad ② \quad}$ と表される。

①に入る適切な式は、選択肢のうちのどれか。

（A） λt （B） $e^{\lambda t}$ （C） $e^{\lambda t-1}$ （D） $e^{\lambda t-1}-1$
（E） $\exp(\lambda e^t)$ （F） $\exp(\lambda e^t-1)$ （G） $\exp\{\lambda(e^t-1)\}$ （H） $\exp\{\lambda(e^t-1)-1\}$
（I） $\exp\{\lambda(e^t-1)\}-1$ （J） いずれにも該当しない

②に入る適切な式は、選択肢のうちのどれか。

（A） $\left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}}$ （B） $\dfrac{1}{1-2t}$ （C） $\left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^{\frac{3}{2}}$ （D） $\left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^{2}$

（E） $\left(\dfrac{1}{1-t}\right)^{2}$ （F） $\left(\dfrac{1}{1-t}\right)^{3}$ （G） $\left(\dfrac{2}{2-t}\right)^{2}$ （H） $\left(\dfrac{1}{1-t}\right)^{4}$

（I） $\left(\dfrac{2}{2-t}\right)^{3}$ （J） いずれにも該当しない

Ⅱ．Ⅰを用いて S の確率母関数 $M_S(t)$ を求め、そのキュムラント母関数 $C_S(t)$ を考える。キュムラント母関数の $t=0$ における k 次の微分係数を k 次のキュムラントといい、1 次から 3 次のキュムラントはそれぞれ原点周りの 1 次の積率および平均値周りの 2 次と 3 次の積率と等しい。これを利用して、S の平均値周りの 1 次から 3 次の積率を求めると、それぞれ $\boxed{③}$ となる。
S の分布と移動ガンマ分布 $\Gamma(x_0;\alpha,\beta)$（分布関数：$F(x)=\int_0^{x-x_0}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt \quad (x_0 \le x < \infty)$）の原点周りの 1 次の積率および平均値周りの 2 次と 3 次の積率が等しいと仮定して近似することとすると、近似すべき移動ガンマ分布のパラメータ x_0,α,β はそれぞれ $\boxed{④}$ となることが分かる。

③に入る適切な式の組は、選択肢のうちのどれか。

（A） $\lambda,2\lambda,2\lambda$　（B） $\lambda,2\lambda,4\lambda$　（C） $\lambda,2\lambda,6\lambda$
（D） $2\lambda,3\lambda,6\lambda$　（E） $2\lambda,6\lambda,12\lambda$　（F） $2\lambda,6\lambda,24\lambda$
（G） $3\lambda,4\lambda,6\lambda$　（H） $3\lambda,12\lambda,24\lambda$　（I） $3\lambda,24\lambda,36\lambda$
（J） いずれにも該当しない

④に入る適切な式の組は、選択肢のうちのどれか。

（A） $-\lambda,2\lambda,1$　（B） $-\lambda,3\lambda,1$　（C） $-\lambda,\frac{3}{2}\lambda,\frac{1}{2}$
（D） $-\frac{1}{3}\lambda,\frac{8}{9}\lambda,\frac{2}{3}$　（E） $-3\lambda,8\lambda,2$　（F） $-4\lambda,6\lambda,1$
（G） $-\frac{7}{3}\lambda,\frac{64}{9}\lambda,\frac{4}{3}$　（H） $-29\lambda,\frac{384}{9}\lambda,\frac{4}{3}$　（I） $-9\lambda,12\lambda,1$
（J） いずれにも該当しない

（4）ある保険商品の保険期間は 1 年であり、年間に発生するクレーム件数の分布は次表のとおりである。また、個々のクレーム額は平均 2 の指数分布に従っている。次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

年間発生クレーム件数：n	確率
0	0.5
1	0.3
2	0.2

Ⅰ．年間発生クレーム件数が n 件のとき、年間発生クレーム額の合計 Z の確率密度関数は、以下のとおり表すことができる。

$$\frac{②^{③}\times ④^{⑤}}{①}\exp(-②\times z) \quad (0\le z<\infty)$$

①から⑤に入る適切な式は選択肢のうちのどれか。ただし、解答にあたっては同じ記号を複数回使用してもよい。

（A）2　（B）0.5　（C）n　（D）$n+1$　（E）$n-1$

（F）$\Gamma(2)$　（G）$\Gamma(n)$　（H）$\Gamma(2n)$　（I）z　（J）e^{-n}

（K）e^{n}　（L）$\log z$

Ⅱ．この保険商品に、保険期間（1 年）における通算の支払限度額 2 を設定した場合、純保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.72　（B）0.74　（C）0.76　（D）0.78　（E）0.80
（F）0.82　（G）0.84　（H）0.86　（I）0.88　（J）0.90

（5）ある保険会社において、現在、自動車の初度登録からの経過年数に関する料率較差の導入を検討している。下表の実績を用いて、経過年数区分較差を導入した場合に、この実績のポートフォリオに適用すべき純保険料を次の要領で算出することとする。

ア．各経過年数区分ごとに、有限変動信頼性理論に基づいて、適用すべき純保険料を算出する。

イ．合計の実績値を基に、合計での適用すべき純保険料を有限変動信頼性理論に基づいて算出する。

ウ．ア．で求めた純保険料の割合から、イ．で求めた純保険料を経過年数区分に割り振ることにより、最終的な各経過年数区分に適用すべき純保険料を算出する。

ただし、ア．、イ．ともに、実績のクレーム額の合計が真のクレーム額の上下 10%以内にある確率が 99%であることを全信頼度の基準とすることとし、個々のクレーム額の期待値、標準偏差はそれぞれ 102、20、クレーム件数はポアソン分布に従うものとして計算することとする。次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

なお、必要があれば標準正規分布の上側ε点を$u(0.005)=2.576$、$u(0.01)=2.326$、$u(0.025)=1.960$、$u(0.05)=1.645$ として計算すること。ただし、途中の計算で端数処理をする場合は、全て小数点以下第５位を四捨五入して小数点以下第４位までの数値を用いることとする。

経過年数区分	純保険料	クレーム額	クレーム件数
区分 A（１年以下）	46,900	39,450	413
区分 B（1 年超２年以下）	60,200	59,100	608
区分 C（２年超）	122,200	137,100	1,215
合計	229,300	235,650	2,236

Ⅰ．全信頼度に必要なクレーム件数に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 610　（B） 630　（C） 650　（D） 670　（E） 690
（F） 710　（G） 730　（H） 750　（I） 770　（J） 790

Ⅱ．区分 A の純保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、途中の計算において、全信頼度に必要なクレーム件数はⅠで選んだ選択肢の数値を用いることとする。

（A）39,830　（B）40,330　（C）40,830　（D）41,330　（E）41,830
（F）42,330　（G）42,830　（H）43,330　（I）43,830　（J）44,330

（6）ある保険会社の自動車保険の料率は、運転目的（日常・レジャー使用か業務使用か）と年齢（35 歳未満か 35 歳以上か）の二つの危険標識で複合的に区分されている。この自動車保険に関するある年度の経過台数およびクレーム総額が次のとおりであったとする。

＜経過台数＞

	35 歳未満	35 歳以上	計
日常・レジャー使用	$E_{11}=200$	$E_{12}=300$	$E_{1\bullet}=500$
業務使用	$E_{21}=150$	$E_{22}=200$	$E_{2\bullet}=350$
計	$E_{\bullet 1}=350$	$E_{\bullet 2}=500$	$E_{\bullet\bullet}=850$

＜クレーム総額＞

	35 歳未満	35 歳以上	計
日常・レジャー使用	$C_{11}=144$	$C_{12}=135$	$C_{1\bullet}=279$
業務使用	$C_{21}=117$	$C_{22}=114$	$C_{2\bullet}=231$
計	$C_{\bullet 1}=261$	$C_{\bullet 2}=249$	$C_{\bullet\bullet}=510$

この複合リスクの構造が乗法型であると仮定し、各危険標識について相対クレームコスト指数および料率係数を Minimum Bias 法により求めるとき、次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

なお、計算の途中において、クレームコスト指数および相対クレームコスト指数は、全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

Ⅰ．運転目的区分「業務使用」、年齢区分「35 歳未満」に対応する相対クレームコスト指数 r_{21} に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.800　（B）0.900　（C）1.000　（D）1.100　（E）1.200
（F）1.300　（G）1.400　（H）1.500　（I）1.600　（J）1.700

Ⅱ．運転目的区分「日常・レジャー使用」に対応する料率係数 x_1 は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数に等しいものと仮定する。このとき、年齢区分「35 歳以上」に対応する料率係数 y_2 の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.558　（B）0.652　（C）0.777　（D）0.836　（E）0.930
（F）1.087　（G）1.246　（H）1.335　（I）1.393　（J）2.077

（7）次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

Ⅰ. 以下のイからハのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ. ２つの危険標識によって分類される複合分類リスクにおいて、タリフ構造が乗法型のとき、相対クレームコスト指数のJung法による推定結果とMinimum Bias法による推定結果は一致する。

ロ. ネット再保険料が等しい関数型の再保険処理のうちで、ストップロス再保険が保有保険金の分散を最小にする。

ハ. 時刻を表すパラメータ t を持つ確率変数の列 $\{X_t\}$ において、$\{X_t\}$ の１つの実現値 x_t を見本関数という。

（Ａ）全て正しい　（Ｂ）イ、ロのみ正しい
（Ｃ）イ、ハのみ正しい　（Ｄ）ロ、ハのみ正しい
（Ｅ）イのみ正しい　（Ｆ）ロのみ正しい
（Ｇ）ハのみ正しい　（Ｈ）全て誤り

Ⅱ. 以下のニからへのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

ニ. J.Jung は、リスク分類要素の選択基準に関する考察を行わなくとも、タリフ構造の有効性に関する統計的検定を前提とした分析が可能となる Jung 法を提唱した。

ホ. 支払保険金総額がガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ に従っており、その確率密度関数を $f_{\alpha,\beta}(x)=\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-1}\quad(0\le x<\infty)$、分布関数を $F_{\alpha,\beta}(x)$ とする。このとき、エクセスポイント d のストップロス再保険のネット再保険料は $\dfrac{\alpha}{\beta}(1-F_{\alpha+1,\beta}(d))-d(1-F_{\alpha,\beta}(d))$ となる。

へ. 経験料率算定法とは、同一の料率区分に属する平均的なリスクの契約と比較して、割増引きをアンダーライターが決定する料率決定方法であり、通常、定式化された算定基準は無い。

（Ａ）全て正しい　（Ｂ）ニ、ホのみ正しい
（Ｃ）ニ、へのみ正しい　（Ｄ）ホ、へのみ正しい
（Ｅ）ニのみ正しい　（Ｆ）ホのみ正しい
（Ｇ）へのみ正しい　（Ｈ）全て誤り

（8）ある保険会社が販売しているある損害保険商品について、次の実績データを基に 2008 年度末のＩＢＮＲ備金（＝（最終支払保険金累計予測値）－（2008 年度末支払保険金累計））を累計支払保険金によるチェインラダー法で見積もることとする。このとき、次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

＜事故年度別　単年度支払保険金の推移＞

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006	3,628	1,333	1,080
2007	4,000	1,050	
2008	3,800		

ただし、全ての保険事故は年度末に起こり、その支払は事故発生時（経過年度１）、その翌年度末（経過年度２）およびその翌々年度末（経過年度３）にのみ行われる。また、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用い、また、インフレ率は過去実績・将来予測とも一律で年率５％を用いることとする。

なお、計算の途中において、保険金については全て小数点以下第１位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクターについては全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

Ⅰ．経過年度１→２のロスディベロップメントファクター予測値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1.200　（B）1.220　（C）1.240　（D）1.260　（E）1.280
（F）1.300　（G）1.320　（H）1.340　（I）1.360　（J）1.380

Ⅱ．2008 年度末のＩＢＮＲ備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）2,800　（B）2,900　（C）3,000　（D）3,100　（E）3,200
（F）3,300　（G）3,400　（H）3,500　（I）3,600　（J）3,700

（9）ある積特型積立保険の積立部分に関する条件が下表のとおりであるとする。この積立保険について、次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

なお、計算の途中において、現価率および期始払年金現価率は、小数点以下第5位を四捨五入して小数点以下第4位までの数値を用いることとする。

＜条件＞

項目	条件	備考
保険期間	5 年	
払込方法	年払(期始払)	
満期返れい金	100 万	保険期間満了時に支払
中途返れい金	20 万	第 3 保険年度末に保険契約が有効な場合に支払
予定利率	3%	
予定契約消滅率	1%	
維持費率	2%	年払積立保険料に対する割合
代理店手数料率	1%	年払積立保険料に対する割合

Ⅰ．積立型基本特約保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）220,000　（B）222,000　（C）224,000　（D）226,000　（E）228,000
（F）230,000　（G）232,000　（H）234,000　（I）236,000　（J）238,000

Ⅱ．第4保険年度末の払戻積立金の金額の積立型基本特約保険料に対する割合に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）3.10　（B）3.15　（C）3.20　（D）3.25　（E）3.30
（F）3.35　（G）3.40　（H）3.45　（I）3.50　（J）3.55

（１０）期首サープラスがu_0、複合ポアソン過程のポアソンパラメータがλ、個々のクレーム額の分布の確率密度関数が以下のとおり表せる Lundberg モデルを考える。

$$f(x)=\frac{2}{\Gamma(2.5)}e^{-2x}(2x)^{1.5}\qquad (0\le x<\infty)$$

次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

Ⅰ. 破産確率$\varepsilon(u_0)$と Lundberg の不等式を表した次の式において、①から④に入る適切な式は、選択肢のうちのどれか。ただし、解答にあたっては同じ記号を複数回使用してもよい。なお、Rは調整係数、U_tは時刻t時点のサープラス、Tは破産時刻を表すものとする。

$$\varepsilon(u_0)=\frac{①^{②}}{E(③^{④}|T<\infty)}$$

$$\varepsilon(u_0)<①^{②}$$

（A）λ　（B）e　（C）R　（D）Ru_0　（E）$-Ru_0$

（F）RU_T　（G）$-RU_T$　（H）U_T　（I）$-U_T$　（J）1

（K）u_0　（L）$-u_0$

Ⅱ. $u_0=10$および$\lambda=10$が与えられ、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率をe^{-3}まで許容することとした場合、必要な安全割増率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.15　（B）0.18　（C）0.21　（D）0.24　（E）0.27

（F）0.30　（G）0.33　（H）0.36　（I）0.39　（J）0.42

（１１）下記の Lundberg モデルについて、次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

・期首サープラス　　　　　　　　：$U_0 = 0$
・クレーム件数過程のパラメータ：$\lambda = 0.4$
・個々のクレーム額の平均　　　　：$\mu = 15$（個々のクレーム額は指数分布に従う。）
・安全割増率　　　　　　　　　　：$\theta = 0.22$

Ⅰ．破産確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（ヒント：Lundberg モデルにおいて、破産が発生し、かつ破産直後のサープラスが $-y$（$y>0$）以上である確率 $G(y)$ は、

$$G(y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^y \{1-F(x)\}\ dx$$（　$F(x)$：個々のクレーム額 X_i の分布関数　）

と表される。ここで、λ はクレーム件数過程のパラメータ、c は単位時間あたりの収入保険料、$F(x)$ は個々のクレーム額の分布関数である。）

（Ａ）8.08%　（Ｂ）8.14%　（Ｃ）8.20%　（Ｄ）8.26%　（Ｅ）8.32%
（Ｆ）50.0%　（Ｇ）81.4%　（Ｈ）82.0%　（Ｉ）82.6%　（Ｊ）83.2%

Ⅱ．破産が発生したという条件の下で、破産直後のサープラスが－30 以下となる（＝破産時の損失額が 30 以上となる）条件付確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）11.5%　（Ｂ）13.5%　（Ｃ）21.4%　（Ｄ）29.1%　（Ｅ）36.8%
（Ｆ）46.7%　（Ｇ）56.8%　（Ｈ）60.2%　（Ｉ）68.3%　（Ｊ）71.7%

（１２）ある保険商品 1 契約の年間クレーム件数は平均 0.03 のポアソン分布に従っており、個々のクレーム額の分布は下表のとおりであることがわかっている。この保険商品を 30,000 件引受けている元受保険会社が、$100(1-\alpha)$ %比例再保険を特約再保険として手配し、さらに保有部分に対してエクセスポイント 5α、カバーリミット 2α の超過損害額再保険を手配することとした。次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

クレーム額	確率
2	0.5
4	0.3
6	0.1
8	0.1

Ⅰ．年間元受支払保険金総額 S の変動係数 $CV(S)\left(=\dfrac{\sqrt{V(S)}}{E(S)}\right)$ に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.030　（B）0.031　（C）0.032　（D）0.033　（E）0.034
（F）0.035　（G）0.036　（H）0.037　（I）0.038　（J）0.039

Ⅱ．再保険適用後の年間正味支払保険金総額 T の変動係数 $CV(T)$ に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）$0.030\sqrt{\alpha}$　（B）$0.032\sqrt{\alpha}$　（C）$0.034\sqrt{\alpha}$　（D）$0.036\sqrt{\alpha}$　（E）$0.038\sqrt{\alpha}$

（F）0.030　（G）0.032　（H）0.034　（I）0.036　（J）0.038

（１３）ある保険会社では、ある保険種目に対してエクセスポイント 1、カバーリミット 2 の超過損害額再保険特約を設定した。なお、この保険種目の 1 件あたりの元受支払保険金 X は、確率密度関数が $f(x)=x\cdot e^{-x}\quad(0\leq x<\infty)$ で表せる分布に従うことがわかっている。このとき、次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

Ⅰ. この再保険特約のネット再保険料の元受純保険料の理論値に対する割合に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）27%　（B）29%　（C）31%　（D）33%　（E）35%
（F）37%　（G）39%　（H）41%　（I）43%　（J）45%

Ⅱ. 元受支払保険金が一律に 20%上昇した場合、この再保険特約のネット再保険料の上昇率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば $e^{1.2}=3.320$、$e^{1/1.2}=2.301$ として計算すること。

（A）0%　（B）18%　（C）19%　（D）20%　（E）21%
（F）22%　（G）23%　（H）24%　（I）25%　（J）26%

以上

損保数理（解答）

問題.

（1）Ⅰ．①（I）②（D）　Ⅱ．③（F）　Ⅲ．④（D）

Ⅰ.

クレーム頻度＝735÷9,800≒0.075

平均クレーム単価＝30,870,000÷735＝42,000　より

実績純保険料は 0.075×42,000＝3,150 となる。

また、予定損害率による予定純保険料は 5,000×60%＝3,000 となる。

信頼度は $\sqrt{\dfrac{735}{1{,}082}}$ ≒0.8242 となるので、求める純保険料は

0.8242×3,150＋（1−0.8242）×3,000≒3,124

よって、以降の質問においては、改定純保険料は最も近い選択肢である（D）3,120 を用いて計算を行っていく。

Ⅱ.

実績社費率＝8,500,000÷50,000,000＝0.17。

よって、営業保険料＝3,120／｛1−（0.17＋0.20＋0.05)｝≒5,379.3≒5,379

最も近い選択肢は（F）5,380

Ⅲ.

実績代理店手数料＝10,000,000÷50,000,000＝0.20。

現行の営業保険料水準を維持した場合の予定利潤率をεとすると、題意から

5,000＝3,120／｛1−（0.17＋0.20＋ε)｝と立式できる。

εについて解くと 0.006 となる。

よって、求める予定利潤額は 8,000×5,000×0.006＝240,000 となる。

（2）Ⅰ．(D)　Ⅱ．(D)

Ⅰ.

免責金額 2 万円を設定した場合の支払保険金 Y は、

$$F(y)=P(Y<y)=P(X-2<y\,|\,X>2)=\frac{1}{1-P(X<2)}\int_2^{y+2}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}dx=\frac{1}{e^{-\frac{2}{\mu}}}\left(1-e^{-\frac{y+2}{\mu}}\right)$$

$$f(y)=\frac{d}{dy}\frac{1}{e^{-\frac{2}{\mu}}}\left(1-e^{-\frac{y+2}{\mu}}\right)=\frac{1}{\mu e^{-\frac{2}{\mu}}}\left(e^{-\frac{y+2}{\mu}}\right)=\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y}{\mu}}$$

となることから、クレーム額 X 同様に平均μ万円の指数分布に従う。

$P(y \geq 30) = 1 - F(30) = e^{-\frac{30}{\mu}}$ であるから、尤度関数を $L(\mu)$ で表すと、

$$L(\mu) = \left(\prod_{i=1}^{95} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y_i}{\mu}}\right)\left(\prod_{i=96}^{100} e^{-\frac{30}{\mu}}\right) = \frac{1}{\mu^{95}} \cdot e^{-\frac{610}{\mu}} \cdot e^{-\frac{150}{\mu}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log L(\mu) = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(-95 \log \mu - \frac{760}{\mu}\right) = -\frac{95}{\mu} + \frac{760}{\mu^2} = 0$$

から、$\hat{\mu} = 8.00$ となる。

II.

免責金額および支払限度額設定後の支払保険金の期待値は、

$$\int_2^{32} (x-2) \frac{1}{8} e^{-\frac{x}{8}} dx + 30 \int_{32}^{\infty} \frac{1}{8} e^{-\frac{x}{8}} dx = \left[-(x-2)e^{-\frac{x}{8}} - 8e^{-\frac{x}{8}}\right]_2^{32} + 30\left[-e^{-\frac{x}{8}}\right]_{32}^{\infty}$$

$$= -30e^{-4} - 8e^{-4} + 8e^{-\frac{1}{4}} + 30e^{-4} = -8e^{-4} + 8e^{-\frac{1}{4}} \fallingdotseq 6.08$$

従って、求める営業保険料の割引率は

$$1 - \frac{0.6 \times \frac{6.08}{8} + 0.2}{1 - 0.15 - 0.05} \fallingdotseq 0.18$$

（3）<u>I．① (G) ② (E)　II．③ (F) ④ (C)</u>

I.

ポアソン分布の積率母関数 $M_N(t)$ は

$$M_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^n}{n!} = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$ である。

また、ガンマ分布 $\Gamma(2,1)$ の積率母関数 $M_X(t)$ は $M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot x \cdot e^{-x} = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2$ となる。

II.

I．の積率母関数からキュムラント $C_S(t)$ を計算すると、キュムラントの定義より

$C_S(t) = \lambda(M_X(t) - 1) = \lambda\left\{\left(\frac{1}{1-t}\right)^2 - 1\right\}$ である。キュムラントの定義、および、実際に計算を行うと

$C'_S(0) = \lambda E(X) = E(S) = \lambda E(X) = E(S) = 2\lambda$

$C''_S(0) = \lambda E(X^2) = V(S) = \lambda E(X^2) = V(S) = 6\lambda$

$C'''_S(0) = \lambda E(X^3) = E((S - E(S))^3) = \lambda E(X^3) = E((S - E(S))^3) = 24\lambda$ となる。よって、移動ガンマ分布のパラ

メータ x_0,α,β はそれぞれ $\dfrac{\alpha}{\beta}+x_0=2\lambda$、$\dfrac{\alpha}{\beta^2}=6\lambda$、$\dfrac{2\alpha}{\beta^3}=24\lambda$ を解くことで求まる。

$x_0=-\lambda$、$\alpha=\dfrac{3}{2}\lambda$、$\beta=\dfrac{1}{2}$

（4） Ⅰ．①（G）②（B）③（C）④（I）⑤（E）　Ⅱ．（B）

Ⅰ．

指数分布 $\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\ (0\le x<\infty)$ はガンマ分布 $\Gamma(1,\dfrac{1}{2})$ で表すことができるので、ガンマ分布の再生性より、

クレーム件数が n 件のときの年間発生クレーム額は $\Gamma(n,\dfrac{1}{2})$、即ち $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\frac{x}{2}}$ の確率密度関数をもつ。

Ⅱ．

求める保険金の期待値は、

$$\sum_{n=1}^{2}\Pr(N=n)\left(\int_0^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n}{\Gamma(n)}e^{-\frac{z}{2}}dz+\int_2^\infty\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} z^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\frac{z}{2}}dz\right)$$

と表せる。

ここで、N=1 のとき、

$$\int_0^2\left(\frac{1}{2}\right)ze^{-\frac{z}{2}}dz+\int_2^\infty e^{-\frac{z}{2}}dz=\left[-ze^{-\frac{z}{2}}-2e^{-\frac{z}{2}}\right]_0^2+\left[-2e^{-\frac{z}{2}}\right]_2^\infty=2-2e^{-1}$$

N=2 のとき、

$$\int_0^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 z^2e^{-\frac{z}{2}}dz+\int_2^\infty\left(\frac{1}{2}\right)ze^{-\frac{z}{2}}dz$$

$$=\left[-\frac{1}{2}z^2e^{-\frac{z}{2}}-2ze^{-\frac{z}{2}}-4e^{-\frac{z}{2}}\right]_0^2+\left[-ze^{-\frac{z}{2}}-2e^{-\frac{z}{2}}\right]_2^\infty=4-6e^{-1}$$

従って、$S=0.3\left(2-2e^{-1}\right)+0.2\left(4-6e^{-1}\right)=1.4-1.8e^{-1}$ =0.7377...

（5）I．(E)　II．(C)

I．

$$全信頼度に必要なクレーム件数=\left(\frac{2.576}{0.10}\right)^2\times\left(1+\left(\frac{20}{102}\right)^2\right)=690$$

II．

まず、経過年数区ごとの信頼度を求める。

$$区分Aの信頼度=\sqrt{\frac{413}{690}}=0.7737$$

$$区分Bの信頼度=\sqrt{\frac{608}{690}}=0.9387$$

区分Cの信頼度＝1

次に、手順ア．およびイ．に従い、各区分ごとの純保険料を求める。

区分Aの純保険料＝0.7737×39,450 ＋（1－0.7737）×46,900＝41,135.935

区分Bの純保険料＝0.9387×59,100 ＋（1－0.9387）×60,200＝59,167.430

区分Cの純保険料＝137,100

合計の純保険料＝235,650

最後に、手順ウ．に従い、最終的に各区分に適用すべき純保険料を求める。

$$区分Aに適用すべき純保険料=235{,}650\times\frac{41{,}135.935}{41{,}135.935+59{,}167.430+137{,}100}\fallingdotseq\underline{40{,}832}$$

（6）I．(F)　II．(D)

I．

各リスク区分ごとのクレームコスト$R_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$および相対クレームコスト指数$r_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$を計算すると、

＜クレームコストR_{ij}＞

	35歳未満	35歳以上	計
日常・レジャー使用	0.720	0.450	0.558
業務使用	0.780	0.570	0.660
計	0.746	0.498	0.600

＜相対クレームコスト指数r_{ij}＞

	35 歳未満	35 歳以上	計
日常・レジャー使用	1.200	0.750	0.930
業務使用	1.300	0.950	1.100
計	1.243	0.830	1.000

Ⅱ.

相対クレームコスト指数の推定値$\hat{r}_{ij}$としたとき、Minimum Bias 法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=0$$
$$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$
$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=0$$
$$E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$

この連立方程式において、C を定数として、

$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})=E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=C$$
$$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=-C$$

と表わすことができる。この複合分類リスクの構造が乗法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、$\hat{r}_{ij}=x_i\times y_j\ \ (i=1,2)$と表される。

これを、上記連立方程式に代入して整理すると、

$x_1\times y_1=r_{11}-C/E_{11}\ \cdots(a)$，$x_1\times y_2=r_{12}+C/E_{12}\ \cdots(b)$

$x_2\times y_1=r_{21}+C/E_{21}\ \cdots(c)$，$x_2\times y_2=r_{22}-C/E_{22}\ \cdots(d)$

となる。

$(a)\times(d)=(b)\times(c)$より、

$$\left(r_{11}-\frac{C}{E_{11}}\right)\left(r_{22}-\frac{C}{E_{22}}\right)=\left(r_{12}+\frac{C}{E_{12}}\right)\left(r_{21}+\frac{C}{E_{21}}\right)$$

$$\left(1.2-\frac{C}{200}\right)\left(0.95-\frac{C}{200}\right)=\left(0.75+\frac{C}{300}\right)\left(1.3+\frac{C}{150}\right)$$

$$C^2-7230C+59400=0$$

$$C=7221.77\ ,\ 8.225$$

$C=7221.77$の場合は、x_2とy_1が負値となり不適。従って、$C=8.225$。

$$y_2=\frac{0.75+\frac{8.225}{300}}{0.93}=0.8359\ldots$$

（7）I．(A)　II．(F)

I．

イ　正しい（テキスト 4-13)。

ロ　正しい（テキスト 8-18)

ハ　正しい（テキスト 7-6)

II．

ニ　Jung 法も、リスク分類要素の選択基準に関する考察が行われていない（テキスト 4-14)。

ホ　正しい（テキスト 8-14)

ヘ　同文の説明はスケジュール料率算定法(テキスト 1-26)

（8）I．(F)　II．(G)

単年度（インフレ調整前）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006	3,628	1,333	1,080
2007	4,000	1,050	
2008	3,800		

単年度(インフレ調整後。基準は 2008 年度。)

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006	4,000	1,400	1,080
2007	4,200	1,050	
2008	3,800		

例）事故年度 2006、経過年度 2

　＝ 1,333 × 1.05

　＝ 1,400

累計（インフレ調整後。基準は 2008 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006	4,000	5,400	6,480
2007	4,200	5,250	
2008	3,800		

ロスディベロップメントファクター

事故年度	経過年度	
	1 → 2	2 → 3
2006	1.350	1.200
2007	1.250	1.200
2008	1.300	1.200

経過年度 1→2 のロスディベロップメントファクター

＝（1.350 ＋ 1.250）÷ 2

＝ 1.300

累計（インフレ調整後。基準は 2008 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006	4,000	5,400	6,480
2007	4,200	5,250	6,300
2008	3,800	4,940	5,928

単年度（インフレ調整後。基準は 2008 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006	4,000	5,400	1,080
2007	4,200	1,050	1,050
2008	3,800	1,140	988

単年度（インフレ調整前）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	ＩＢＮＲ備金
2006	3,628	1,333	1,080	0
2007	4,000	1,050	1,103	1,103
2008	3,800	1,197	1,089	2,286

よって、ＩＢＮＲ備金 ＝ 1,103＋2,286 ＝ 3,389

（9）Ⅰ.（B）Ⅱ.（F）

Ⅰ.

予定契約消滅率を考慮した現価率 ϕ および期始払年金現価率 Z は、以下のとおりとなる。

$\phi=(1-q)/(1+i)=0.9612$、$Z=(1-\phi^5)/(1-\phi)=4.6268$

よって、積立型基本特約保険料は、以下のとおりとなる。

積立型基本特約保険料 ＝ 積立保険料 ×（1＋維持費率＋代理店手数料率）

＝（満期返戻金×ϕ^5＋中途返戻金×ϕ^3）÷ Z ×（1＋維持費率＋代理店手数料率）

＝（100 万円×0.9612^5＋20 万円×0.9612^3）÷ 4.6268 ×（1＋2%＋1%）

$= 222{,}192$

Ⅱ.

第4保険年度末の払戻積立金Vの金額は、将来法を用いると、以下のとおりとなる。

V ＝ 満期返戻金 $\times \phi$ － 積立保険料

＝ 満期返戻金 $\times \phi$ － (満期返戻金$\times \phi^5$＋中途返戻金$\times \phi^3$) ÷ Z

＝ 100万円×0.9612 － (100万円$\times 0.9612^5$＋20万円$\times 0.9612^3$) ÷ 4.6268

＝ 745,480

よって、求める割合は以下のとおりとなる。

求める割合 ＝ 745,480 ÷ 222,192 ＝ 3.355

（１０）Ⅰ. ① (B) ② (E) ③ (B) ④ (G)　Ⅱ. (G)

Ⅰ.

$\varepsilon(u_0) = \dfrac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T} | T < \infty)}$、$\varepsilon(u_0) < e^{-Ru_0}$　　証明略（テキスト7-38参照）。

Ⅱ.

Lundbergの不等式$\varepsilon(u_0) < e^{-10R}$と題意から、$e^{-10R} = e^{-3}$、すなわち、調整係数が$R = \dfrac{3}{10}$となるような安全割増率を求めればよい。

クレーム額Xの積率母関数を$M_X(r)$とすると、

$$M_X(r) = \int_0^\infty \frac{2x}{\Gamma(2.5)} e^{-2x+rx} (2x)^{1.5} dx$$

$$= \frac{2}{2-r} \times \left(\frac{2}{2-r}\right)^{1.5} \int_0^\infty \frac{(2-r)x}{\Gamma(2.5)} e^{-(2-r)x} ((2-r)x)^{1.5} dx = \left(\frac{2}{2-r}\right)^{2.5}$$ である。

また、$\left.\dfrac{dM_X(r)}{dt}\right|_{r=0} = \dfrac{2.5}{2} = 1.25$より、$E(X) = 1.25$である。

したがって、$\lambda + (1+\theta)\lambda \times \mu \times r = \lambda M_X(r)$に、$\lambda = 10$、$\mu = 1.25$、$M_X(r) = \left(\dfrac{2}{2-r}\right)^{2.5}$、$r = \dfrac{3}{10}$を代入すると、$10 + 3.75(1+\theta) = 10 \times \left(\dfrac{2}{1.7}\right)^{2.5}$となり、これを解き、$\theta = 0.33666\ldots$となる。

（１１）I．(H)　II．(B)

I．

破産確率を ε (0)とおくと、

$$\varepsilon(0)=\lim_{y\to\infty}G(y)=\lim_{y\to\infty}\frac{\lambda}{c}\int_0^y\{1-F(x)\}dx=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\{1-F(x)\}dx=\frac{\lambda}{c}\mu$$

λ μ （1＋θ）＝c より、

$$\varepsilon(0)=\frac{1}{1+\theta}=\frac{1}{1+0.22}=0.8196$$

II．

$U_t<0$ となった直後の破産時の損失額Yの分布関数は、以下のとおりとなる。

$$P(Y\le y)=\frac{G(y)}{\varepsilon(0)}=\frac{\frac{\lambda}{c}\int_0^y\{1-F(x)\}dx}{\varepsilon(0)}=\frac{\int_0^y\{1-F(x)\}dx}{\mu}$$

ここで、　　に従うことから、

$$P(Y\le y)=\frac{\int_0^y\left\{1-\left(1-e^{\frac{-x}{15}}\right)\right\}dx}{15}=1-e^{\frac{-y}{15}}$$

よって、$U_t<\text{-}30$ となる確率 $P(Y>30)$ は、以下のとおりとなる。

$$P(Y>30)=1-P(Y\le 30)=e^{\frac{-30}{15}}=e^{-2}=0.1353$$

（１２）I．(I)　II．(I)

I．

クレーム額の分布をX、ポートフォリオ全体でのクレーム件数の分布をNとすると

$E(N)=V(N)=0.03\times30000=900$であるから、

$$CV(S)=\frac{\sqrt{V(X)E(N)+E(X)^2V(N)}}{E(N)E(X)}=\frac{\sqrt{E(N)(V(X)+E(X)^2)}}{E(N)E(X)}=\frac{\sqrt{E(N)E(X^2)}}{E(N)E(X)}=\frac{1}{30}\times\frac{\sqrt{E(X^2)}}{E(X)}$$

となる。

$E(X)=2\times0.5+4\times0.3+6\times0.1+8\times0.1=3.6$

$E(X^2)=4\times0.5+16\times0.3+36\times0.1+64\times0.1=16.8$

従って、$\mathrm{CV(S)}=\frac{1}{30}\times\frac{\sqrt{16.8}}{3.6}=0.038\ldots$

Ⅱ.

再保険適用後は、個々のクレーム額の分布は次の通りとなる。

元受クレーム額	再保険適用後の保有クレーム額	確率
2	2α	0.5
4	4α	0.3
6	5α	0.1
8	6α	0.1

したがって、$\mathrm{CV(T)} = \dfrac{1}{30} \times \dfrac{\sqrt{(2\alpha)^2 \times 0.5 + (4\alpha)^2 \times 0.3 + (5\alpha)^2 \times 0.1 + (6\alpha)^2 \times 0.1}}{2\alpha \times 0.5 + 4\alpha \times 0.3 + 5\alpha \times 0.1 + 6\alpha \times 0.1} = 0.0363\ldots$

（13）Ⅰ.（I）　Ⅱ.（E）

Ⅰ.

再保険特約を設定しても支払件数は理論的には影響を受けないものと仮定できるので、1件あたりの支払保険金と再保険金の期待値を比較すればよい。

ここで、1件あたりの支払保険金Xはガンマ分布$\Gamma(2,1)$に従うので、その期待値は$\mathrm{E(X)} = 2$となる。

また、この超過損害額再保険特約の1件あたりの再保険金の期待値Lは、

$$L = \int_1^3 (x-1)x\,e^{-x}dx + \int_3^\infty 2x\,e^{-x}dx = (-6e^{-3} + e^{-1} - 5e^{-3} - 2e^{-3} + 2e^{-1}) + (6e^{-3} + 2e^{-3}) = 3e^{-1} - 5e^{-3}$$

よって、求める割合は以下のとおりとなる。

$$\text{求める割合} = \frac{3e^{-1} - 5e^{-3}}{2} = 0.427$$

Ⅱ.

支払保険金が一律に20%上昇した場合の1件あたりの支払保険金を$Y = 1.2X$とおくと、Yの確率密度関数は、$f(y) = \dfrac{1}{(1.2)^2} y e^{-y/1.2}$となる。

この場合の超過損害額再保険特約の1件あたりの再保険金の期待値L′は、上記Ⅰ.と同様に算出すると、

$$L' = \frac{1}{(1.2)^2}\left\{\int_1^3 (y-1) y e^{-y/1.2} dy + \int_3^\infty 2y e^{-y/1.2} dy\right\} = 3.4e^{-1/1.2} - 5.4e^{-3/1.2}$$

よって、求める上昇割合は以下のとおりとなる。

$$\text{上昇割合} = \frac{3.4e^{-1/1.2} - 5.4e^{-3/1.2}}{3e^{-1} - 5e^{-3}} - 1 = 0.210$$

以上