数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いよ。〕

問題１． 次の各問の空欄に入る解答を、それぞれの選択肢の中から一つ選んで解答用紙の所定の欄にマークを記入せよ。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（６０点）

（１）ある製品を生産する機械が3台あり、それを X, Y, Z とする。X, Y, Z の各機械から生産される製品のうちそれぞれ5%，4%，2%の割合で不良品が含まれることが経験的に知られており、また、製品が不良品であるとき、それが X, Y, Z の各機械から生産されたものである確率はそれぞれ $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$ であるとする。このとき、Z は全体の $\boxed{}$ %を生産する。

(A)	15	(B)	20	(C)	25	(D)	30
(E)	35	(F)	40	(G)	45	(H)	50

（２）確率変数 X, Y が互いに独立に標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、確率変数 $U = \dfrac{X}{Y}$ の確率密度関数は、

$$f(u) = \frac{\boxed{①}}{\boxed{②}}$$ である。

(A)	1	(B)	2	(C)	$1+e^{-u}$	(D)	$1+u^2$
(E)	$\sqrt{1+e^{-u}}$	(F)	$\sqrt{1+u^2}$	(G)	$\pi(1+e^{-u})$	(H)	$\pi(1+u^2)$
(I)	$\pi\sqrt{1+e^{-u}}$	(J)	$\pi\sqrt{1+u^2}$				

（3）離散的確率変数 X，Y の確率分布をそれぞれ、

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (x=1,2,\cdots),\qquad g(y)=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^y \quad (y=1,2,\cdots)$$ とする。

このとき、X の積率母関数 $M_X(\theta)$，Y の積率母関数 $M_Y(\theta)$ はそれぞれ、

$$M_X(\theta)=\frac{\boxed{①}}{\boxed{②}}\quad (e^\theta<2),\qquad M_Y(\theta)=\frac{2e^\theta}{3-e^\theta}\quad (e^\theta<3)$$ である。

また、X，Y が互いに独立であるとき、$X+Y$ の原点のまわりの 2 次の積率は、

$$E\left((X+Y)^2\right)=\boxed{③}$$ である。

(A)	$\frac{3}{4}$	(B)	e^θ	(C)	$2e^\theta$	(D)	$e^\theta-2$
(E)	2	(F)	$\frac{11}{4}$	(G)	3	(H)	$\frac{7}{2}$
(I)	$\frac{25}{4}$	(J)	$2-e^\theta$	(K)	12	(L)	$e^{2\theta}$
(M)	$\frac{49}{4}$	(N)	15	(O)	$2-e^{2\theta}$	(P)	18

（4）確率変数 $X_1,X_2,\cdots$ が互いに独立にそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、中心極限定理より n が十分大きければ、$X_1^{\,2}+X_2^{\,2}+\cdots+X_n^{\,2}$ が $n+\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ 以下となる確率に最も近いものは $\boxed{}$ である。

(A)	0.1587	(B)	0.3085	(C)	0.4013	(D)	0.4207
(E)	0.5793	(F)	0.5987	(G)	0.6915	(H)	0.8413

（5）長さ a の線分 AB 上に任意の２点 X，Y をとる。線分 XY の長さが k 以下である確率が $\frac{1}{3}$ であるとき、k の値は$\boxed{}$である。ただし、２点 X，Y は線分 AB 上どこに選ばれるのも同様に確からしいように独立に選ばれるものとする。

(A) $\frac{a}{3}$　(B) $\frac{a}{6}$　(C) $\frac{a}{9}$　(D) $\frac{(2-\sqrt{3})a}{3}$

(E) $\frac{(3-\sqrt{6})a}{3}$　(F) $\frac{(2-\sqrt{3})a}{6}$　(G) $\frac{(3-\sqrt{6})a}{6}$　(H) いずれにも該当しない

（6）２種類の品物 X，Y が入っている箱がある。
X，Y を合わせた品物の個数は100個で、
（R）X の個数75個、Y の個数25個　（S）X の個数25個、Y の個数75個
のいずれかであることは間違いないが、どちらが正しいかは不明である。
「帰無仮説 H_0 :（S）が正しい」を、非復元抽出によって無作為に8個の品物を取り出して検定することにした。
取り出した8個の品物のうち、X が3個以上入っていた場合は H_0 を棄却することとすると、第1種の誤りのおこる確率に最も近いものは$\boxed{①}$である。また、第２種の誤りのおこる確率に最も近いものは$\boxed{②}$である。

(A) 0.00423　(B) 0.00708　(C) 0.01582　(D) 0.05513　(E) 0.09005

(F) 0.14490　(G) 0.18010　(H) 0.25771　(I) 0.32146　(J) 0.37998

（7）箱の中に、1,2,3,…,11なる番号のついた札が1枚ずつ、合計11枚入っている。この箱から非復元抽出によって無作為に3枚の札を取り出したときに得られる番号の和の分散は$\boxed{}$である。

(A) $\frac{8}{3}$　(B) $\frac{10}{3}$　(C) 8　(D) 10

(E) 20　(F) 24　(G) $\frac{80}{3}$　(H) 30

（8）一様分布$U(0,b)$からの大きさnの標本について、パラメータbの最尤推定量をYとする。このとき、αYがbの不偏推定量となるような定数αは$\boxed{}$である。

(A)	1	(B)	2	(C)	n	(D)	$2n$
(E)	$\dfrac{n-1}{n}$	(F)	$\dfrac{n+1}{n}$	(G)	$\dfrac{2n-1}{n}$	(H)	$\dfrac{2n+1}{n}$

（9）3 種類のデータx_{1i}, x_{2i}, y_iについて、5 個の観測値(x_{11}, x_{21}, y_1)、(x_{12}, x_{22}, y_2)、(x_{13}, x_{23}, y_3)、(x_{14}, x_{24}, y_4)、(x_{15}, x_{25}, y_5)が与えられている。
ここで、

$$\sum_{i=1}^{5} x_{1i} = 5 \quad、\quad \sum_{i=1}^{5} x_{2i} = 5 \quad、\quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 30 \quad、\quad \sum_{i=1}^{5} x_{1i}^2 = 7 \quad、$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{2i}^2 = 7 \quad、\quad \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 206 \quad、\quad \sum_{i=1}^{5} x_{1i}x_{2i} = 5 \quad、\quad \sum_{i=1}^{5} x_{1i}y_i = 34 \quad、$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{2i}y_i = 36$$

であった。
最小二乗法を用いて$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$で線形回帰した場合、
α、β_1、β_2の推定値はそれぞれ $\boxed{①}$ 、 $\boxed{②}$ 、 $\boxed{③}$ である。

(A)	1	(B)	2	(C)	3	(D)	4
(E)	5	(F)	6	(G)	-1	(H)	-2
(I)	-3	(J)	-4	(K)	-5	(L)	-6

（１０）次は時系列解析に関する記述である。（①、②については、イ、ロの命題が正しくなるような語句を、③については、数値をそれぞれ選択するものとする。）

イ．p 次の自己回帰モデル $AR(p)$ の特性方程式 $\phi(x) = 1-(\phi_1 x + \phi_2 x^2 + \cdots + \phi_p x^p) = 0$ の解の絶対値がすべて１ $\boxed{\text{①}}$ とき、$AR(p)$ は定常性を持つ。

ロ．q 次の移動平均モデル $MA(q)$ の特性方程式 $\theta(x) = 1-(\theta_1 x + \theta_2 x^2 + \cdots + \theta_q x^q) = 0$ の解の絶対値がすべて１ $\boxed{\text{②}}$ とき、$MA(q)$ は反転可能である。

ハ．識別可能である $MA(1)$ モデル $Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ の分散 γ_0 および自己共分散 γ_1 がそれぞれ $\gamma_0 = \dfrac{26}{5}$、$\gamma_1 = 1$ として与えられるとき、$\theta_1 = \boxed{\text{③}}$ である。

(A)	より大きい	(B)	より小さい	(C)	以上である	(D)	以下である
(E)	に等しい	(F)	-1	(G)	1	(H)	0
(I)	-5	(J)	$-\dfrac{1}{5}$	(K)	$\dfrac{1}{5}$	(L)	5

（１１）　壺Ｒには赤球が１個、青球が２個入っており、壺Ｓには赤球が２個、青球が１個入っている。ここで、それぞれの壺から球を無作為に１個取り出し交換する試行を繰り返すことを考える。

ｎ回の試行の直後の壺Ｒの赤球の個数を表す確率変数を X_n とする。

このとき、$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ ＝ $\boxed{\text{①}}$ 、$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1)$ ＝ $\boxed{\text{②}}$

である。

(A)	$\dfrac{1}{20}$	(B)	$\dfrac{1}{18}$	(C)	$\dfrac{1}{9}$	(D)	$\dfrac{1}{4}$	(E)	$\dfrac{1}{3}$
(F)	$\dfrac{7}{18}$	(G)	$\dfrac{4}{9}$	(H)	$\dfrac{9}{20}$	(I)	$\dfrac{1}{2}$	(J)	$\dfrac{5}{9}$

（１２）確率密度関数 $g(x)$ および定数 c を用いて、確率密度関数が $f(x)$ である分布の確率変数を棄却法で生成したい。$f(x)$ および $g(x)$ をそれぞれ、

$$f(x) = 6(4x - 7x^2 + 2x^3) \qquad (0 < x < 1)$$
$$g(x) = 1 \qquad (0 < x < 1)$$

とする。

$f(x)$ に従う確率変数を求めるための繰り返し回数を最小にするような定数 c は $\boxed{}$ である。

(A) 3　　(B) $\frac{28}{9}$　　(C) $\frac{29}{9}$　　(D) $\frac{10}{3}$

(E) $\frac{31}{9}$　　(F) $\frac{32}{9}$　　(G) $\frac{11}{3}$　　(H) $\frac{34}{9}$

問題2． 同種の機械が n 機あり、各機械の稼働期間は互いに独立かつ同一の確率密度関数 $f(t)=ae^{-at}$ $(t>0, a$ は正の定数$)$ に従うものとする。<u>（1）では $a=0.02$ 、（2）では $a=1$ とするとき</u>、以下の各問の空欄に入る解答をそれぞれの選択肢の中から一つ選んで解答用紙の所定の欄にマークを記入せよ。

なお、稼働期間とは、機械を新品の状態から稼働させたとき、稼働を開始してから完全に稼働を停止するまでの期間をいい、各機械は、稼働期間中は停止することなく稼働し続けるものとする。

（２０点）

（1）この機械を新品の状態から1機だけ稼働させる場合を考える。稼働期間の単位を月数とした場合、この機械の生産者は、機械の保証期間を $\boxed{\text{①}}$ ヵ月とすれば、この機械が保証期間を超えて稼働する確率を80%とすることができる。

また、保証期間を $\boxed{\text{①}}$ ヵ月とした場合、この機械が保証期間を超えて稼働したことを条件として、稼働開始から保証期間の2倍の期間を超えて稼働する確率は $\boxed{\text{②}}$ %である。なお、$e^{-0.22}=0.8$ とする。

〔①、②の選択肢〕

(A)	7	(B)	10	(C)	11	(D)	18	(E)	22
(F)	40	(G)	55	(H)	68	(I)	73	(J)	80

（2）この機械をすべて新品の状態から n 機同時に稼働させる場合を考える。n 機のうち、最初にある機械が完全に稼働を停止するまでの期間を確率変数 X_n 、すべての機械が完全に稼働を停止するまでの期間を確率変数 Y_n で表すとき、X_n の確率密度関数 $g(t)$ および Y_n の確率密度関数 $h(t)$ はそれぞれ

$$g(t)=\boxed{\text{③}}\quad(t>0)$$

$$h(t)=\boxed{\text{④}}\quad(t>0)$$

と表すことができる。

次に、X_n 、Y_n の平均値について考える。

X_n の平均値については確率密度関数から直接計算することができ、

$$E(X_n)=\boxed{\text{⑤}}$$

となる。

一方、Y_n については次のように考える。
今、n 機のうち、最初にある機械が完全に稼働を停止するまでの期間を Z_1、そこから2番目の機械が完全に稼働を停止するまでの期間を Z_2、一般に $i-1$ 番目の機械が完全に稼働を停止してから i 番目の機械が完全に稼働を停止するまでの期間を Z_i とすると、Y_n はすべての機械が完全に稼働を停止するまでの期間であることから、

$$Y_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

と表すことができる。
ここで、この機械が稼働開始から一定期間 g を超えて稼働する確率と、稼働開始から一定期間 g を超えて稼働したことを条件として、稼働開始から期間 $2g$ を超えて稼働する確率との関係に着目し、この関係を一般化して考えれば、Z_i の分布を求めることができる。
したがって、Y_n の平均値は、これを利用すると、

$$E(Y_n) = \boxed{⑥}$$

となることがわかる。

〔③〜⑥の選択肢〕

(A)	$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2}$	(B)	e^{-nt}	(C)	$\frac{1}{n^2}$	(D)	$ne^{-t}(1-e^{-t})^n$
(E)	$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2}$	(F)	$\frac{1}{n}$	(G)	nte^{-nt}	(H)	$ne^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}$
(I)	$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$	(J)	$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$	(K)	$\frac{2}{n}$	(L)	$nte^{-t}(1-e^{-nt})$
(M)	ne^{-nt}	(N)	$\frac{2}{n^2}$	(O)	te^{-nt}	(P)	$e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}$

問題３． 不良率が $p\ (0<p<1)$ である母集団から大きさ n の標本を取り出したところ、k 個の不良品が入っていたという。このとき、不良率 p を信頼係数 $1-\varepsilon$ で区間推定する方法について、以下の各問の空欄に入る解答をそれぞれの選択肢の中から一つ選んで解答用紙の所定の欄にマークを記入せよ。

なお、不良率とは、良品および不良品よりなる無限母集団からの標本が不良品である確率のことをいう。（２０点）

（1） n が大きいときの不良率 $p\ (0<p<1)$ を区間推定する方法

不良率 p の推定量 $\hat{p}$ を $\hat{p}=\dfrac{k}{n}$ とする。$k \geq 5$ のとき、$\hat{p}$ は近似的に正規分布 $N(\boxed{①}\ ,\ \boxed{②})$ に従っている。

ゆえに、統計量

$$U=\frac{\boxed{③}}{\boxed{④}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従って分布する。

ここで、標準正規分布の上側 ε 点を $u(\varepsilon)$ とすると、

$$P(-u(\varepsilon/2)<U<u(\varepsilon/2))=1-\varepsilon$$

であるから、この P の括弧内の式について、p を用いて書き直すと

$$\boxed{⑤}-u(\varepsilon/2)\cdot\boxed{④}<p<\boxed{⑤}+u(\varepsilon/2)\cdot\boxed{④}$$

を得る。

次に、この不等式の両側に出てくる p をその推定値 $\hat{p}$ でおきかえることにより、信頼係数 $1-\varepsilon$ の p の信頼区間として、

$$\boxed{⑤}-u(\varepsilon/2)\cdot\boxed{⑥}<p<\boxed{⑤}+u(\varepsilon/2)\cdot\boxed{⑥}$$

を得る。

〔①～⑥の選択肢〕

$(A)\ p$	$(B)\ \hat{p}$	$(C)\ \hat{p}-p$	$(D)\ \hat{p}+p$
$(E)\ \dfrac{p(1-p)}{n}$	$(F)\ \dfrac{p(1+p)}{n}$	$(G)\ \dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$	$(H)\ \dfrac{\hat{p}(1+\hat{p})}{n}$
$(I)\ \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$	$(J)\ \sqrt{\dfrac{p(1+p)}{n}}$	$(K)\ \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	$(L)\ \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1+\hat{p})}{n}}$

（2） n が小さいときの不良率 p $(0 < p < 1)$ を区間推定する方法

i 番目の標本が不良品のときに 1 、良品のときに 0 となる確率変数を X_i とおくとすると、

不良率 p の最尤推定量 $\hat{p}$ は、 $\hat{p} = \boxed{⑦} = \frac{k}{n}$ である。

ところで、n 個の標本中の不良品の個数を表す確率変数 $X_1 + X_2 + \cdot\cdot\cdot + X_n$ は二項分布に従うことが知られているから、

$$P(\hat{p} = x) = P(\boxed{⑦} = x) = P\left(\boxed{⑦} \cdot n = nx\right) = \binom{n}{nx} p^{nx}(1-p)^{n(1-x)}$$

となる。したがって、信頼係数 $1-\varepsilon$ の p の信頼区間を求めるには、

$$P(\hat{p} \le h_1(p)) = P(k \le nh_1(p)) = \sum_{i=0}^{nh_1(p)} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \varepsilon/2 \quad \cdot\cdot\cdot (a)$$

$$P(\hat{p} \ge h_2(p)) = P(k \ge nh_2(p)) = \sum_{i=nh_2(p)}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \varepsilon/2 \quad \cdot\cdot\cdot (b)$$

となる $h_1(p),\ h_2(p)$ を求めなければならない。

自由度 (m,n) の F 分布に従う確率変数を F_n^m とおくと、二項分布と F 分布との関係から、

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P\left(F_{n_2'}^{n_1'} \ge \frac{n_2' p}{n_1'(1-p)}\right) \quad \cdot\cdot\cdot (c)$$

ここで、 $n_1' = 2(k+1)$ ， $n_2' = 2(n-k)$ である。

また、

$$\sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P\left(F_{n_2'}^{n_1'} < \frac{n_2' p}{n_1'(1-p)}\right)$$

であるので、 n_1' に $2(k+1)$ 、 n_2' に $2(n-k)$ を代入し、 $k+1$ を k とおき直すと、

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P\left(F_{n_1}^{n_2} < \frac{n_1 p}{n_2(1-p)}\right) = P\left(1/F_{n_1}^{n_2} \ge \frac{n_2(1-p)}{n_1 p}\right)$$

ここで、 $n_1 = \boxed{⑧}$ ， $n_2 = \boxed{⑨}$ である。

〔⑦～⑨の選択肢〕

(A)	k	(B)	$2k$	(C)	$2(k+1)$	(D)	$2nk$
(E)	$2(n-k)$	(F)	$2(n-k+1)$	(G)	$\sum_{i=1}^{k} X_i$	(H)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$F_{n_1}^{n_2}$ が自由度(n_2, n_1)の F 分布に従うとき、$1/F_{n_1}^{n_2}$ は、自由度(n_1, n_2)の F 分布に従うから、

$$P(1/F_{n_1}^{n_2} \geq \frac{n_2(1-p)}{n_1 p}) = P(F_{n_2}^{n_1} \geq \frac{n_2(1-p)}{n_1 p})$$

よって、

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P(F_{n_2}^{n_1} \geq \frac{n_2(1-p)}{n_1 p}) \cdot \cdot \cdot (d)$$

自由度(m,n)の F 分布の上側 ε 点を $F_n^m(\varepsilon)$ とすると

(a), (c) から、 $\dfrac{n_2' p}{n_1'(1-p)} = \boxed{⑩} \Leftrightarrow P(k \leq nh_1(p)) = \varepsilon/2$

(b), (d) から、 $\dfrac{n_2(1-p)}{n_1 p} = \boxed{⑪} \Leftrightarrow P(k \geq nh_2(p)) = \varepsilon/2$

となる。

以上から、$h_1(p) < \hat{p} < h_2(p)$ より、信頼係数 $1-\varepsilon$ の p の信頼区間として

$$\frac{\boxed{⑫}}{\boxed{⑬}} < p < \frac{\boxed{⑭}}{\boxed{⑮}}$$

を導くことができる。

〔⑩～⑮の選択肢〕

(A) n_1'	(B) n_2'	(C) n_1
(D) n_2	(E) $F_{n_2'}^{n_1'}(\varepsilon/2)$	(F) $F_{n_1'}^{n_2'}(\varepsilon/2)$
(G) $F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon/2)$	(H) $F_{n_1}^{n_2}(\varepsilon/2)$	(I) $n_1' F_{n_2'}^{n_1'}(\varepsilon/2)$
(J) $n_1 F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon/2) + n_1$	(K) $n_1 F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon/2) + n_2$	(L) $n_1' F_{n_2'}^{n_1'}(\varepsilon/2) + n_1'$
(M) $n_1' F_{n_2'}^{n_1'}(\varepsilon/2) + n_2'$	(N) $n_1' F_{n_1'}^{n_2'}(\varepsilon/2)$	(O) $n_1 F_{n_1}^{n_2}(\varepsilon/2) + n_1$
(P) $n_1 F_{n_1}^{n_2}(\varepsilon/2) + n_2$	(Q) $n_1' F_{n_1'}^{n_2'}(\varepsilon/2) + n_1'$	(R) $n_1' F_{n_1'}^{n_2'}(\varepsilon/2) + n_2'$

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点：　$\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ \ ε	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
36	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812
37	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833
38	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814
39	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252	104.2149
80	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163	128.2989
100	67.3276	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067	140.1695

Ⅲ. 分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側ε点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon =$ 0.050

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

IV. 自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

数学（解答例）

問題１

（１）
取り出した１個が X，Y，Z の各機械から生産されたものであるという事象をそれぞれ記号 X，Y，Z で表すこととし、この取り出したものが不良品であるという事象を E とすれば、題意より
$P(E \mid X) = 0.05$、$P(E \mid Y) = 0.04$、$P(E \mid Z) = 0.02$
である。
ここで、X，Y，Z がそれぞれ全体の x，y，$1-x-y$ の割合を生産するとすれば、Bayes の定理より、

$$P(X \mid E) = \frac{P(X)P(E \mid X)}{P(X)P(E \mid X) + P(Y)P(E \mid Y) + P(Z)P(E \mid Z)}$$
$$= \frac{0.05x}{0.05x + 0.04y + 0.02(1-x-y)}$$
$$= \frac{5}{16}$$

$$P(Y \mid E) = \frac{P(Y)P(E \mid Y)}{P(X)P(E \mid X) + P(Y)P(E \mid Y) + P(Z)P(E \mid Z)}$$
$$= \frac{0.04y}{0.05x + 0.04y + 0.02(1-x-y)}$$
$$= \frac{3}{8}$$

すなわち、連立方程式

$$\begin{cases} 13x - 2y = 2 \\ 9x - 26y = -6 \end{cases}$$

を得る。これを解くと、$(x, y) = (0.2, 0.3)$ となることから、Z は全体の 50% を生産する。

よって、解答は　(H)

（2）

$u=\dfrac{x}{y},\ v=y$ とおけば、この変換は xy 平面（x 軸をのぞく）を uv 平面に移す 1 対 1 の変換である。これを、x,y について解けば、

$x=uv$

$y=v$

となるから、$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=v$

また、確率変数 X,Y が互いに独立に標準正規分布 $N(0,1)$ に従うから、X,Y の結合確率密度関数は

$$h(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

である。ゆえに確率変数 $U=\dfrac{X}{Y}$、$V=Y$ の結合確率密度関数は、

$$h(u,v)=h(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{2\pi}|v|e^{-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)}$$

これにより、U の確率密度関数を求めれば、

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u,v)dv=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|v|e^{-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)}dv$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}ve^{-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)}dv=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{1+u^2}e^{-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\pi(1+u^2)}$$

を得る。（U は Cauchy 分布に従うことがわかった。）

よって、解答は① (A)、② (H)

（3）

確率変数Xの積率母関数は次のとおり。

$$
\begin{aligned}
M_X(\theta) &= \sum_{x=1}^{\infty} f(x)\cdot e^{\theta\cdot x} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot e^{\theta\cdot x} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{e^\theta}{2}\right)^x \\
&= \frac{e^\theta}{2-e^\theta} \quad (e^\theta < 2)
\end{aligned}
$$

確率変数X，Yが互いに独立であるとき、$X+Y$の積率母関数$M_{X+Y}(\theta)$は、X，Yそれぞれの積率母関数の積に等しくなる。

$M_{X+Y}(\theta) = M_X(\theta)\cdot M_Y(\theta)$

$M'_{X+Y}(\theta) = M'_X(\theta)\cdot M_Y(\theta) + M_X(\theta)\cdot M'_Y(\theta)$

$M''_{X+Y}(\theta) = M''_X(\theta)\cdot M_Y(\theta) + 2M'_X(\theta)\cdot M'_Y(\theta) + M_X(\theta)\cdot M''_Y(\theta)$

ここで、X，Yの積率母関数を用いると、

$M'_X(\theta) = \dfrac{2e^\theta}{(2-e^\theta)^2}$、$M''_X(\theta) = \dfrac{2e^{2\theta}+4e^\theta}{(2-e^\theta)^3}$

$M'_Y(\theta) = \dfrac{6e^\theta}{(3-e^\theta)^2}$、$M''_Y(\theta) = \dfrac{6e^{2\theta}+18e^\theta}{(3-e^\theta)^3}$

$M_X(0)=1$、$M'_X(0)=2$、$M''_X(0)=6$、$M_Y(0)=1$、$M'_Y(0)=\dfrac{3}{2}$、$M''_Y(0)=3$

したがって、$X+Y$の原点のまわりの２次の積率は次のようにして求められる。

$$
\begin{aligned}
E\left((X+Y)^2\right) &= M''_{X+Y}(0) \\
&= M''_X(0)\cdot M_Y(0) + 2M'_X(0)\cdot M'_Y(0) + M_X(0)\cdot M''_Y(0) \\
&= 6\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot\frac{3}{2} + 1\cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

よって、解答は ① (B)　② (J)　③ (N)

（4）

確率変数$X_i (i=1,2,\cdots)$が標準正規分布$N(0,1)$に従うことから、

$$E(X_i^2)=E((X_i-0)^2)=E((X_i-E(X_i))^2)=V(X_i)=1$$

$$\begin{aligned}E(X_i^4)&=\int_{-\infty}^{\infty}x^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\&=\left[x^3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}+3\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\&=3E(X_i^2)\\&=3\end{aligned}$$

$$V(X_i^2)=E(X_i^4)-E(X_i^2)^2=3-1=2$$

また、$X_1,X_2,\cdots$が互いに独立であることから、

$$E({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_n}^2)=E({X_1}^2)+E({X_2}^2)+\cdots+E({X_n}^2)=n$$

$$V({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_n}^2)=V({X_1}^2)+V({X_2}^2)+\cdots+V({X_n}^2)=2n$$

したがって、中心極限定理よりnが十分大きければ、$\dfrac{{X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_n}^2-n}{\sqrt{2n}}$は$N(0,1)$に従うため、付表の数値を使用すると、求める確率は次のとおりとなる。

$$\begin{aligned}P\left(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\le n+\sqrt{\frac{n}{2}}\right)&=P\left(\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2-n}{\sqrt{2n}}\le\frac{1}{2}\right)\\&=1-P\left(\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2-n}{\sqrt{2n}}>0.50\right)\\&=1-0.3085\\&=0.6915\end{aligned}$$

よって、<u>解答は　(G)</u>

（5）

線分 AB 上に A を原点として座標を入れ、それぞれの点の座標を $A(0), B(a), X(x), Y(y)$ とする。このとき、与えられた条件は次の不等式で表される。

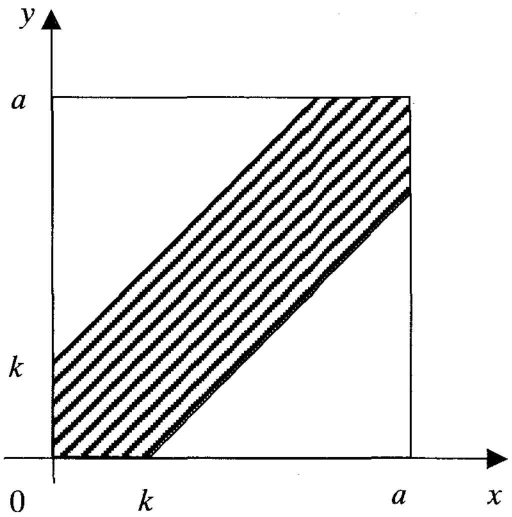
$$|x-y| \leq k$$

これは xy 座標で、傾きが１の２直線で挟まれた下図の斜線の領域である。ここで、線分 AB 上に X，Y の２点を選ぶことは、xy 平面上において１点 (x,y) を選ぶことと同じである。X，Y がどこに選ばれるのも同様に確からしいことから、下図の正方形で、斜線部分に点が現れる確率は、この部分と全正方形の面積の比となる。すなわち

$$\frac{a^2-(a-k)^2}{a^2}=\frac{1}{3}$$

これから $k=\dfrac{(3\pm\sqrt{6})a}{3}$ が得られるが、$k<a$ だから $k=\dfrac{(3-\sqrt{6})a}{3}$

よって、解答は (E)



（6）

第1種の誤り：H_0が真であるにも関わらず、H_0を棄却する誤り

第２種の誤り：H_0が偽であるにも関わらず、H_0を採択する誤り

H_0が真である場合、Xの個数が25個、Yの個数が75個である。

従って、第1種の誤りのおこる確率は、

$$P\left(\text{取り出されたXが3個以上}\middle|\text{Xの個数が25個，Yの個数が75個}\right)$$

$$=1-P\left(\text{取り出されたXが2個以下}\middle|\text{Xの個数が25個，Yの個数が75個}\right)$$

$$=1-\left\{\frac{\binom{75}{8}\binom{25}{0}}{\binom{100}{8}}+\frac{\binom{75}{7}\binom{25}{1}}{\binom{100}{8}}+\frac{\binom{75}{6}\binom{25}{2}}{\binom{100}{8}}\right\}$$

$$=1-\left\{\begin{array}{l}\binom{8}{0}\cdot\dfrac{75\cdot74\cdot73\cdot72\cdot71\cdot70\cdot69\cdot68}{100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96\cdot95\cdot94\cdot93}+\binom{8}{1}\cdot\dfrac{75\cdot74\cdot73\cdot72\cdot71\cdot70\cdot69\cdot25}{100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96\cdot95\cdot94\cdot93}\\+\binom{8}{2}\cdot\dfrac{75\cdot74\cdot73\cdot72\cdot71\cdot70\cdot25\cdot24}{100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96\cdot95\cdot94\cdot93}\end{array}\right\}$$

$$=1-0.68193401\cdots$$

$$=0.31806598\cdots$$

$$\fallingdotseq\boxed{0.31807}$$

よって、最も近いものを選ぶと、①の解答は (I)

同様にして、第２種の誤りのおこる確率は、

$$P\left(\text{取り出されたXが2個以下}\middle|\text{Xの個数が75個，Yの個数が25個}\right)$$

$$=\frac{\binom{25}{8}\binom{75}{0}}{\binom{100}{8}}+\frac{\binom{25}{7}\binom{75}{1}}{\binom{100}{8}}+\frac{\binom{25}{6}\binom{75}{2}}{\binom{100}{8}}$$

$$= \binom{8}{0} \cdot \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93} + \binom{8}{1} \cdot \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 75}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93}$$

$$+ \binom{8}{2} \cdot \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 75\cdot 74}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93}$$

$= 0.00284052\cdots$

$\fallingdotseq \boxed{0.00284}$　　　　よって、最も近いものを選ぶと、②の解答は (A)

（7）

母集団πを、箱の中の１１枚の札の番号 $\{1,2,3,\cdots,11\}$ からなる有限母集団とする。
このような有限母集団πから非復元抽出によって無作為に抽出した $n=3$ の標本 (X_1, X_2, X_3) について、$V(X_1+X_2+X_3)$ を求めるのが本問の目的である。

【解法１】

まず、母集団πの母平均および母分散を求めると、

母平均 $\mu = \dfrac{1+2+3+\cdots+11}{11} = 6$

母分散 σ^2

$$= \frac{1}{11}\left\{(1-6)^2 + (2-6)^2 + \cdots + (11-6)^2\right\} = \frac{1}{11}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + 11^2\right) - 6^2 = 10$$

となる。

次に、$Z = X_1 + X_2 + X_3$、$\overline{X} = \dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ とすると、

$E(\overline{X}) = \mu$、$V(\overline{X}) = \dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n}$ である。

（ここで、N ：母集団の総数、n ：標本数。$\dfrac{N-n}{N-1}$ を有限修正係数という。）

ここで、$Z = 3\overline{X}$ であることから、$V(Z) = V(3\overline{X}) = 9V(\overline{X}) = 9\cdot\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n}$ が導かれる。

ここに $N=11$、$n=3$、$\sigma^2=10$ を代入して計算すると、

$V(Z) = 9\cdot\dfrac{11-3}{11-1}\cdot\dfrac{10}{3} = 24$ となる。

よって、解答は (F)

【解法２】

$P(X_i = k) = \dfrac{1}{N} \qquad (1 \le k \le N)$ である。これより、

$$E(X_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N+1}{2}$$

$$E(X_i^{\,2}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{1}{N}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

がそれぞれ得られる。これを用いて、

$$V(X_i) = E(X_i^{\,2}) - \{E(X_i)\}^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left\{\frac{N+1}{2}\right\}^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

が導かれる。

また、$i \ne j$ として、

$$E(X_iX_j) = \sum_{\substack{i \ne j \\ 1 \le i, j \le N}} \frac{i \cdot j}{N(N-1)} = \frac{1}{N(N-1)}\left\{\sum_{1 \le i, j \le N} i \cdot j - \sum_{i=1}^{N} i^2\right\}$$

$$= \frac{1}{N(N-1)}\left\{\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 - \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right\} = \frac{(N+1)}{12(N-1)}\{3N(N+1) - 2(2N+1)\}$$

$$= \frac{(N+1)}{12(N-1)}(3N^2 - N - 2) = \frac{(N+1)}{12(N-1)}(N-1)(3N+2) = \frac{(N+1)(3N+2)}{12}$$

が得られる。これより、

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{(N+1)(3N+2)}{12} - \left\{\frac{(N+1)}{2}\right\}^2$$

$$= -\frac{N+1}{12} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

が導かれる。

$$V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2\{Cov(X_1, X_2) + Cov(X_2, X_3) + Cov(X_3, X_1)\}$$

であるが、ここに、①と②を代入して変型することにより、

$$= \frac{(N+1)(N-1)}{4} - \frac{N+1}{2} = \frac{(N+1)(N-3)}{4} \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

が導かれる。

この③に$N=11$を代入して計算すると、

$V(X_1+X_2+X_3)=\dfrac{12\cdot 8}{4}=24$となる。

よって、解答は (F)

（8）

一様分布$U(0,b)$の確率密度関数は、

$$f(x_i;b)=\frac{1}{b} \qquad (0\le x_i\le b,\ \ i=1,2,\cdots,n)$$

よって、尤度関数$L(b)$は、

$$L(b)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;b)=\frac{1}{b^n}$$

尤度方程式$\dfrac{\partial}{\partial b}\log L=0$は解を持たないので、定義に基づいて$L(b)$が最大となるような$b$を考える。$b$が小さいほど$L(b)$は大きくなるが、$b$は与えられた標本値$x_1,x_2,\cdots,x_n$の最大値以上である。よって$\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$が最尤推定値となり、最尤推定量$Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$となる。

$f(x)$の分布関数を$F(x)$とすると、

$$F(x)=\frac{x}{b} \qquad (0\le x\le b)$$

またYの分布関数を$G(y)$ $(0\le y\le b)$とすると、

$$G(y)=P(Y\le y)=P(X_1\le y,X_2\le y,\cdots,X_n\le y)=\{F(y)\}^n$$

よってYの確率密度関数$g(y)$ $(0\le y\le b)$は、

$$g(y)=G'(y)=n\cdot\{F(y)\}^{n-1}\cdot f(y)=n\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{b}=\frac{ny^{n-1}}{b^n}$$

$$\therefore E(\alpha Y)=\alpha E(Y)=\alpha\int_0^b y\cdot g(y)dy=\alpha\int_0^b\frac{ny^n}{b^n}dy$$

$$=\alpha\cdot\frac{n}{b^n}\cdot\left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^b=\alpha\cdot\frac{n}{n+1}\cdot b$$

$E(\alpha Y)=b$ のとき、αY が b の不偏推定量となる。

$$E(\alpha Y)=\alpha\cdot\frac{n}{n+1}\cdot b=b \text{ を解くと、} \alpha=\frac{n+1}{n}$$

よって $\boxed{\alpha=\frac{n+1}{n}}$ のとき、αY は b の不偏推定量となる。　　よって、解答は (F)

（9）

最小二乗法による回帰係数は、誤差の二乗和である下式 Q を最小にするものとして推定される。

$$Q=\sum_{i=1}^{5}\{y_i-(\alpha+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i})\}^2$$

これは、$\dfrac{\partial Q}{\partial\alpha}=\dfrac{\partial Q}{\partial\beta_1}=\dfrac{\partial Q}{\partial\beta_2}=0$ なる場合であるから、

次の連立方程式の解が求める推定値 $\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}_1$、$\hat{\beta}_2$ となる。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial\alpha}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\{y_i-(\alpha+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i})\}=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial\beta_1}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_{1i}\{y_i-(\alpha+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i})\}=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial\beta_2}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_{2i}\{y_i-(\alpha+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i})\}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{5}y_i=5\hat{\alpha}+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{5}x_{1i}+\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{5}x_{2i}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_{1i}y_i=\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{5}x_{1i}+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{5}x_{1i}{}^2+\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{5}x_{1i}x_{2i}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_{2i}y_i=\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{5}x_{2i}+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{5}x_{1i}x_{2i}+\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{5}x_{2i}{}^2\end{cases}$$

与えられた数値を代入すると、

$$\begin{cases}30=5\hat{\alpha}+5\hat{\beta}_1+5\hat{\beta}_2\\ 34=5\hat{\alpha}+7\hat{\beta}_1+5\hat{\beta}_2\\ 36=5\hat{\alpha}+5\hat{\beta}_1+7\hat{\beta}_2\end{cases}$$

これらを解くと、$\hat{\alpha}=1$、$\hat{\beta}_1=2$、$\hat{\beta}_2=3$。

よって 解答は ① (A) ② (B) ③ (C)

（１０）

イ．p 次の自己回帰モデル $AR(p)$ の特性方程式 $\phi(x)=1-(\phi_1 x+\phi_2 x^2+\cdots+\phi_p x^p)=0$ の解の絶対値がすべて１$\boxed{\text{より大きい}}$とき、$AR(p)$ は定常性を持つ。

ロ．q 次の移動平均モデル $MA(q)$ の特性方程式 $\theta(x)=1-(\theta_1 x+\theta_2 x^2+\cdots+\theta_q x^q)=0$ の解の絶対値がすべて１$\boxed{\text{より大きい}}$とき、$MA(q)$ は反転可能である。

ハ．分散 γ_0 および自己共分散 γ_1 は、

$$\gamma_0=E((Y_t-\theta_0)^2)=E((\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1})^2)=E(\varepsilon_t^2+\theta_1^2\varepsilon_{t-1}^2)=\sigma^2(1+\theta_1^2)$$

$$\gamma_1=E((Y_t-\theta_0)(Y_{t-1}-\theta_0))=E((\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1}-\theta_1\varepsilon_{t-2}))=E(-\theta_1\varepsilon_{t-1}^2)=\sigma^2(-\theta_1)$$

と表せることから、θ_1 は次の連立方程式を解けば求められる。

$$\begin{cases}\gamma_0=\dfrac{26}{5}=\sigma^2(1+\theta_1^2)\\ \gamma_1=1=\sigma^2(-\theta_1)\end{cases}$$

この連立方程式は θ_1 の二次方程式であるため、これを解くと

$$(\theta_1,\sigma^2)=(-\frac{1}{5},5),(-5,\frac{1}{5})$$

として２つの解が得られる。

ここで、識別可能性の仮定より、$MA(1)$ の特性方程式

$$\theta(x)=1-\theta_1 x=0$$

の解の絶対値が１以上という条件を用いれば、$|1/\theta_1|\geq 1$、つまり、$-1\leq\theta_1\leq 1$ であり、

$\theta_1=\boxed{-\dfrac{1}{5}}$ となる。

よって、解答は ① (A) ② (A) ③ (J)

（１１）

m 回目の試行直後の赤球の個数が $i-1$、$m+1$ 回目の試行の直後の赤球の個数が $j-1$ となる確率を q_{ij} とする時、i 行 j 列を q_{ij} とする行列Qは確率推移行列となる。

（m によらない。）（$m \geqq 1$、$i, j = 1,2,3,4$）

題意より、$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ここで、n 回目の試行直後の壺Rの赤球の個数を表す確率変数を X_n とすると、X_n はマルコフ連鎖となり、極限分布

$$\lim_{n\to\infty}(P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3))$$

が存在する。これを $\vec{\pi}$ とすると、$\vec{\pi}Q = \vec{\pi}$　となる。この式を解くと、

$$\vec{\pi} = \lim_{n\to\infty}(P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3))$$

$$= \left(\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{20}\right)$$

したがって、$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \boxed{\frac{1}{20}}$　、　$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \boxed{\frac{9}{20}}$

よって、解答は　①(A)　、②　(H)

（１２）
本問の出題意図は、棄却法によってある確率密度関数に従う確率変数 X を生成する際の繰り返し回数を最小にする定数 c を求めることであった。
与えた確率密度関数 $f(x)$ が定義域の一部において負値となり、確率密度関数の要件を満たしておらず、問題の前提として適切でなかった点について深くお詫びするとともに、以下では教科書「モデリング」の該当部分（P4-6～P4-9）を引用して、出題において意図していた事項を説明する。

【棄却法による解法の手順】
確率密度関数が g である分布の確率変数を生成する手段を持っているとする。一方、確率密度関数が f である分布の確率変数を生成したいとする。この際、$\dfrac{f}{g}$ が有界である（すなわち、適当な定数 c に対して $\dfrac{f(y)}{g(y)} \le c \ for\ all\ y$）ならば、次の手順により g を用いて f に従う確率変数 X を求めることができる。

手順１：確率密度関数が g である確率変数 Y を生成する。

手順２：$(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U を生成する。

手順３：$U \le \dfrac{f(y)}{cg(y)}$ ならば、$X = Y$ とする。そうでないならば手順１に戻る。

手順３で X の値を確率 $P\{U \le \dfrac{f(y)}{cg(y)}\} = \dfrac{1}{c}$ で得ることになるので、上記の繰り返しの回数は定数 c の取り方に依存し、$\dfrac{1}{c}$ を大きくすれば、すなわち c を小さくすれば、繰り返しの回数は少なくなる。
ゆえに、最小の c を求めればよい。

【教科書 P4-7 の例題の確率密度関数を前提とした解答】
棄却法を使用し次の確率密度関数 f を持つ確率変数 X を生成する。

$$f(x) = 20x(1-x)^3 \quad , \quad 0 < x < 1$$

この確率変数は、区間 $(0,1)$ 上で定義されているので、
$g(x) = 1 \ , \ 0 < x < 1$ を用いた棄却法を考える。

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 20x(1-x)^3$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = 20\left[(1-x)^3 - 3x(1-x)^2\right]$$

よって、$x=\frac{1}{4}$のとき$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=0$となり、$\frac{f(x)}{g(x)}$は最大値をとる。

このとき$\frac{f(\frac{1}{4})}{g(\frac{1}{4})}=20\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{135}{64}$となるが、この$\frac{135}{64}$が$\frac{f(x)}{g(x)}\leq\frac{135}{64}$ *for all* $x\in(0,1)$を満たす最小のcである。

以上より、求めるcは$\frac{135}{64}$となる。

問題２

（１）

① 稼働期間を確率変数Tとし、保証期間をgヵ月とすれば、この機械が保証期間を超えて稼働するためには、稼働期間が保証期間を超えることが必要である。すなわち、

$$
\begin{aligned}
P(T > g) &= \int_g^\infty f(t)dt \\
&= \int_g^\infty ae^{-at}dt \\
&= \left[-e^{-at}\right]_g^\infty \\
&= e^{-ag} \\
&= 0.8
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
g &= -\frac{\log 0.8}{a} \\
&= -\frac{-0.22}{0.02} \\
&= 11
\end{aligned}
$$

よって、解答は　(C)

② 求める確率は次の条件付確率となる。

$$
\begin{aligned}
P(T > 2g \mid T > g) &= \frac{P(T > 2g, T > g)}{P(T > g)} \\
&= \frac{P(T > 2g)}{P(T > g)} \\
&= \frac{e^{-2ag}}{e^{-ag}} \\
&= e^{-ag} \\
&= e^{-0.02\times 11} \\
&= e^{-0.22} \\
&= 0.8
\end{aligned}
$$

よって、解答は　(J)

(2)

③ 各機械の稼働期間を確率変数$T_1,T_2,\cdots,T_n$とする。X_nは最初にある機械が完全に稼働を停止するまでの期間を表す確率変数であることから、

$$X_n = \min(T_1,T_2,\cdots,T_n)$$

と表すことができる。

ここで、$\min(T_1,T_2,\cdots,T_n) > t \Leftrightarrow T_1 > t, T_2 > t,\cdots,T_n > t$に注意すると、$T_k\ (k = 1,2,\cdots,n)$は互いに独立であることから、

$$\begin{aligned}
P(X_n \le t) &= 1 - P(X_n > t) \\
&= 1 - P\{\min(T_1,T_2,\cdots,T_n) > t\} \\
&= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t,\cdots,T_n > t) \\
&= 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t)\cdots P(T_n > t) \\
&= 1 - \{P(T_k > t)\}^n \\
&= 1 - (e^{-t})^n \\
&= 1 - e^{-nt}
\end{aligned}$$

したがって、X_nの確率密度関数$g(t)$は、

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{d}{dt}(1 - e^{-nt}) \\
&= ne^{-nt} \quad (t > 0)
\end{aligned}$$

よって、解答は　(M)

④ Y_nはすべての機械が完全に稼働を停止するまでの期間を表す確率変数であることから、

$$Y_n = \max(T_1,T_2,\cdots,T_n)$$

と表すことができる。

ここで、$\max(T_1,T_2,\cdots,T_n) \le t \Leftrightarrow T_1 \le t, T_2 \le t,\cdots,T_n \le t$に注意すると、$T_k\ (k = 1,2,\cdots,n)$は互いに独立であることから、

$$\begin{aligned}
P(Y_n \le t) &= P\{\max(T_1,T_2,\cdots,T_n) \le t\} \\
&= P(T_1 \le t, T_2 \le t,\cdots,T_n \le t) \\
&= P(T_1 \le t)P(T_2 \le t)\cdots P(T_n \le t) \\
&= \left(\int_0^t e^{-s} ds\right)^n \\
&= (1 - e^{-t})^n
\end{aligned}$$

したがって、Y_nの確率密度関数$h(t)$は、

$$h(t)=\frac{d}{dt}\left\{\left(1-e^{-t}\right)^n\right\}$$
$$=ne^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1}\quad (t>0)$$

よって、解答は　(H)

⑤　X_nの平均値は、X_nの確率密度関数$g(t)$を用いて、次のとおり計算できる。

$$E(X_n)=\int_0^\infty tg(t)dt$$
$$=\int_0^\infty nte^{-nt}dt$$
$$=\left[-te^{-nt}\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-nt}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{1}{n}$$

よって、解答は　(F)

⑥　n機のうち、最初にある機械が完全に稼働を停止するまでの期間をZ_1、そこから2番目の機械が完全に稼働を停止するまでの期間をZ_2、一般に$i-1$番目の機械が完全に稼働を停止してからi番目の機械が完全に稼働を停止するまでの期間をZ_iとすると、Y_nはすべての機械が完全に稼働を停止するまでの期間であることから、

$$Y_n=Z_1+Z_2+\cdots+Z_n=\sum_{i=1}^n Z_i$$

と表すことができる。
ここで、①および②から、この機械が稼働開始から一定期間gを超えて稼働する確率$P(T>g)$と、稼働開始から一定期間gを超えて稼働したことを条件として、稼働開始から期間$2g$を超えて稼働する確率$P(T>2g\,|\,T>g)$は同一であることが得られている。
この関係を、この機械が稼働開始から一定期間g_1を超えて稼働する確率$P(T_k>g_1)$と、稼働開始から一定期間g_2を超えて稼働したことを条件として、稼働開始から期間g_1+g_2を超えて稼働する確率$P(T_k>g_1+g_2\,|\,T_k>g_2)$との関係として一般化して考えると、これらの確率も、次のとおり同一であることが示される。

$$
\begin{aligned}
P(T_k > g_1) &= \int_{g_1}^{\infty} f(t)dt \\
&= \int_{g_1}^{\infty} ae^{-at}dt \\
&= \left[-e^{-at}\right]_{g_1}^{\infty} \\
&= e^{-ag_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(T_k > g_1 + g_2 \mid T_k > g_2) &= \frac{P(T_k > g_1 + g_2, T_k > g_2)}{P(T_k > g_2)} \\
&= \frac{P(T_k > g_1 + g_2)}{P(T_k > g_2)} \\
&= \frac{e^{-a(g_1+g_2)}}{e^{-ag_2}} \\
&= e^{-ag_1}
\end{aligned}
$$

つまり、この機械が将来どれだけ稼働するかは、過去にどれだけ稼働してきたかということには無関係であり、しかもそれは、稼働を開始してから将来どれだけ稼働するかということと同じことを意味していることがわかる。

このことから、Z_i は $n-i+1$ 機の機械をすべて新品の状態から同時に稼働させた場合に、最初にある機械が完全に稼働を停止するまでの期間と同視することができ、すなわち、各 Z_i は

$$
X_{n-i+1} = \min(T_1, T_2, \cdots, T_{n-i+1})
$$

と同じ分布に従うことがわかる。

したがって、Y_n の平均値は、これを利用すると、次のとおり計算できる。

$$
\begin{aligned}
E(Y_n) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_{n-i+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_{n-i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}
\end{aligned}
$$

よって、<u>解答は　(I)</u>

問題3

（1） n が大きいときの不良率 p $(0 < p < 1)$ を区間推定する方法

不良率 p の推定量 $\hat{p}$ を $\hat{p}=\dfrac{k}{n}$ とする。$k \geq 5$ のとき、$\hat{p}$ は近似的に正規分布 $N(p,\dfrac{p(1-p)}{n})$ に従っている。

ゆえに、統計量

$$U=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従って分布する。

ここで、標準正規分布の上側 ε 点を $u(\varepsilon)$ とすると、

$$P(-u(\varepsilon/2)<U<u(\varepsilon/2))=1-\varepsilon$$

であるから、この P の括弧内の式について、p を用いて書き直すと

$$\hat{p}-u(\varepsilon/2)\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}<p<\hat{p}+u(\varepsilon/2)\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

を得る。

次に、この不等式の両側に出てくる p をその推定値 $\hat{p}$ でおきかえることにより、信頼係数 $1-\varepsilon$ の p の信頼区間として、

$$\hat{p}-u(\varepsilon/2)\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}<p<\hat{p}+u(\varepsilon/2)\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

を得る。

よって、解答は、

①(A)、②(E)、③(C)、④(I)、⑤(B)、⑥(K)

（2）n が小さいときの不良率 p $(0 < p < 1)$ を区間推定する方法

i 番目の標本が不良品のときに１、良品のときに０となる確率変数を X_i とおくとすると、

不良率 p の最尤推定量 $\hat{p}$ は、$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{k}{n}$ である。

ところで、n 個の標本中の不良品の個数を表す確率変数 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は二項分布に従うことが知られているから、

$$P(\hat{p} = x) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = x\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = nx\right) = \binom{n}{nx} p^{nx}(1-p)^{n(1-x)}$$

となる。したがって、信頼係数 $1-\varepsilon$ の p の信頼区間を求めるには、

$$P(\hat{p} \le h_1(p)) = P(k \le nh_1(p)) = \sum_{i=0}^{nh_1(p)} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \varepsilon/2 \quad \cdots (a)$$

$$P(\hat{p} \ge h_2(p)) = P(k \ge nh_2(p)) = \sum_{i=nh_2(p)}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \varepsilon/2 \quad \cdots (b)$$

となる $h_1(p)$, $h_2(p)$ を求めなければならない。

自由度 (m,n) の F 分布に従う確率変数を F_n^m とおくと、二項分布と F 分布との関係から、

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P\left(F_{n_2'}^{n_1'} \ge \frac{n_2' p}{n_1'(1-p)}\right) \quad \cdots (c)$$

ここで、$n_1' = 2(k+1)$, $n_2' = 2(n-k)$ である。

また、

$$\sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P\left(F_{n_2'}^{n_1'} < \frac{n_2' p}{n_1'(1-p)}\right)$$

であるので、n_1' に $2(k+1)$、n_2' に $2(n-k)$ を代入すると、

$$\sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P\left(F_{2(n-k)}^{2(k+1)} < \frac{2(n-k)p}{2(k+1)(1-p)}\right)$$

ここで、$k+1$ を k とおき直すと、

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P\left(F_{2(n-k+1)}^{2k} < \frac{2(n-k+1)p}{2k(1-p)}\right)$$

$$= P\left(F_{n_1}^{n_2} < \frac{n_1 p}{n_2(1-p)}\right) = P\left(1/F_{n_1}^{n_2} \ge \frac{n_2(1-p)}{n_1 p}\right)$$

ここで、$n_1 = 2(n-k+1)$, $n_2 = 2k$ である。

よって、解答は、 ⑦(H)、⑧(F)、⑨(B)

$F_{n_1}^{n_2}$ が自由度 (n_2, n_1) の F 分布に従うとき、$1/F_{n_1}^{n_2}$ は、自由度 (n_1, n_2) の F 分布に従うから、

$$P(1/F_{n_1}^{n_2} \geq \frac{n_2(1-p)}{n_1 p}) = P(F_{n_2}^{n_1} \geq \frac{n_2(1-p)}{n_1 p})$$

よって、

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P(F_{n_2}^{n_1} \geq \frac{n_2(1-p)}{n_1 p}) \quad \cdots (d)$$

自由度 (m, n) の F 分布の上側 ε 点を $F_n^m(\varepsilon)$ とすると

(a)，(c) から、 $$\frac{n_2' p}{n_1'(1-p)} = F_{n_2'}^{n_1'}(\varepsilon/2) \Leftrightarrow P(k \leq nh_1(p)) = \varepsilon/2$$

(b)，(d) から、 $$\frac{n_2(1-p)}{n_1 p} = F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon/2) \Leftrightarrow P(k \geq nh_2(p)) = \varepsilon/2$$

となる。

以上から、$h_1(p) < \hat{p} < h_2(p)$ より、信頼係数 $1-\varepsilon$ の p の信頼区間として

$$\frac{n_2}{n_1 F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon/2) + n_2} < p < \frac{n_1' F_{n_2'}^{n_1'}(\varepsilon/2)}{n_1' F_{n_2'}^{n_1'}(\varepsilon/2) + n_2'}$$

を導くことができる。

よって、解答は、 ⑩(E)、⑪(G)、⑫(D)、⑬(K)、⑭(I)、⑮(M)