数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。（６０点）

（1）X は 2 枚の硬貨を、Y は 3 枚の硬貨を同時に 1 回投げ、表の出た枚数の多い方を勝ちとする。また、表が同じ枚数出たときは引き分けとしどちらかが勝つまで 1 回の硬貨投げを繰り返すものとする。すべての硬貨は表裏がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で独立に出現するものとするとき、1 回目の硬貨投げで X が勝つ確率は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、最終的に X が勝つ確率は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（A）$\frac{1}{11}$　（B）$\frac{1}{8}$　（C）$\frac{2}{11}$　（D）$\frac{3}{16}$　（E）$\frac{1}{4}$

（F）$\frac{3}{11}$　（G）$\frac{5}{16}$　（H）$\frac{4}{11}$　（I）$\frac{3}{8}$　（J）$\frac{5}{11}$

（2）6 個の製品のうち 2 個の不良品が含まれていることがわかっている。製品を 1 個ずつ抜き取って戻さずに検査するとき、最後の不良品を見つけるまでの検査個数を表す確率変数を X とする。このとき、X の平均は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、標準偏差は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（A）$\frac{\sqrt{14}}{9}$　（B）$\frac{\sqrt{70}}{9}$　（C）$\frac{\sqrt{14}}{3}$　（D）$\frac{14}{9}$　（E）$\frac{\sqrt{70}}{3}$

（F）3　（G）4　（H）$\frac{14}{3}$　（I）5　（J）6

（3）確率変数 X , Y の結合確率密度関数を $f_{X,Y}(x,y)=e^{-(x+y)}$（$x>0$, $y>0$）とする。$Z=X+Y$ とするとき、Z^2 の平均は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、Z の積率母関数は $\boxed{\quad ② \quad}$（$\theta<1$）である。

（A）1　（B）2　（C）4　（D）6　（E）8

（F）$\frac{1}{1-\theta}$　（G）$\frac{1}{1-\theta^2}$　（H）$\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2$　（I）$\left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^2$　（J）該当なし

（4）確率変数 X_i（$i=1,\cdots,n$）は互いに独立で、すべて平均 3 のポアソン分布に従うとき、$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ の確率分布は $P(Y=y)=$ $\boxed{\quad ① \quad}$（$y=0,1,2,\cdots$）である。また、中心極限定理より、n が十分大きければ、$\sum_{y=0}^{3n}P(Y=y)\fallingdotseq$ $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（A）$\dfrac{e^{-n}n^{y}}{y!}$　（B）$\dfrac{e^{-n}(3n)^{y}}{y!}$　（C）$\dfrac{e^{-n}n^{3y}}{y!}$　（D）$\dfrac{e^{-3n}n^{3y}}{y!}$　（E）$\dfrac{e^{-3n}(3n)^{y}}{y!}$

（F）$\dfrac{1}{4}$　（G）$\dfrac{1}{3}$　（H）$\dfrac{1}{2}$　（I）$\dfrac{2}{3}$　（J）1

（5）点Ａを基点とした同一の半直線上にある２点Ｂ，Ｃを考える。線分ＡＢ，ＡＣの長さを、$[0,1]$ の範囲から無作為かつ独立に設定するものとしたとき、線分ＢＣを一辺とする正方形の面積を表す確率変数を X とすると、X の確率密度関数 $f(x)$ は $0<x<1$ において $\boxed{\qquad}$ である。

（A）$1-x$　（B）$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　（C）$\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1$　（D）$x+1$

（E）$\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$　（F）$2x$　（G）$2-2x$　（H）$2-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

（6）ある政策の支持率を予想するために、母集団から男性 1,000 人、女性 800 人をそれぞれ無作為に抽出して調査を行ったところ男性は 400 人、女性は 280 人が支持すると回答した。母集団全体の男女比は 3 : 2 であるとして、母集団全体での支持率を近似法を用いて区間推定するとき、信頼係数を 95％とした場合の信頼区間の下限に最も近いものは $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、上限に最も近いものは $\boxed{\quad ② \quad}$ である。なお、男性の支持率と女性の支持率は独立であるとする。

（A）0.3275　（B）0.3375　（C）0.3475　（D）0.3575　（E）0.3675

（F）0.3925　（G）0.4025　（H）0.4125　（I）0.4225　（J）0.4325

（7）ある会社の従来型のコンデンサーの寿命の平均は、2,500 時間であるとされていた。しかし、この会社は、新型のコンデンサーの寿命の平均は従来型より 10％アップして 2,750 時間であると主張しているため、20 個の標本を用いてその主張を検定したい。コンデンサーの寿命は正規分布に従うものとし、従来型、新型共に寿命の標準偏差は 300 時間であるとするとき、第 1 種の誤りの起こる確率を 5％とした場合における検出力（第 2 種の誤りが起こらない確率）に最も近いものは $\boxed{}$ である。

（A）0.0091　（B）0.0188　（C）0.0384　（D）0.0505

（E）0.9495　（F）0.9616　（G）0.9812　（H）0.9909

（8）確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{l} & (0 < x < l) \\ 0 & (x \le 0\,, l \le x) \end{cases} \quad \text{(ただし、}l\text{は正の実数)}$$

で与えられる分布を持つ母集団からの大きさ 3 の標本による r 番目の順序統計量 $X_{(r)}\ (r = 1,2,3)$ に対し、n は自然数とすると、$E[X_{(2)}{}^n] = \boxed{\ ①\ }$ であり、$E[(X_{(3)} - X_{(1)})^n] = \boxed{\ ②\ }$ である。

（A）$\dfrac{3l^n}{(n+1)(n+2)}$　（B）$\dfrac{4l^n}{(n+1)(n+3)}$　（C）$\dfrac{6l^n}{(n+2)(n+3)}$　（D）$\dfrac{3l^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$

（E）$\dfrac{4l^{n+1}}{(n+1)(n+3)}$　（F）$\dfrac{6l^{n+1}}{(n+2)(n+3)}$　（G）$\dfrac{3l^n}{(n+1)(n+3)}$　（H）$\dfrac{4l^n}{(n+2)^2}$

（I）$\dfrac{2l^n}{(n+1)(n+2)}$　（J）$\dfrac{6l^{n-1}}{(n+2)(n+3)}$

（9）都市Aと都市Bの 1 日の平均気温をある一週間にわたって測定したところ下表のデータを得た。このデータから、都市Bの平均気温 y （℃）について、説明変数を都市Aの平均気温 x （℃）とした回帰直線を最小二乗法により求めると、 $y=$ ［　①　］ $x+$ ［　②　］であり、 y をこの回帰直線によって推定するときの誤差分散の推定値は［　③　］である。

	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目	合計
x	19	17	20	24	25	22	20	147
y	16	16	19	21	23	21	17	133
x^2	361	289	400	576	625	484	400	3,135
y^2	256	256	361	441	529	441	289	2,573
xy	304	272	380	504	575	462	340	2,837

（A） $-\frac{25}{23}$　（B） $-\frac{5}{6}$　（C） $-\frac{1}{4}$　（D） $\frac{17}{23}$　（E） $\frac{17}{21}$

（F） $\frac{11}{12}$　（G） $\frac{17}{18}$　（H） $\frac{22}{23}$　（I） $\frac{23}{21}$　（J） $\frac{17}{15}$

（10）2次の自己回帰モデル（ $AR(2)$ モデル） $Y_t = 1 + aY_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$ が定常性の条件を満たすとき、 a の値のとりうる範囲は［　①　］ $< a <$ ［　②　］である。

（A） -1.0　（B） -0.8　（C） -0.6　（D） -0.4　（E） -0.2

（F） 0　（G） 0.2　（H） 0.4　（I） 0.6　（J） 0.8

（11）確率過程 $\{X_s\}, s \geq 0$ を標準ブラウン運動とする。
標準ブラウン運動の定義より $E(X_s) =$ ［　①　］であり、 $V(X_s) =$ ［　②　］である。
また、 $t > s$ とすると、 $E(X_t \cdot X_s) =$ ［　③　］である。

（A） 0　（B） 1　（C） s　（D） t　（E） s^2

（F） t^2　（G） $t-s$　（H） $t+s$　（I） ts　（J） $\sqrt{t^2+s^2}$

（１２）平均$\dfrac{1}{i}$ $(i=1,2,3)$ の指数分布の確率密度関数 $g_i(x)$ の重み付き平均として表される確率密度関数

$$f_X(x)=\frac{1}{6}g_1(x)+\frac{1}{3}g_2(x)+\frac{1}{2}g_3(x) \quad (x>0)$$

を持つ確率変数 X を、以下の 1～3 の手順でシミュレートする。

1. $(0,1)$ 区間の一様分布に従う確率変数を U とし、一様乱数により U の実現値 u_1、u_2 を生成する。
2. 1 で得られた実現値 u_1 により、合成法を用いて X が従う分布を決定する。なお、その際には、$g_i(x)$ の重みが小さいものから順に、u_1 の範囲を定めるものとする。
3. 1 で得られた実現値 u_2 により、逆関数法を用いて X の実現値を決定する。

いま、一様乱数により U の実現値を生成したところ、$u_1=0.8$、$u_2=1-e^{-2}$ を得た。
このとき、X の実現値は $\boxed{}$ である。

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) 1

(E) $\dfrac{4}{3}$　(F) $\dfrac{3}{2}$　(G) 2　(H) $\dfrac{5}{2}$

問題2． ある経済シナリオジェネレータを用いて金利シナリオの生成を行う。金利シナリオは全部でn種あり、１回の試行につき確率p_i（$p_1+\cdots+p_n=1$）で１種の金利シナリオi（$i=1,\cdots,n$）が選ばれるものとする。ここで、独立なr回の試行において金利シナリオiが選ばれる回数を表す確率変数をX_iとする。このとき、次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（1）金利シナリオが2種（$n=2$）のケースを考える。

X_1は$\boxed{\quad ① \quad}$分布に従う確率変数である。また、$r=5$、$p_1=\dfrac{1}{2}$のとき、$X_1=3$となる確率は$\boxed{\quad ② \quad}$である。

（2）金利シナリオが3種（$n=3$）のケースを考える。

$X_1=k_1$（$k_1=0,1,\cdots,r$）という条件のもと、X_2は平均が$\boxed{\quad ③ \quad}$、分散が$\boxed{\quad ④ \quad}$である$\boxed{\quad ⑤ \quad}$分布に従う。ただし、③、④については、p_3を用いないものとする。

（3）金利シナリオがn種（$n \geq 2$）のケースを考える。

確率ベクトル（$X_1,\cdots,X_n$）の積率母関数$\phi(\theta_1,\cdots,\theta_n)$は$\boxed{\quad ⑥ \quad}$であり、これより$X_i$と$X_j$の共分散は$\boxed{\quad ⑦ \quad}$（$i \neq j$）である。

[①、⑤の選択肢]

(A) 二項	(B) ガンマ	(C) 正規	(D) 負の二項
(E) 一様	(F) 指数	(G) 幾何	(H) 超幾何

[②の選択肢]

(A) $\dfrac{1}{16}$	(B) $\dfrac{1}{8}$	(C) $\dfrac{3}{16}$	(D) $\dfrac{1}{4}$
(E) $\dfrac{5}{16}$	(F) $\dfrac{3}{8}$	(G) $\dfrac{7}{16}$	(H) $\dfrac{1}{2}$

[③、④の選択肢]

（A） rp_2

（B） $rp_2(1-p_2)$

（C） $rp_2(1-p_1-p_2)$

（D） $(r-k_1)p_2$

（E） $(r-k_1)(1-p_2)$

（F） $(r-k_1)p_2(1-p_2)$

（G） $\dfrac{(r-k_1)p_2}{1-p_1}$

（H） $\dfrac{(r-k_1)p_1}{1-p_2}$

（I） $\dfrac{(r-k_1)p_2(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^2}$

（J） $\dfrac{(r-k_1)p_1(1-p_1-p_2)}{(1-p_2)^2}$

[⑥、⑦の選択肢]

（A） $\left\{\sum_{t=1}^{n}\left(p_t e^{\theta_t}\right)\right\}^r$

（B） $\left\{\sum_{t=1}^{r}\left(p_t e^{\theta_t}\right)\right\}^n$

（C） $\left\{\sum_{t=1}^{n}\left(e^{p_t\theta_t}\right)\right\}^r$

（D） $\left\{\sum_{t=1}^{r}\left(e^{p_t\theta_t}\right)\right\}^n$

（E） $r(r-1)p_i p_j$

（F） $n(n-1)p_i p_j$

（G） $-rp_i p_j$

（H） $-np_i p_j$

（I） $-\dfrac{1}{2}rnp_i p_j$

（J） $-r(n-1)p_i p_j$

問題3． ある母集団と標本に関する適合度の検定（χ^2-検定）について考える。この母集団からの標本はk種の特性$E_1,\cdots,E_k$の中のいずれか１つによって特徴づけられるものとし、母集団はこれらの特性をそれぞれ確率$p_1,\cdots,p_k$（$p_1+\cdots+p_k=1$）の割合で含むものとする。このとき、次の（1）、（2）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（1）χ^2-検定の方式について考える。

この母集団から大きさnの標本を抽出したとき、特性$E_1,\cdots,E_k$であったものの個数がそれぞれ$n_1,\cdots,n_k$（$n_1+\cdots+n_k=n$）であったとする。このとき、母数（$p_1,\cdots,p_k$）について

帰無仮説$H_0 : p_i = p_{i0}$（$i=1,\cdots,k$）

を有意水準εとして検定するには、$np_{i0} \geq 5$（$i=1,\cdots,k$）なる条件のもとで、

$$A=\sum_{i=1}^{k}\frac{\boxed{\text{①}}}{\boxed{\text{②}}} > \chi_\phi{}^2(\varepsilon)$$ ならば、仮説H_0を $\boxed{\text{③}}$ すればよい。

ここで、$\phi=\boxed{\text{④}}$であり、$\chi_\phi{}^2(\varepsilon)$は、自由度$\phi$の$\chi^2$分布の上側確率が$\varepsilon$となる値を表すものとする。また、$p_{i0}$（$i=1,\cdots,k$）については、推定値を用いずに決まるものとする。

以上の検定方式は、Aの分布が近似的にχ^2分布に従うことを利用しているが、この関係は帰無仮説H_0の検定において、尤度比検定を用いることにより導くことができる。

まず、p_iの最尤推定値を$\hat{p}_i$とおけば、$\hat{p}_i=\boxed{\text{⑤}}$であり、帰無仮説$H_0$が真のとき尤度比を$\lambda$とすると、$-2\log\lambda=\boxed{\text{⑥}}$である。ここで、$-2\log\lambda$の対数部分を級数展開すると、$n$が十分大きいとき、$-2\log\lambda$は$A$に近似できる。

一方、nが十分大きいとき、$-2\log\lambda$は近似的にχ^2分布に従うことが知られていることから、Aは近似的にχ^2分布に従うことが示される。

[①～④の選択肢]

(A) $k-1$	(B) k	(C) $2k-1$	(D) $n-1$
(E) n	(F) $2n-1$	(G) $n_i p_{i0}$	(H) np_{i0}
(I) $n_i - np_{i0}$	(J) $n-n_i p_{i0}$	(K) $(n_i p_{i0})^2$	(L) $(np_{i0})^2$
(M) $(n_i - np_{i0})^2$	(N) $(n-n_i p_{i0})^2$	(O) 採択	(P) 棄却

[⑤、⑥の選択肢]

(A) $\dfrac{n_i-1}{n-1}$　(B) $\dfrac{n_i}{n-1}$　(C) $\dfrac{n_i}{n}$　(D) $\dfrac{n_i}{n+1}$　(E) $\dfrac{n_i+1}{n+1}$

(F) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i \log\frac{n_i}{np_{i0}}$　(G) $\displaystyle 2\sum_{i=1}^{k} n_i \log\frac{n_i}{np_{i0}}$　(H) $\displaystyle 2\sum_{i=1}^{k} n_i \log\frac{n_i-np_{i0}}{np_{i0}}$

(I) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i \log\frac{(n_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}$　(J) $\displaystyle 2\sum_{i=1}^{k} n_i \log\frac{(n_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}$

(2) χ^2-検定の適用例について考える。(Aは(1)で定義されたものとする)
ある保険会社における1日の支払請求件数を100日にわたって集計したところ、表のような結果を得た。

表

1日の支払請求件数	0件	1件	2件	3件	4件	5件	6件	7件	合計日数
日数	13日	22日	35日	15日	6日	6日	2日	1日	100日

このとき、1日の支払請求件数が従う分布の母平均μの推定値として標本平均$\bar{\mu}=$ ⑦ を用いて、

帰無仮説H_0：1日の支払請求件数が平均値$\bar{\mu}$のポアソン分布に従っている

を有意水準5%として検定する。

(1)における条件$np_{i0}\geq 5$を満たすために特性の個数をプールする(特性の種類数を調整する)必要があることおよび分布の母平均として推定値を用いることに留意すると、仮説H_0を検定するために用いるχ^2分布の自由度ϕは ⑧ である。

いま、$\phi=$ ⑧ について、$\chi_{\phi}^{2}(0.05)$の値に最も近いものは ⑨ であり、上表により算出したAの値に最も近いものは ⑩ であるから、仮説H_0は ⑪ される。
なお、⑩における計算の際には、必要であれば、付表V.「ポアソン確率の値」に記載された数値を用いなさい。

[⑦の選択肢]

（A） 1.9	（B） 2.0	（C） 2.1	（D） 2.2

[⑧の選択肢]

（A） 4	（B） 5	（C） 6	（D） 7

[⑨～⑪の選択肢]

（A） 1.6354	（B） 5.6342	（C） 6.7224	（D） 8.3328
（E） 9.4877	（F） 11.0705	（G） 11.5531	（H） 12.5916
（I） 13.2140	（J） 14.0671	（K） 採択	（L） 棄却

(付表)

I .標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon) \to \varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$$P(x > 1.9600) = 0.025$$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φ のχ^2分布の上側ε点： $\chi_{\varphi}^{2}(\varepsilon)$

φ \ ε	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
36	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812
37	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833
38	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814
39	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252	104.2149
80	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163	128.2989
100	67.3276	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067	140.1695

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側ε点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.100$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon = 0.050$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon = 0.025$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon = 0.010$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon = 0.005$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ. 自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ \ ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

V. ポアソン確率の値 ： $e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}$

ポアソン分布の確率を平均値λと分布の取りうる値kから求める表

λ＼k	0	1	2	3	4	5	6	7
1.0	0.3679	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.0031	0.0005	0.0001
1.1	0.3329	0.3662	0.2014	0.0738	0.0203	0.0045	0.0008	0.0001
1.2	0.3012	0.3614	0.2169	0.0867	0.0260	0.0062	0.0012	0.0002
1.3	0.2725	0.3543	0.2303	0.0998	0.0324	0.0084	0.0018	0.0003
1.4	0.2466	0.3452	0.2417	0.1128	0.0395	0.0111	0.0026	0.0005
1.5	0.2231	0.3347	0.2510	0.1255	0.0471	0.0141	0.0035	0.0008
1.6	0.2019	0.3230	0.2584	0.1378	0.0551	0.0176	0.0047	0.0011
1.7	0.1827	0.3106	0.2640	0.1496	0.0636	0.0216	0.0061	0.0015
1.8	0.1653	0.2975	0.2678	0.1607	0.0723	0.0260	0.0078	0.0020
1.9	0.1496	0.2842	0.2700	0.1710	0.0812	0.0309	0.0098	0.0027
2.0	0.1353	0.2707	0.2707	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034
2.1	0.1225	0.2572	0.2700	0.1890	0.0992	0.0417	0.0146	0.0044
2.2	0.1108	0.2438	0.2681	0.1966	0.1082	0.0476	0.0174	0.0055
2.3	0.1003	0.2306	0.2652	0.2033	0.1169	0.0538	0.0206	0.0068
2.4	0.0907	0.2177	0.2613	0.2090	0.1254	0.0602	0.0241	0.0083
2.5	0.0821	0.2052	0.2565	0.2138	0.1336	0.0668	0.0278	0.0099
2.6	0.0743	0.1931	0.2510	0.2176	0.1414	0.0735	0.0319	0.0118
2.7	0.0672	0.1815	0.2450	0.2205	0.1488	0.0804	0.0362	0.0139
2.8	0.0608	0.1703	0.2384	0.2225	0.1557	0.0872	0.0407	0.0163
2.9	0.0550	0.1596	0.2314	0.2237	0.1622	0.0940	0.0455	0.0188
3.0	0.0498	0.1494	0.2240	0.2240	0.1680	0.1008	0.0504	0.0216

数学（解答例）

問題 1

（1）

X，Y が硬貨を同時に投げたとき表の出る枚数を表す確率変数をそれぞれ H_X，H_Y とすると、硬貨の表裏はそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で出現することから、確率変数 H_X，H_Y の確率分布は以下のとおりとなる。

$$P(H_X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}、\ P(H_X=1)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}、\ P(H_X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$P(H_Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}、\ P(H_Y=2)=P(H_Y=1)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}、\ P(H_Y=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

さて、1回の硬貨投げで X が勝つケースは $(H_X,H_Y)=(2,0)$、$(2,1)$、$(1,0)$ のときであり、H_X，H_Y は互いに独立であることから、この確率 p は、

$$\begin{aligned}p&=P(H_X=2)\cdot P(H_Y=0)+P(H_X=2)\cdot P(H_Y=1)+P(H_X=1)\cdot P(H_Y=0)\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\\&=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

次に、1回の硬貨投げで表が同数出る（引き分ける）確率 q を求める。

この場合は、$(H_X,H_Y)=(2,2)$、$(1,1)$、$(0,0)$ となる確率を求めればよい。したがって、

$$\begin{aligned}q&=P(H_X=2)\cdot P(H_Y=2)+P(H_X=1)\cdot P(H_Y=1)+P(H_X=0)\cdot P(H_Y=0)\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\\&=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

ここで、i 回目の硬貨投げで X が勝つ確率を考えると、これは $i-1$ 回目までは引き分け、i 回目に X が勝つ確率であることから、求める確率は $p\cdot q^{i-1}$ となる。

したがって、引き分けも含めて考えると、X が勝つ確率は、以下のとおりとなる。

$$\sum_{i=1}^{\infty}p\cdot q^{i-1}=\frac{p}{1-q}=\frac{3}{11}$$

よって、<u>解答は①　(D)　　②　(F)</u>

（2）

検査個数がk個となるのは、$k-1$個目までに 1 個目の不良品を見つけ、k個目で 2 個目の不良品を見つけるときであるから、その確率$P(X=k)$は次のとおりとなる。

$$P(X=k)=\frac{{}_{k-1}C_1}{{}_6C_2}=\frac{k-1}{15}\qquad(k=2,3,4,5,6)$$

したがって、平均μおよび標準偏差σは次のとおり求められる。

$$\mu=E(X)=\sum_{k=2}^{6}k\cdot P(X=k)=2\times\frac{1}{15}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{3}{15}+5\times\frac{4}{15}+6\times\frac{5}{15}=\frac{14}{3}\quad\cdots\ ①$$

$$E(X^2)=\sum_{k=2}^{6}k^2\cdot P(X=k)=4\times\frac{1}{15}+9\times\frac{2}{15}+16\times\frac{3}{15}+25\times\frac{4}{15}+36\times\frac{5}{15}=\frac{70}{3}$$

$$\sigma=\sqrt{E(X^2)-E(X)^2}=\sqrt{\frac{70}{3}-\left(\frac{14}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{3}\quad\cdots\ ②$$

よって、解答は ①（H） ②（C）

（3）

確率変数X, Yの確率密度関数はそれぞれ以下のとおり求めることができる。

$$f_X(x)=\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^\infty=e^{-x}\quad(x>0)$$

$$f_Y(y)=\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dx=e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=e^{-y}\quad(y>0)$$

ここで、$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$が成立することから、$X$, Yは互いに独立。

また、

$$E(X)=\int_0^\infty xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1=E(Y)$$

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^\infty+2\int_0^\infty xe^{-x}dx=2=E(Y^2)$$

$$M_X(\theta)=E\left(e^{\theta X}\right)=\int_0^\infty e^{-x(1-\theta)}dx=\left[-\frac{1}{1-\theta}e^{-x(1-\theta)}\right]_0^\infty=\frac{1}{1-\theta}=M_Y(\theta)\quad(\theta<1)$$

よって、

$$E(Z^2)=E\left((X+Y)^2\right)=E\left(X^2+2XY+Y^2\right)=E(X^2)+2E(X)E(Y)+E(Y^2)=6$$

$$M_Z(\theta)=E\left(e^{\theta Z}\right)=E\left(e^{\theta(X+Y)}\right)=E\left(e^{\theta X}\right)E\left(e^{\theta Y}\right)=M_X(\theta)M_Y(\theta)=\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2\quad(\theta<1)$$

よって、解答は① （D） ② （H）

（4）

確率変数X_i（$i=1,\cdots,n$）は、すべて平均３のポアソン分布に従う。ポアソン分布は平均と分散が等しいことから、$E(X_i)=3$、$V(X_i)=3$

したがって、$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ は平均$3n$、分散$3n$のポアソン分布に従う。(ポアソン分布の再生性)

よって、

$$P(Y=y)=\frac{e^{-3n}(3n)^y}{y!} \qquad (y=0,1,2,\cdots)$$

また、中心極限定理より、nが十分大きければ、

$$P\left(\frac{Y-3n}{\sqrt{3n}}\le y\right)\to\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

ここで、特に$y=0$とすれば、

$$P\left(\frac{Y-3n}{\sqrt{3n}}\le 0\right)=P(Y\le 3n)\to\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{2} \qquad (n\to\infty)$$

一方、

$$\begin{aligned}P(Y\le 3n)&=P(Y=0)+P(Y=1)+\cdots+P(Y=3n-1)+P(Y=3n)\\&=\sum_{y=0}^{3n}P(Y=y)\end{aligned}$$

よって、nが十分大きければ

$$\sum_{y=0}^{3n}P(Y=y)\fallingdotseq\frac{1}{2}$$

よって、解答は ① （E） ② （H）

（5）

線分ＡＢおよびＡＣの長さを表す確率変数をそれぞれA、Bとする。

A、Bの確率密度関数をそれぞれ$f_A(x)$、$f_B(x)$とすると、

$$f_A(x) = f_B(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

であるから、確率変数C=A−Bの確率密度関数は

$$f_C(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(x) f_B(z+x)dx = \int_{-1}^{1} f_A(x) f_B(z+x)dx$$

$-1 \le z < 0$のとき

$$f_C(z) = \int_{-1}^{0} 0 \cdot f_B(z+x)dx + \int_{0}^{-z} 1 \cdot 0dx + \int_{-z}^{1} 1 \cdot 1dx = [x]_{-z}^{1} = 1+z$$

$0 \le z \le 1$のとき

$$f_C(z) = \int_{-1}^{0} 0 \cdot f_B(z+x)dx + \int_{0}^{1-z} 1 \cdot 1dx + \int_{1-z}^{1} 1 \cdot 0dx = [x]_{0}^{1-z} = 1-z$$

それ以外の場合は一律で0となる。

正方形の面積を表す確率変数Xの確率分布関数$F_X(x)$を求めると、$0 \le x \le 1$において

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(C^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le C \le \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \le C < 0) + P(0 \le C \le \sqrt{x}) =$$

$$\int_{-\sqrt{x}}^{0}(1+z)dz + \int_{0}^{\sqrt{x}}(1-z)dz = \left[z + \frac{z^2}{2}\right]_{-\sqrt{x}}^{0} + \left[z - \frac{z^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{x}} = -\left(-\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) + \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{x} - x$$

確率密度関数$f_X(x)$を求めると、$0 < x < 1$において

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \left(2\sqrt{x} - x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$となる。

よって、解答は（C）

（6）

男女それぞれの支持率を p_x, p_y とすると、それぞれの標本平均は $\hat{p}_x = 0.4, \hat{p}_y = 0.35$ である。

全体の支持率を p とすると $\hat{p} = \frac{3}{5}\hat{p}_x + \frac{2}{5}\hat{p}_y$ によって推定される。また、この推定量の分散 $V(\hat{p})$ は以下のとおりとなる。

$$V(\hat{p}) = \frac{9}{25}V(\hat{p}_x) + \frac{4}{25}V(\hat{p}_y) \fallingdotseq \frac{9}{25}\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n_x} + \frac{4}{25}\frac{\hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{n_y}$$

$$= \frac{\frac{0.4\times0.6\times9}{1000} + \frac{0.35\times0.65\times4}{800}}{5^2} = \frac{32.975}{500^2}$$

よって、p の信頼区間は近似法によると次のとおり求められる。

$$\left(\hat{p} - u(\frac{\varepsilon}{2})\times\sqrt{V(\hat{p})}, \hat{p} + u(\frac{\varepsilon}{2})\times\sqrt{V(\hat{p})}\right)$$

$$= \left(0.6\times0.4 + 0.4\times0.35 - 1.96\times\frac{\sqrt{32.975}}{500}, 0.6\times0.4 + 0.4\times0.35 + 1.96\times\frac{\sqrt{32.975}}{500}\right)$$

$$= (0.3575, 0.4025)$$

よって、解答は　①（D）②（G）

（7）

帰無仮説H_0、対立仮説H_1を

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2{,}500 \\ H_1 : \mu = 2{,}750 \end{cases}$$

として仮説検定を行う。

まず、n個の標本変量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$は、それぞれ独立で、平均μ、分散σ^2の正規分布に従うとすると、標本平均$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n}$は平均$\mu$、分散$\dfrac{\sigma^2}{n}$の正規分布に従うことが分かる。よって、$\overline{X}$を標準化した$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$は標準正規分布に従う。

問題より、有意水準（第1種の誤りが起こる確率）が5%であるため、

$$P\{\overline{X} \geq k \mid \mu = 2{,}500\} = P\left\{Z \geq \frac{k - 2{,}500}{\sqrt{\dfrac{300^2}{20}}}\right\} = 0.05$$

標準正規分布表より標準正規分布の上側5%点は1.6449であるから、

$$\frac{k - 2{,}500}{\sqrt{\dfrac{300^2}{20}}} = 1.6449 \qquad \therefore k \fallingdotseq 2{,}610.3432$$

よって、検出力は

$$1 - P\{\text{第2種の誤りが起こる}\} = 1 - P\{\overline{X} \leq 2{,}610.3432 \mid \mu = 2{,}750\}$$

$$= 1 - P\left\{Z \leq \frac{2{,}610.3432 - 2{,}750}{\sqrt{\dfrac{300^2}{20}}}\right\}$$

$$= 1 - P\{Z \leq -2.0819\}$$

$$= 1 - P\{Z \geq 2.0819\}$$

標準正規分布表より$P\{Z \geq 2.0819\} \fallingdotseq 0.0188$であるため、

$1 - P\{Z \geq 2.0819\} \fallingdotseq 0.9812$

よって、解答は　**（G）**

（8）

標本の大きさ３のときの$X_{(2)}$の確率密度関数は、

$$\tilde{f}(x_{(2)}) = 6(\int_0^{x_{(2)}} f(x)dx)(\int_{x_{(2)}}^{l} f(x)dx)f(x_{(2)})$$

$$= \frac{6}{l^3} x_{(2)}(l - x_{(2)})$$

したがって、

$$E[X_{(2)}{}^n] = \int_0^l x_{(2)}{}^n \tilde{f}(x_{(2)})dx_{(2)}$$

$$= \int_0^l \frac{6}{l^3} x_{(2)}{}^{n+1}(l - x_{(2)})dx_{(2)}$$

$$= \frac{6l^n}{(n+2)(n+3)}$$

次に、標本の大きさ３のときの$R = X_{(3)} - X_{(1)}$の確率密度関数は、

$$f_R(R) = 6\int_0^{l-R} (\int_{x_{(1)}}^{R+x_{(1)}} f(x)dx)f(x_{(1)})f(R + x_{(1)})dx_{(1)}$$

$$= \frac{6}{l^3} R(l - R)$$

したがって、

$$E[R^n] = \int_0^l R^n f_R(R)dR$$

$$= \int_0^l \frac{6}{l^3} R^{n+1}(l - R)dR$$

$$= \frac{6l^n}{(n+2)(n+3)}$$

よって、解答は　①（C）、②（C）

（9）

最小二乗法による回帰係数$\hat{\beta}$および回帰直線のy切片$\hat{\alpha}$は、$\bar{x}=\dfrac{147}{7}=21$，$\bar{y}=\dfrac{133}{7}=19$より、

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{2{,}837-7\times21\times19}{3{,}135-7\times21\times21}=\frac{11}{12}$$

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=19-\frac{11}{12}\times21=-\frac{1}{4}$$

このときの誤差分散の推定値$\hat{\sigma}^2$は、$\hat{\alpha}$と$\hat{\beta}$に推定値を用いていることから自由度が２減り、rを標本相関係数とすると、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i\right)\right\}^2=\frac{n}{n-2}s_y^2\left(1-r^2\right)=\frac{n}{n-2}s_y^2\left(1-\frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}\right)$$

ここで、

$$s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2=\frac{3{,}135}{7}-21\times21=\frac{48}{7}$$

$$s_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\bar{y}^2=\frac{2{,}573}{7}-19\times19=\frac{46}{7}$$

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{2{,}837}{7}-21\times19=\frac{44}{7}$$

これらを用いて、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{n}{n-2}\left(s_y^2-\frac{s_{xy}^2}{s_x^2}\right)=\frac{7}{5}\times\left(\frac{46}{7}-\frac{\left(\frac{44}{7}\right)^2}{\frac{48}{7}}\right)=\frac{17}{15}$$

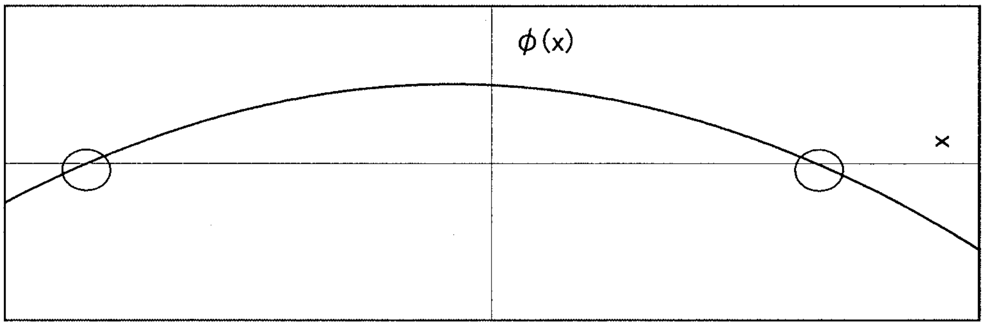
よって、解答は①（F），②（C），③（J）

（１０）

２次の自己回帰モデル（$AR(2)$ モデル）$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ が定常性の条件を満たすためには、特性方程式 $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$ のすべての解の絶対値が 1 より大きいことが条件となる。

つまり、$Y_t = 1 + aY_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$ の特性方程式 $\phi(x) = 1 - ax - 0.2x^2 = 0$ のすべての解の絶対値が 1 より大きくなるような a の範囲を求めればよい。

特性方程式 $\phi(x) = 0$ の判別式が $a^2 - 4(-0.2) = a^2 + 0.8 > 0$ であることから、この特性方程式の解は常に実数である。$\phi(0) = 1 > 0$ かつ $\phi(x)$ が上に凸の二次曲線であることから、特性方程式の解の絶対値が 1 より大きくなるための条件は、$\phi(-1) = 1 + a - 0.2 > 0$ と $\phi(1) = 1 - a - 0.2 > 0$ の両方を満たす（＊）ことである。（下のグラフの○の箇所がこの特性方程式の解となるが、このいずれの点の絶対値も 1 より大きくなることが求めるべき条件となる。）



上記の条件（＊）より、$-0.8 < a < 0.8$ が求めるべき条件である。

よって、解答は　①　**（B）**　②　**（J）**

（１１）

確率過程$\{X_s\}, s \geq 0$が標準ブラウン運動であることから、標準ブラウン運動の定義より

$$E(X_s) = 0$$
$$V(X_s) = s$$

である。また、$t > s$とすると、X_sと$X_t - X_s$は独立となることから、

$$E(X_t \cdot X_s) = E(X_s \cdot (X_t - X_s + X_s)) = E(X_s{}^2 + X_s \cdot (X_t - X_s))$$
$$= E(X_s{}^2) + E(X_s \cdot (X_t - X_s)) = V(X_s) + E(X_s)E(X_t - X_s)$$
$$= s$$

よって、解答は　①（A）②（C）③（C）

（１２）

確率密度関数$f_X(x)$は、平均が$\frac{1}{i}$ $(i = 1,2,3)$の指数分布の確率密度関数$g_i(x)$の重み付き平均として、

$$f_X(x) = \frac{1}{6}g_1(x) + \frac{1}{3}g_2(x) + \frac{1}{2}g_3(x) \quad (x > 0)$$

と表されているから、X_i $(i = 1,2,3)$をそれぞれ独立に平均$\frac{1}{i}$の指数分布に従う確率変数とし、X_iと独立に、

$$P(I = 1) = \frac{1}{6} \quad、P(I = 2) = \frac{1}{3} \quad、P(I = 3) = \frac{1}{2}$$

となる確率変数をIとすると、$X \sim X_I$である。

よって、題意から、$(0,1)$区間の一様分布に従う確率変数Uの一様乱数による実現値をu_1、u_2とし、

$G_i(x) = \int_{-\infty}^{x} g_i(u)du$とすると、

$0 < u_1 \leq \frac{1}{6}$ならば$X = G_1^{-1}(u_2) = -\log(1 - u_2)$

$\frac{1}{6} < u_1 \leq \frac{1}{2}$ならば$X = G_2^{-1}(u_2) = -\frac{1}{2}\log(1 - u_2)$

$\frac{1}{2} < u_1 < 1$ならば$X = G_3^{-1}(u_2) = -\frac{1}{3}\log(1 - u_2)$

として、Xの実現値が定まることになる。

いま、u_1が０.８、u_2が$1 - e^{-2}$であるから、求める確率変数Xの実現値は$\frac{2}{3}$となる。

よって、解答は（C）

問題2

（1）

X_1 は r 回の試行において金利シナリオ1が選ばれる回数を表す確率変数であり、また1回の試行で金利シナリオ1は確率 p_1 で選ばれることから、 X_1 は二項分布 $B(r, p_1)$ に従う。

ここで、 $n=2$ より、 $p_1+p_2=1$。よって、確率分布は以下のとおり。

$$P(X_1=k_1)=\binom{r}{k_1}p_1^{k_1}(1-p_1)^{r-k_1} \quad (k_1=0,\cdots,r)$$

従って、 $r=5$、 $p_1=\dfrac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} P(X_1=3)&=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-3} \\ &=10\left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &=\frac{5}{16} \end{aligned}$$

となる。

よって、解答は　①　（A）　②　（E）

（2）

X_1, X_2, X_3は多項分布に従うことから、

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = \frac{r!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$$

ここで、$k_1 + k_2 + k_3 = r$かつ$p_1 + p_2 + p_3 = 1$より、

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = \frac{r!}{k_1!k_2!(r-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1-p_1-p_2)^{r-k_1-k_2}$$

また、明らかに、

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \frac{r!}{k_1!k_2!(r-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1-p_1-p_2)^{r-k_1-k_2}$$

したがって、

$$P(X_2 = k_2 \mid X_1 = k_1) = \frac{P(X_1 = k_1, X_2 = k_2)}{P(X_1 = k_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{r!}{k_1!k_2!(r-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1-p_1-p_2)^{r-k_1-k_2}}{\dfrac{r!}{k_1!(r-k_1)!} p_1^{k_1} (1-p_1)^{r-k_1}}$$

$$= \frac{(r-k_1)!}{k_2!(r-k_1-k_2)!} \times \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{k_2} \left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^{r-k_1-k_2}$$

$$= \binom{r-k_1}{k_2} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{k_2} \left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^{r-k_1-k_2}$$

これは二項分布$B\left(r-k_1, \dfrac{p_2}{1-p_1}\right)$の確率分布である。

よって、$X_1 = k_1$（$k_1 = 0,1,\cdots,r$）という条件のもとX_2は

平均：$E(X_2 \mid X_1 = k_1) = \dfrac{(r-k_1)p_2}{1-p_1}$

分散：$V(X_2 \mid X_1 = k_1) = \dfrac{(r-k_1)p_2(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^2}$

の二項分布に従う。

よって、解答は ③ （G） ④ （I） ⑤ （A）

（3）

確率ベクトル（$X_1,\cdots,X_n$）は多項分布に従うことから、

$$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n)=\frac{r!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}$$

（$k_1,k_2,\cdots,k_n$ は正または０の整数で $k_1+k_2+\cdots+k_n=r$）

したがって、確率ベクトル（$X_1,\cdots,X_n$）の積率母関数は多項定理を用いて、

$$\begin{aligned}\phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)&=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=r\\ k_1\geq 0,\cdots,k_n\geq 0}} e^{\theta_1k_1+\theta_2k_2+\cdots+\theta_nk_n}\cdot\frac{r!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}\\ &=\sum\frac{r!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}(p_1e^{\theta_1})^{k_1}(p_2e^{\theta_2})^{k_2}\cdots(p_ne^{\theta_n})^{k_n}\\ &=\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+\cdots+p_ne^{\theta_n}\right)^r\\ &=\left\{\sum_{t=1}^{n}\left(p_te^{\theta_t}\right)\right\}^r\end{aligned}$$

を得る。X_i の積率母関数は

$$\phi_i(\theta_i)=\phi(0,\cdots,0,\theta_i,0,\cdots,0)=\left\{p_ie^{\theta_i}+(1-p_i)\right\}^r$$

これは二項分布 $B(r,p_i)$ に従う確率変数の積率母関数であるから

$E(X_i)=rp_i$

また、$i\neq j$ として

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=r(r-1)\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+\cdots+p_ne^{\theta_n}\right)^{r-2}\cdot p_ie^{\theta_i}\cdot p_je^{\theta_j}$$

よって、

$$E(X_i\cdot X_j)=\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}(0,0)=r(r-1)p_ip_j$$

X_i と X_j の共分散は

$$\begin{aligned}C(X_i\cdot X_j)&=E(X_i\cdot X_j)-E(X_i)\cdot E(X_j)\\ &=r(r-1)p_ip_j-(rp_i)(rp_j)\\ &=-rp_ip_j\end{aligned}$$

となる。

よって、解答は　⑥　（A）　⑦　（G）

問題3

（1） χ^2-検定の方式について考える。

母数（$p_1,\cdots,p_k$）について

帰無仮説H_0：$p_i = p_{i0}$（$i=1,\cdots,k$） を有意水準εとして検定するには、$np_{i0} \geq 5$（$i=1,\cdots,k$）なる条件のもとで、

$$A = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} > \chi_\phi{}^2(\varepsilon)$$ならばH_0を棄却すればよい。ただし、ここで$\phi = k-1$である。

次に、Aの分布が近似的にχ^2分布に従うことを尤度比検定を用いて導く。

母数（$p_1,\cdots,p_k$）の尤度関数は

$L(p) = p_1{}^{n_1} p_2{}^{n_2} \cdots p_k{}^{n_k}$ である。

$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$であるから、独立な母数の数は$k-1$個である。したがって、解析的に$L(p)$の最大化を行うときにはこのことに留意する必要がある。ここではp_kを残りの母数で表現することにする。尤度関数の対数をとり、p_iについて微分すれば

$\log L(p) = n_1 \log p_1 + \cdots + n_k \log p_k$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \log L(p) = \frac{n_i}{p_i} + \frac{n_k}{p_k}\frac{\partial p_k}{\partial p_i} = \frac{n_i}{p_i} - \frac{n_k}{p_k}$$

最大値に対しては$k-1$個の偏導関数が0になることが必要である。

すなわち、

$$\frac{n_i}{p_i} - \frac{n_k}{p_k} = 0 \qquad i = 1,\cdots,k-1$$

p_iの最尤推定値を$\hat{p}_i$とおけば、

$$\hat{p}_i = \frac{\hat{p}_k}{n_k} n_i \qquad i = 1,\cdots,k$$

ここで、$\hat{p}_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \hat{p}_i$

$\hat{p}_i$について、$i = 1,\cdots,k$の和をとると、

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \hat{p}_i = \frac{\hat{p}_k}{n_k} \sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{\hat{p}_k}{n_k} n$$

よって、$\hat{p}_i = \dfrac{n_i}{n} \qquad i = 1,\cdots,k$

また、帰無仮説$H_0: p_i = p_{i0}, i=1,\cdots,k$が真であるとき、それ以外に残る母数はない。よって帰無仮説H_0が真であるときの母数に対する尤度関数を$L_0(p)$とおくと、尤度比λは次式で表される。

$$\lambda = \frac{L_0(\hat{p})}{L(\hat{p})} = \frac{{p_{10}}^{n_1}{p_{20}}^{n_2}\cdots{p_{k0}}^{n_k}}{\left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1}\left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}\cdots\left(\frac{n_k}{n}\right)^{n_k}}$$

$$= \left(\frac{np_{10}}{n_1}\right)^{n_1}\left(\frac{np_{20}}{n_2}\right)^{n_2}\cdots\left(\frac{np_{k0}}{n_k}\right)^{n_k}$$

これより、

$$-2\log\lambda = 2\sum_{i=1}^{k} n_i \log\frac{n_i}{np_{i0}}$$

となる。

よって、<u>解答は　①（M）②（H）③（P）④（A）⑤（C）⑥（G）</u>

（2）χ^2-検定の適用例について考える。
表の数値より標本平均$\overline{\mu} = 2.1$である。よって、
帰無仮説H_0：1日の支払請求件数が平均値2.1のポアソン分布に従っている
を有意水準5%として検定する。

付表より1日の支払請求件数ごとに平均値2.1のポアソン確率の値p_{i0}を求め、合計日数が100日であるので$n=100$について理論的期待値np_{i0}を計算すると、それぞれ以下のとおりとなる。

1日の支払請求件数	日数	ポアソン確率の値	理論的期待値	
i	n_i	p_{i0}	np_{i0}	$(n_i - np_{i0})^2/np_{i0}$
0件	13日	0.1225	12.25	0.045918…
1件	22日	0.2572	25.72	0.538040…
2件	35日	0.2700	27.00	2.370370…
3件	15日	0.1890	18.90	0.804761…
4件	6日	0.0992	9.92	1.549032…
5件	6日	0.0417	4.17	0.803093…
6件	2日	0.0146	1.46	0.199726…
7件	1日	0.0044	0.44	0.712727…
合計	100			7.023670…

ここで、$np_{i0} \geq 5$の条件を満たすため、１日の支払請求件数が5,6,7件の値をプールすると、以下のとおりとなる。

１日の支払請求件数	日数	ポアソン確率の値	理論的期待値	
i	n_i	p_{i0}	np_{i0}	$(n_i - np_{i0})^2 / np_{i0}$
0件	13日	0.1225	12.25	0.045918…
1件	22日	0.2572	25.72	0.538040…
2件	35日	0.2700	27.00	2.370370…
3件	15日	0.1890	18.90	0.804761…
4件	6日	0.0992	9.92	1.549032…
5～7件	9日	0.0607	6.07	1.414316…
合計	100日			6.722439…

これにより、$A = 6.722439\cdots$である。
また、プールの結果、特性の種類数は6個となるが、母平均に推定値を用いていることから、さらに自由度を1減らして検定を行うこととなる。

以上から、Aと自由度$6-1-1=4$のχ^2分布の上側 5％点$\chi_4^{\ 2}(0.05)$との比較により帰無仮説H_0の検定を行えばよい。付表より、$\chi_4^{\ 2}(0.05)$は9.4877であるから、$A < \chi_4^{\ 2}(0.05)$となり、帰無仮説H_0は採択される。つまり、１日の支払請求件数は平均値2.1のポアソン分布に従っているといえる。

よって、解答は ⑦ （C）⑧ （A）⑨ （E） ⑩ （C） ⑪ （K）