年金数理(問題)

この年金数理の問題における用語は次の通りとする。

・「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年年齢 x_r 歳時より単位年金額の終身年金を年 1 回期初に支払う年金制度をいう。

・「被保険者」とは、特に説明がない場合は在職中の者をいう。

・「加入年齢方式」とは、「特定年齢方式」のことをいう。

・「責任準備金」とは、標準保険料および特別保険料を設定している場合においては、給付現価から標準保険料収入現価のみを控除した額をいう。

問題1. 次の(1)～(7)については、それぞれの選択肢から設問の答えとして正しいものを選んでその記号を、また(8)～(10)については、必要に応じて指示に従った端数処理を行った上で設問の解答のみを、それぞれ解答用紙の所定の欄に記入せよ。 (45 点)

(1) Trowbridge モデルの年金制度において、定常状態での各種財政方式における積立金 F を表す式として正しいものはいくつあるか、記号で選べ。

なお、F の左肩添字は財政方式を表し、T →退職時年金現価積立方式、U →単位積立方式、L →平準積立方式、In →加入時積立方式、Co →完全積立方式 を表すものとする。

また、S は給付現価(年金受給権者の給付現価 S^p 、在職中の被保険者の給付現価 S^a 、将来加入が見込まれる被保険者の給付現価 S^f を合算したもの)を表し、${}^LP$ は財政方式を平準積立方式とした場合の被保険者一人当たりの保険料とする。

・ ${}^TF = S - l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot \ddot{a}_{\infty}$

・ ${}^UF = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \left(\frac{x - x_e}{x_r - x_e}\right)\left(\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right) + \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$

・ ${}^LF = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}\left({}^LP \cdot \sum_{y=x_e+1}^{x-1} l_y^{(T)} \cdot (1+i)^{x-y}\right)$

・ ${}^{In}F = S - l_{x_e}^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$

・ ${}^{Co}F = S$

(A)0個 (B)1個 (C)2個 (D)3個 (E)4個 (F)5個

(2) 支給開始時点の年金原資を1としたつぎのような2つの年金の支給方法を考える。

① 支給期間 n 年、給付利率を i とする連続払年金

② 支給期間 n' 年、給付利率を i' とする連続払年金

この2つの年金について支給期間中の年金の総額が等しいとき、i' を表す式として正しいものの記号を選べ。

(A) $\dfrac{in'}{n}$　(B) $\dfrac{in}{n'}$　(C) $(1+i)^{n'-n}-1$　(D) $(1+i)^{n-n'}-1$

(E) $(1+i)^{\frac{n'}{n}}-1$　(F) $(1+i)^{\frac{n}{n'}}-1$　(G) $\dfrac{(1+i)^{n'}-(1+i)^{n}}{n'-n}$　(H) $\dfrac{(1+i)^{-n}-(1+i)^{-n'}}{n'-n}$

(3) 過去勤務債務がない定常状態に達した年金制度がある。被保険者に係る給付について、1 年後に一律 $(1+\alpha)$ 倍、2 年後に更に $(1+\alpha)$ 倍の給付増額を行い、当初の $(1+\alpha)^2$ 倍の給付水準に引上げる。給付増額により過去勤務債務が 2 回発生する。償却については、1 年後、2 年後の給付改善時に、その時点における未償却過去勤務債務残高の 20%を償却することとする。3 年後の時点で、未償却過去勤務債務残高を計算したところ、当初の定常状態における責任準備金の 10%になった。予定利率を 5.0%とする場合、給付改善割合 α ($0\% < \alpha < 100\%$) について一番近いものの記号を選べ。
なお、過去勤務債務は給付増額に伴うもの以外発生せず、また、年金受給者はいないとする。

(A) 6.20%　(B) 6.25%　(C) 6.30%　(D) 6.35%
(E) 6.40%　(F) 6.45%　(G) 6.50%　(H) 6.55%

(4) ある年金制度では毎年期初に x_1 歳と x_2 歳(ただし、$x_1 < x_2$ とする。)で3:2の割合で新規加入があるとし、被保険者集団は既に定常人口になっているとする。また、制度内容は Trowbridge モデルの年金制度とし、期初の被保険者の総数を L、脱退残存表による x 歳の被保険者数を l_x、x 歳の平均脱退率を $\dfrac{1}{\varepsilon_x} = \dfrac{l_x}{\sum_{y=x}^{x_r-1} l_y}$ とする。(x_r は定年年齢とする。)

この年金制度を加入年齢方式で運営するとし、標準保険料率を決定するために加入年齢 x_1 歳を用いた場合、毎年発生する後発の過去勤務債務を表す式として正しいものの記号を選べ。

(A) $\dfrac{3L}{3\varepsilon_{x_1}+2\varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_r}}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}}$　(B) $\dfrac{3L}{2\varepsilon_{x_1}+3\varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_r}}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}}$

(C) $\dfrac{2L}{3\varepsilon_{x_1}+2\varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_r}}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}}$　(D) $\dfrac{2L}{2\varepsilon_{x_1}+3\varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_r}}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}}$

(E) $\dfrac{3L}{3\varepsilon_{x_1}+2\varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_r}}{D_{x_1}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_2}-N_{x_r}}$　(F) $\dfrac{3L}{2\varepsilon_{x_1}+3\varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_r}}{D_{x_1}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_2}-N_{x_r}}$

(G) $\dfrac{2L}{3\varepsilon_{x_1}+2\varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_r}}{D_{x_1}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_2}-N_{x_r}}$　(H) $\dfrac{2L}{2\varepsilon_{x_1}+3\varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_r}}{D_{x_1}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_2}-N_{x_r}}$

(5) ある年金制度は、年度初に保険料Cが払い込まれ、年度初に給付Bが支払われ、年度末の積立金がFで定常状態にある。

この制度における積立金Fの水準を下げるため、1 年度以降の保険料をαC（ただし、$0<\alpha<1$）とした場合、年度末の積立金がβF（ただし、$\alpha<\beta<1$）を下回る年度をt年度とすると、tとして正しいものの記号を選べ。ただし、予定利率をi、$\log(1+i)=\delta$とし、記号$[G]$はGを超えない最大の整数を表すものとする。

(A) $\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{\beta B+(\beta-\alpha)C}{\alpha C}\right]+1$　(B) $\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{\beta B+(\beta-\alpha)C}{(1-\alpha)C}\right]+1$

(C) $\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{\beta B+(1-\alpha)C}{\alpha C}\right]+1$　(D) $\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{\beta B+(1-\alpha)C}{(1-\alpha)C}\right]+1$

(E) $\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{(1-\beta)B+(\beta-\alpha)C}{\alpha C}\right]+1$　(F) $\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{(1-\beta)B+(\beta-\alpha)C}{(1-\alpha)C}\right]+1$

(G) $\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{(1-\beta)B+(1-\alpha)C}{\alpha C}\right]+1$　(H) $\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{(1-\beta)B+(1-\alpha)C}{(1-\alpha)C}\right]+1$

---

(6) ある年金制度の初期過去勤務債務は 10,000 であり、下記の①、②の 2 つの償却方法を考えた。第 8 年度末において、①の償却方法による未償却過去勤務債務残高が②のそれと等しくなるとする。このときのαについて一番近いものの記号を選べ。

① 10 年の元利均等償却

② 前年度末の未償却過去勤務債務残高に対する一定割合α（ $0\%<\alpha<100\%$ ）を償却

ただし、保険料の拠出は年 1 回期初払とする。

なお、予定利率は、5.0%とし、$a_{\overline{10|}}$（期末払 10 年確定年金現価率）は、7.72 を使用するものとする。

(A) 19.7%　(B) 19.8%　(C) 19.9%　(D) 20.0%
(E) 20.1%　(F) 20.2%　(G) 20.3%　(H) 20.4%

(7) ある制度ではx歳の誕生日以降、毎年の誕生日に年金を支給し、年金額は次の算式により決めることとする。(以下、x歳の誕生日の時点をx歳時、y歳の誕生日の時点をy歳時、などと表現する。)

y歳時に支給する年金額＝y歳時の積立金×$\dfrac{1}{1+e_y}$　$(x \leqq y \leqq \omega-1)$

ただし、

・e_yは生命表(最終年齢ω歳)から算出したy歳時の略算平均余命として、

$$e_y=\frac{\sum_{z=y+1}^{\omega} l_z}{l_y} \quad (x \leqq y \leqq \omega-1)$$

・積立金は、x歳時の積立金＝1、以降の運用利回りをjとして、

$y+1$歳時の積立金＝(y歳時の積立金－y歳時に支給する年金額)×$(1+j)$　$(x \leqq y \leqq \omega-2)$

さて、ある人が最終年齢まで生存しx歳時から$\omega-1$歳時まで年金を受取るとする。この年金について、予定利率をi $(i>j)$とした場合のx歳時における年金現価を表す式として正しいものの記号を選べ。なお、$\ddot{a}'_x$は、予定利率$\dfrac{i-j}{1+j}$のx歳時の終身年金現価率(即時支給開始、期初払)とする。

<ヒント>　$e_y=\dfrac{l_{y+1}}{l_y}\cdot\left(1+e_{y+1}\right)$

(A) $\dfrac{\ddot{a}'_x}{e_x}$　(B) $\dfrac{1}{1+j}\cdot\dfrac{\ddot{a}'_x}{e_x}$　(C) $\dfrac{\ddot{a}'_x}{1+e_x}$　(D) $\dfrac{1}{1+j}\cdot\dfrac{\ddot{a}'_x}{1+e_x}$

(E) $\dfrac{(1+e_x)\cdot\ddot{a}'_x}{e_x}$　(F) $\dfrac{1}{1+j}\cdot\dfrac{(1+e_x)\cdot\ddot{a}'_x}{e_x}$　(G) $\dfrac{(1+e_x)\cdot\ddot{a}'_x}{2+e_x}$　(H) $\dfrac{1}{1+j}\cdot\dfrac{(1+e_x)\cdot\ddot{a}'_x}{2+e_x}$

(8) 定常人口にあるA国では平均寿命が 70 歳である。

$l_x=\dfrac{1}{2}(\omega-x)$　$(0 \leq x \leq \omega)$　であるとき、A国の平均年齢を求めよ。

(小数点以下第2位を四捨五入し小数点以下第1位まで求めよ。)

(9) 年金額が「最終給与×加入期間×α」で定められている年金制度がある。ある年度の期末に財政再計算を行ったところ、下記の諸数値が算定され、再計算日に過去勤務債務が残存していたため、再計算日の翌期初から 10 年で元利均等償却するとして特別保険料率を算定したところ標準保険料率の半分の保険料率となった。また、再計算日の翌期初から年金額を「最終給与×（変更前の加入期間×α＋変更後の加入期間×β）」に変更することとしたところ、過去勤務債務、剰余金とも生じなかった。なお、再計算以前から財政方式は、加入年齢方式とし、予定利率は3.5%、保険料の拠出および給付は年 1 回期初に行なうとする。このとき、βはαの何倍であったか求めよ。
（小数点以下第 3 位を四捨五入し小数点以下第 2 位まで求めよ。）

○再計算時の諸数値
- 将来加入が見込まれる被保険者の給付現価：3,000
- 将来加入が見込まれる被保険者の給与現価：20,000
- 在職中の被保険者の給付現価：3,600
  （うち、過去の加入期間に対応する給付現価：1,200）
- 在職中の被保険者の給与現価：12,500
- 年金受給権者の給付現価：1,500
- 在職中の被保険者の給与合計：600
- 期初払 10 年確定年金現価率 $\ddot{a}_{\overline{10|}}$ ：8.61

(10) 定常人口にある年金制度において、財政方式に（閉鎖型）総合保険料方式を使用している。この場合、（閉鎖型）総合保険料方式による積立金が、財政方式に加入年齢方式を適用したと仮定した場合の責任準備金の 90%を上回るのは、期初から何年後の保険料拠出の直前か整数で答えよ。
ただし、期初（保険料拠出および給付前）の諸数値は以下のとおりであり、保険料の拠出および給付は年 1 回期初に発生し、（閉鎖型）総合保険料方式による保険料率は毎年期初に見直すものとする。なお、財政方式に加入年齢方式を適用したと仮定した場合において、毎年の新規加入に伴う過去勤務債務は発生しないとする。

○期初の諸数値
- 在職中の被保険者の給付現価：30,000
- 年金受給権者の給付現価：1,000
- 在職中の被保険者の給与現価：50,000
- 加入年齢方式の標準保険料率：20%
- 毎年の給付額：3,000
- 予定利率および積立金の運用利回り：5.0%
- 積立金：2,000

問題2．　次の前提で年金制度を発足する場合、空欄に当てはまる数値を解答用紙の所定欄に記入せよ。（15 点）

○制度内容

加入時期	年 1 回期初加入
給付内容	「給与の一定割合」の年金年額を、定年(60 歳)到達者に対して年 1 回期初払で生死に関わらず n 年間支給する
昇給時期	年 1 回期初昇給
脱退時期	年 1 回期末脱退(死亡による脱退は発生しない) 定年退職は定年到達時の期初に脱退
保険料の拠出時期	年 1 回期初拠出(昇給後給与合計×保険料率)
予定利率	3.0%

○被保険者構成(計算基準日時点／上段は人数合計、下段は給与合計)

年齢＼加入期間	0 年	1 年	2 年	3 年	4 年
55 歳	100 人 2,000,000 円				
56 歳		80 人 3,200,000 円			
57 歳		20 人 1,200,000 円	60 人 3,810,000 円		
58 歳			20 人 1,600,000 円	50 人 4,000,000 円	
59 歳					30 人 3,000,000 円

○現価率等

年齢	生存者数	脱退率	給与指数	加入期間別給付現価率 0 年	1 年	2 年	3 年	4 年	給与現価率
55 歳	1,000,000	0.100	1.000	25.878					10.238
56 歳	900,000	0.111	2.000	11.846	14.808				5.286
57 歳	800,000	0.125	3.000		9.151	11.439			3.311
58 歳	700,000	0.143	4.000			8.079	10.099		2.040
59 歳	600,000	0.000	5.000				7.767	9.709	1.000

※給付現価率および給与現価率は給与 1 に対する率である。

(1)財政方式として加入年齢方式(加入年齢 55 歳)を採用した場合

- 標準保険料率は ① である。(小数点以下第 4 位を四捨五入し小数点以下第 3 位まで求めよ。)
- 制度全体の被保険者の責任準備金は ② 千円である。

(標準保険料率は①を使用し、解答は百円単位四捨五入で千円単位とせよ。)

- 56 歳で 20 人(給与合計 3,000,000 円)加入が発生したとし、①の標準保険料率を適用した場合、該当者の加入時点での責任準備金は ③ である。(解答欄に記載の正または負のいずれかに○をつけよ。)
- ①の標準保険料率を適用し、現在 55 歳である 100 人について基礎率どおりに推移した場合、該当者の 1 年後の責任準備金は ④ 千円である。(解答は百円単位四捨五入で千円単位とせよ。)

(2)財政方式として(閉鎖型)総合保険料方式を採用した場合

- 保険料率は ⑤ である。(小数点以下第 4 位を四捨五入し小数点以下第 3 位まで求めよ。)
- 56 歳で 20 人(給与合計 3,000,000 円)加入が発生したとし、⑤の保険料率を適用した場合、該当者の加入時点での責任準備金は ⑥ である。(解答欄に記載の正または負のいずれかに○をつけよ。)

(3)財政方式として開放基金方式を採用した場合

- 開放基金方式では、被保険者数および給与合計が定常人口にあるものと仮定し、以降の脱退および昇給が基礎率どおりに推移するとした場合に、その被保険者数および給与合計が計算基準日時点と同じになるように毎年の新規加入の被保険者数およびその給与を見込むことが一般的である。このように毎年の新規加入の被保険者数およびその給与を見込み、新規加入の被保険者の加入年齢を 55 歳とした場合、毎年の新規加入の被保険者数は ⑦ 人、新規加入の被保険者 1 人あたりの加入時の給与は ⑧ 円となる。(それぞれ、小数点以下第 1 位を四捨五入し整数で答えよ。)
- 被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価が 136,158 千円であった場合、標準保険料率は ⑨ である。(小数点以下第 4 位を四捨五入し小数点以下第 3 位まで求めよ。)
- 56 歳で 20 人(給与合計 3,000,000 円)加入が発生したとし、⑨の標準保険料率を適用した場合、該当者の加入時点での責任準備金は ⑩ である。(解答欄に記載の正または負のいずれかに○をつけよ。)

問題3.　定常状態にある集団が以下の 2 種類の年金制度を検討している。　(20 点)

○制度内容

<table>
<tr><td>加入時期</td><td colspan="2">年 1 回期初加入</td></tr>
<tr><td rowspan="2">給付内容</td><td>制度A</td><td>制度B</td></tr>
<tr><td>「脱退時給与× $\alpha(x)$」の年金年額を、脱退時から年 1 回期初払で生死に関わらず n 年間支給する

$\alpha(x)$: 脱退時の期初年齢 x に応じた支給率</td><td>「(加入全期間における毎期初の給与の平均額(定年到達時は定年時の給与も含めた平均とする。)) × $\beta(x)$」の年金年額を、脱退時から年 1 回期初払で生死に関わらず n 年間支給する

$\beta(x)$: 脱退時の期初年齢 x に応じた支給率</td></tr>
<tr><td>昇給時期</td><td colspan="2">年 1 回期初昇給</td></tr>
<tr><td>脱退時期</td><td colspan="2">年 1 回期末脱退(死亡による脱退は発生しない)
定年退職は定年到達時の期初に脱退</td></tr>
<tr><td>保険料の拠出時期</td><td colspan="2">年 1 回期初拠出(昇給後給与合計×保険料率)</td></tr>
<tr><td>財政方式</td><td colspan="2">加入年齢方式(加入年齢 x_e 歳)</td></tr>
</table>

解答にあたり必要であれば以下の記号および計算基数を用いよ。

x_e : 加入年齢、x_r : 定年年齢、i: 予定利率、L_x : x 歳の被保険者数、B_x : x 歳の 1 人あたり給与

b_x : 給与指数、$\ddot{a}_{\overline{n|}}$: 利率 i の期初払 n 年確定年金現価率

なお、この問題においては、死亡は一切考慮しないこととし、計算基数 D_x 、C_x は生存脱退のみを考えた場合の期初拠出、期末脱退に対応したものと考えること。また、b_x は x に関して単調増加であるものとする。

(1) 制度A、制度Bにおけるそれぞれの標準保険料率 $P_{x_e}^A$ 、$P_{x_e}^B$ および制度全体の被保険者の責任準備金 V^A 、V^B を求めよ。

(2) 制度A、制度Bそれぞれについて、ある昇給時期に一律 γ のベースアップがあった場合に発生する後発過去勤務債務を求めよ。なお、ここでいうベースアップとは、過去の給与には影響せず、将来にわたっての給与が従前の $(1+\gamma)$ 倍 $(\gamma>0)$ となるものとする。

(3) 被保険者がいつ脱退しても制度A、制度Bの年金年額が等しくなるように支給率 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ を設定した場合、(2)で求めた後発過去勤務債務の大小関係を示せ。ただし、結論を導くまでの過程についても解答用紙に記載すること。

問題4. 定常状態にある企業の年金制度を考える。(20 点)

○制度内容

加入時期	年 1 回期初加入
給付内容	「脱退時の給与×α」の年金年額を、脱退時から年 1 回期初払で生死に関わらず n 年間支給する
昇給時期	年 1 回期初昇給
脱退時期	年 1 回期末脱退(死亡による脱退は発生しない) 定年退職は定年到達時の期初に脱退
保険料の拠出時期	年 1 回期初拠出

解答にあたり必要であれば以下の記号および計算基数を用いよ。

x_e : 加入年齢、x_r : 定年年齢、i : 予定利率、$v = \dfrac{1}{1+i}$: 割引率

l_x : 脱退残存表における x 歳の生存者数、d_x : 脱退残存表における x 歳の脱退者数

b_x : 給与指数、$\ddot{a}_{\overline{n}|}$: 利率 i の期初払 n 年確定年金現価率

なお、この問題においては、死亡は一切考慮しないこととし、計算基数 D_x、C_x は生存脱退のみを考えた場合の期初拠出、期末脱退に対応したものと考えること。また、x_e 歳の給与を 1 とし、x 歳の給与は x_e 歳の給与の b_x 倍となると考えること。

(1) 現在 x 歳(x_e 歳加入、$x_e \leq x \leq x_r - 1$、以下同じ)の給与 1 あたりの給付現価 S_x を求めよ。

(2) (1)で求めた給付現価 S_x において、将来 y 歳($x \leq y \leq x_r$)で脱退したときの給付を、x_e 歳から x 歳までの加入期間(以下、「過去加入期間」という)に相当する給付と、x 歳以降脱退時までの加入期間(以下、「将来加入期間」という)に相当する給付に、次のように分ける。

過去加入期間に相当する給付
　＝脱退時の給付×(x_e 歳から x 歳までの加入期間÷ x_e 歳から脱退時までの加入期間)

将来加入期間に相当する給付
　＝脱退時の給付×(x 歳から脱退時までの加入期間÷ x_e 歳から脱退時までの加入期間)

このとき、x 歳の給与 1 あたりの過去加入期間に相当する給付現価を ${}^{P}S_x$、将来加入期間に相当する給付現価を ${}^{F}S_x$ とすると、$S_x = {}^{P}S_x + {}^{F}S_x$ となるが、${}^{P}S_x$、${}^{F}S_x$ それぞれを求めよ。

(3) 現在 x 歳の給与 1 あたりの標準保険料を P_x とし、これをもとに算出した現在 x 歳の給与1あたりの責任準備金が ${}^{P}S_x$ に等しくなるとする。

このとき、${}^{P}S_x$ 、${}^{P}S_{x+1}$ 、P_x の間にファクラーの公式が成り立つが、この式を記せ（答えのみでよい。ただし ${}^{P}S_{x+1} = \cdots$ とすること）。

(4) P_x を、${}^{P}S_x$ を用いずに表せ。さらに、${}^{P}S_x = f(x) \times P_x$（ただし、$f(x)$ は x の一次式）の形で表すことができるが、この $f(x)$ を求めよ。

以上

年 金 数 理 (解答例)

問題 1.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
記号 (D)	記号 (F)	記号 (B)	記号 (C)	記号 (F)
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
記号 (G)	記号 (C)	46.7 歳 (小数点以下第1位)	0.26 倍 (小数点以下第2位)	13 年 (整数)

(1)

・^{T}F： 正しい(教科書P61)

・^{U}F： 正しい(教科書P62)

・^{L}F： 誤り、 正しくは、第 2 項$=\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}\left({}^{L}P\cdot\sum_{y=x_e}^{x-1}l_y^{(T)}\cdot(1+i)^{x-y}\right)$

・^{In}F： 誤り、 正しくは、$^{In}F=S-S^{f}-l_{x_e}^{(T)}\cdot\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$

・^{C_0}F： 正しい(教科書 P66)

よって、正しい算式は3個 ・・・ 解答(D)

(2) $\delta=\log(1+i)$とすると、①の年金額は$\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n|}}}=\dfrac{\delta}{1-e^{-n\delta}}$、支給期間中の年金の総額は$\dfrac{n}{\bar{a}_{\overline{n|}}}=\dfrac{n\delta}{1-e^{-n\delta}}$

$\delta'=\log(1+i')$とすると、同様に②の支給期間中の年金の総額は$\dfrac{n'\delta'}{1-e^{-n'\delta'}}$

ここで、$f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\int_0^1 e^{-xt}dt(x>0)$とすると、$f(x)$は$x$の単調減少関数かつ$f(x)>0$であるから、

題意より$\dfrac{n\delta}{1-e^{-n\delta}}=\dfrac{n'\delta'}{1-e^{-n'\delta'}}\Leftrightarrow n\delta=n'\delta'\Leftrightarrow i'=(1+i)^{\frac{n}{n'}}-1$ ・・・ 解答(F)

(3) 定常状態での責任準備金をVとする。

初回の給付改善及び償却後の未償却過去勤務債務残高$PSL1$は、

$$PSL1=V\times\alpha\times(1-0.2)$$

2 年後の未償却過去勤務債務残高は、$PSL1'=PSL1\times1.05$

次に 2 回目の給付改善及び償却後の未償却過去勤務債務残高$PSL2$は、

$$PSL2=\{V\times(1+\alpha)\times\alpha+PSL1'\}\times(1-0.2)$$

3 年後の未償却過去勤務債務残高は、$PSL2' = PSL2 \times 1.05$

3 年後の未償却過去勤務債務残高 $PSL2'$ は、責任準備金 V の 10%になるので

$$PSL2' = 0.1 \times V$$

式を整理すると、$\{(1+\alpha)\times\alpha + 0.84\times\alpha\}\times 0.84 = 0.1$

α について解くと　6.25(%)の給付改善となる。 ・・・ 解答(B)

(4) x_1 歳，x_2 歳の新規加入の被保険者数をそれぞれ A_1，A_2 とすると

$$A_1 : A_2 \ = 3:2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$A_1 \cdot \varepsilon_{x_1} + A_2 \cdot \varepsilon_{x_2} = L \cdots\cdots ②$$

①、②の連立方程式を A_2 について解くと、

$$A_2 = \frac{2L}{3\varepsilon_{x_1} + 2\varepsilon_{x_2}}$$

標準保険料率を x_1 歳の保険料率としているので、新規加入の被保険者による後発過去勤務債務は x_2 歳で加入する者の加入時の責任準備金相当額となる。x_2 歳の 1 人あたりの加入時責任準備金を v_2 とすると

$$v_2 = \frac{N_{x_r}}{D_{x_2}} \cdot \frac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_{x_r}}$$

新規加入の被保険者による後発過去勤務債務は $A_2 \cdot v_2$ なので

$$\frac{2L}{3\varepsilon_{x_1} + 2\varepsilon_{x_2}} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_{x_2}} \cdot \frac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_{x_r}} \qquad \cdots \text{解答(C)}$$

(5)題意より、年度初での収支相等を考えると、

$C + F = B + v\,F$　　すなわち、$C + dF = B$　（ただし、$v = \dfrac{1}{1+i}$ および $d = 1 - v$）

が成立していた。保険料が、$\alpha\,C$（ただし、$0 < \alpha < 1$）となった後の第 t 年度末の積立金を F_t とすると、

$$\alpha\,C + F_{t-1} = B + v\,F_t \cdots (ア)$$

また、$F_0 = F$ であるから、 $C + F_0 = B + v\,F_0 \cdots (イ)$

(ア)式より、$\alpha\,C + F_0 = B + v\,F_1$

$$v\,\alpha\,C + v\,F_1 = v\,B + v^2\,F_2$$

$$\vdots$$

$$v^{t-1}\ \alpha\ C+v^{t-1}\ F_{t-1}=v^{t-1}\ B+v^{t}\ F_{t}$$

辺々を加え整理すると、$\ddot{a}_{\overline{t|}}\ \alpha\ C+F_0 \ = \ \ddot{a}_{\overline{t|}}\ B+v^t\ F_t$

同様にして(イ)式より、$\ddot{a}_{\overline{t|}}\ C+F_0 \ = \ \ddot{a}_{\overline{t|}}\ B+v^t\ F_0$

よって、$\ddot{a}_{\overline{t|}}\left(1-\alpha\right)C \ = \ v^t\left(F_0-F_t\right)$

ここで$F_t<\beta\ F_0$とし、$F_0=F$に注意すると、$v^t\ F-\ddot{a}_{\overline{t|}}\left(1-\alpha\right)C<v^t\ \beta\ F$

$\ddot{a}_{\overline{t|}}=\dfrac{1-v^t}{d}$であるから、 $v^t\ dF-\left(1-v^t\right)\left(1-\alpha\right)C<v^t\ \beta\ dF$

ゆえに、$\left(1-\beta\right)dF\ v^t+\left(1-\alpha\right)C\ v^t<\left(1-\alpha\right)C$

両辺に$\left(1+i\right)^t$を掛けると、$\left(1-\beta\right)dF+\left(1-\alpha\right)C<\left(1-\alpha\right)C\left(1+i\right)^t$

$C+dF=B$より、$\left(1-\beta\right)\left(B-C\right)+\left(1-\alpha\right)C<\left(1-\alpha\right)C\left(1+i\right)^t$

$$\left(1+i\right)^t>\frac{\left(1-\beta\right)B+\left(\beta-\alpha\right)C}{\left(1-\alpha\right)C} \qquad \therefore t>\frac{1}{\delta}\log\frac{\left(1-\beta\right)B+\left(\beta-\alpha\right)C}{\left(1-\alpha\right)C}$$

よって求めるtは、$\left[\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{\left(1-\beta\right)B+\left(\beta-\alpha\right)C}{\left(1-\alpha\right)C}\right]+1$・・・ 解答(F)

(6) ①の方法の 1 回の特別保険料をPとするとP＝$\dfrac{10{,}000}{1.05\times 7.72}$となる。

①の方法での第 8 年度末の未償却過去勤務債務残高は、第 9 年度初と第 10 年度初の特別保険料の現価であるから、$(1+\dfrac{1}{1.05})$ Pとなり、

②の方法での第 8 年度末の未償却過去勤務債務残高は、$10{,}000\{1.05(1-\alpha)\}^8$となるから

$$10{,}000\{1.05(1-\alpha)\}^8=(1+\frac{1}{1.05})\,\mathrm{P}=\frac{2.05}{1.05}\cdot\frac{10{,}000}{1.05\times 7.72}$$

よって、$\{1.05(1-\alpha)\}^8=0.240856\cdots$

$\{1.05(1-\alpha)\}^4=0.490771\cdots$

$\{1.05(1-\alpha)\}^2=0.700550\cdots$

$\{1.05(1-\alpha)\}=0.836988\cdots$

$1-\alpha=0.797132\cdots$

$\alpha=0.202867\cdots$

$\fallingdotseq 0.203$

＝20.3(%)・・・ 解答(G)

(7) y 歳時の積立金を F_y と表すと、題意より、

$$F_x = 1$$

$$F_{y+1} = \left(F_y - F_y \cdot \frac{1}{1+e_y} \right) \cdot (1+j) = F_y \cdot \frac{e_y}{1+e_y} \cdot (1+j)$$

ここで、$e_y = \dfrac{\sum_{z=y+1}^{\varpi} l_z}{l_y} = \dfrac{l_{y+1}}{l_y} \cdot \dfrac{l_{y+1} + \sum_{z=y+2}^{\varpi} l_z}{l_{y+1}} = \dfrac{l_{y+1}}{l_y} \cdot (1+e_{y+1})$ より、

$$F_y = F_x \cdot \prod_{s=x}^{y-1} \frac{F_{s+1}}{F_s} = 1 \cdot \prod_{s=x}^{y-1} \left(\frac{l_{s+1}}{l_s} \cdot \frac{1+e_{s+1}}{1+e_s} \cdot (1+j) \right) = \frac{l_y}{l_x} \cdot \frac{1+e_y}{1+e_x} \cdot (1+j)^{y-x}$$

y 歳時に支給する年金額は $F_y \cdot \dfrac{1}{1+e_y} = \dfrac{l_y}{l_x} \cdot \dfrac{1}{1+e_x} \cdot (1+j)^{y-x}$ となるから、

x 歳時における年金現価

$$= \sum_{y=x}^{\omega-1} \frac{1}{(1+i)^{y-x}} \cdot F_y \cdot \frac{1}{1+e_y} = \sum_{y=x}^{\omega-1} \frac{1}{(1+i)^{y-x}} \cdot \frac{l_y}{l_x} \cdot \frac{1}{1+e_x} \cdot (1+j)^{y-x}$$

$$= \frac{1}{1+e_x} \sum_{y=x}^{\omega-1} \frac{1}{\left(1+\frac{i-j}{1+j}\right)^{y-x}} \cdot \frac{l_y}{l_x} = \frac{\ddot{a}'_x}{1+e_x} \quad \cdots \text{解答(C)}$$

(8) $l_x = \dfrac{1}{2}(\omega - x)$ より、

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} \frac{1}{2}(\omega-(x+t))dt = \frac{1}{2}\left[(\omega-x)t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\omega-x} = \frac{(\omega-x)^2}{4}$$

今、$\mathring{e}_0 = \dfrac{T_0}{l_0} = \dfrac{\frac{\omega^2}{4}}{\frac{\omega}{2}} = \dfrac{\omega}{2} = 70$ 　よって、$\omega = 140$

$$\text{平均年齢} = \frac{\int_0^{\omega} x l_x dx}{T_0}$$

ここで $\int_0^{\omega} x l_x dx = \int_0^{\omega} x \dfrac{1}{2}(\omega - x) dx = \left[\dfrac{\omega x^2}{4} - \dfrac{x^3}{6} \right]_0^{\omega} = \dfrac{\omega^3}{12}$ であるから、

$$平均年齢 = \frac{\int_0^{\omega} x l_x dx}{T_0} = \frac{\frac{\omega^3}{12}}{\frac{\omega^2}{4}} = \frac{\omega}{3} = \frac{140}{3} = 46.6666 = 46.7歳$$

(9) 再計算時の標準保険料率＝3,000÷20,000＝0.15

再計算時の責任準備金＝3,600＋1,500－12,500×0.15＝3,225

再計算時の過去勤務債務＝600×0.15×0.5×8.61＝387.45

再計算時の積立金＝3,225－387.45＝2,837.55

またβ＝kαとすると

変更後の標準保険料率＝3,000×k÷20,000＝0.15k　となるから

変更後の責任準備金＝1,200＋2,400k+1,500－12,500×0.15k＝2,837.55

よって、k＝137.55÷525＝0.262 より

k≒0.26　・・・（解答）

(10) 総合保険料方式のもとでは、

$$^{c}F_n = \left({}^{c}F_{n-1} + \frac{S^a + S^p - {}^{c}F_{n-1}}{{}^{a}G} \times 給与合計 - B \right) \times (1+i)$$

$$= \left({}^{c}F_{n-1} + \frac{1{,}000 + 30{,}000 - {}^{c}F_{n-1}}{50{,}000} \times 給与合計 - 3{,}000 \right) \times 1.05 \cdots ①$$

加入年齢方式のもとでは、責任準備金＝(30,000＋1,000－50,000×20%)＝21,000

ここで、定常状態のもとでは、

(21,000－3,000＋20%×給与合計)×1.05＝21,000

であるので、給与合計＝10,000

これを①式に代入して整理すると、${}^{c}F_n = 0.84\,{}^{c}F_{n-1} + 3{,}360$

変形すると、${}^{c}F_n$ －21,000＝0.84(${}^{c}F_{n-1}$ －21,000)となり、(${}^{c}F_n$ －21,000)は公比 0.84 の等比数列。

${}^{c}F_0$ ＝2,000 より、${}^{c}F_n$ ＞21,000×0.9 となるnを求めると、n＝13　・・・（解答）

問題2.

①	②	③	④	⑤
2.528 （小数点以下第3位）	63,231 千円 （整数）	正 ・ 負	5,202 千円 （整数）	3.452 （小数点以下第3位）
⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
正 ・ 負	90 人 （整数）	19,000 円 （整数）	2.416 （小数点以下第3位）	正 ・ 負

①標準保険料率

＝加入年齢の給付現価率÷加入年齢の給与現価率

＝25.878÷10.238＝2.52764・・・⇒2.528

②責任準備金

＝被保険者の給付現価－被保険者の給与現価×標準保険料率

＝Σ（給与×給付現価率）－Σ（給与×給与現価率）×2.528

＝236,154,790－68,403,310×2.528＝63,231,222⇒63,231 千円

③該当者の責任準備金＝3,000,000×11.846－3,000,000×5.286×2.528＝－4,551,024⇒負

④該当者の 1 年後の給与合計＝給与合計×$\dfrac{b_{56}}{b_{55}}\times\dfrac{l_{56}}{l_{55}}=2{,}000{,}000\times\dfrac{2.000}{1.000}\times\dfrac{900{,}000}{1{,}000{,}000}=3{,}600{,}000$

該当者の 1 年後の責任準備金＝3,600,000×14.808－3,600,000×5.286×2.528＝5,201,971⇒5,202 千円

⑤保険料率

＝被保険者の給付現価÷被保険者の給与現価

＝236,154,790÷68,403,310＝3.45238・・・⇒3.452

⑥該当者の責任準備金＝3,000,000×11.846－3,000,000×5.286×3.452＝－19,203,816⇒負

⑦教科書 P166 より、毎年の新規加入の被保険者数

$$=\text{被保険者合計}\times\frac{l_{55}}{\sum_{x=55}^{59} l_x}=360\times\frac{1{,}000{,}000}{4{,}000{,}000}=90$$

⑧教科書 P167 より、毎年の新規加入の被保険者 1 人あたりの加入時の給与

$$=\text{被保険者の平均給与}\times\frac{b_{55}\cdot\sum_{x=55}^{59} l_x}{\sum_{x=55}^{59} b_x\cdot l_x}=52{,}250\times\frac{1.000\times 4{,}000{,}000}{11{,}000{,}000}=19{,}000$$

⑨標準保険料率

＝（被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価＋将来加入が見込まれる被保険者の給付現価）

÷（被保険者の給与現価＋将来加入が見込まれる被保険者の給与現価）

＝（236,154,790－136,158,000＋90×19,000×25.878÷3％）

÷（68,403,310＋90×19,000×10.238÷3％）

＝2.41582・・・⇒2.416

⑩該当者の責任準備金＝3,000,000×11.846－3,000,000×5.286×2.416＝－2,774,928⇒負

問題3.

(1)

$$P^A_{x_e}=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}C_x\cdot b_x\cdot\alpha(x)+D_{x_r}\cdot b_{x_r}\cdot\alpha(x_r)}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot b_x}\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$P^B_{x_e}=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}C_x\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x}b_y}{x-x_e+1}\cdot\beta(x)+D_{x_r}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r}b_y}{x_r-x_e+1}\cdot\beta(x_r)}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot b_x}\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$V^A=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot b_y\cdot\alpha(y)+D_{x_r}\cdot b_{x_r}\cdot\alpha(x_r)}{D_x\cdot b_x}\right)\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}-P^A_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\cdot b_y}{D_x\cdot b_x}\right)$$

$$V^B=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\frac{\sum_{z=x_e}^{y}b_z}{y-x_e+1}\cdot\beta(y)+D_{x_r}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r}b_y}{x_r-x_e+1}\cdot\beta(x_r)}{D_x\cdot b_x}\right)\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$-P^B_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\cdot b_y}{D_x\cdot b_x}\right)$$

(2) ベースアップがあっても標準保険料率は変わらない。また、ベースアップ後の責任準備金$V^{A'}$、$V^{B'}$は
$V^{A'}=(1+\gamma)V^A$

$$V^{B'}=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\frac{\sum_{z=x_e}^{y}b_z}{y-x_e+1}\cdot\beta(y)+D_{x_r}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r}b_y}{x_r-x_e+1}\cdot\beta(x_r)}{D_x\cdot b_x}\right)\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$+\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \frac{\sum_{z=x}^{y} b_z}{y-x_e+1} \cdot \beta(y) + D_{x_r} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r-x_e+1} \cdot \beta(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot \gamma$$

$$-P_{x_e}^{B} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot (1+\gamma)$$

よって、制度Aにおける後発過去勤務債務は

$$V^{A\prime} - V^{A} = \gamma \cdot V^{A}$$

$$= \gamma \left\{ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot b_y \cdot \alpha(y) + D_{x_r} \cdot b_{x_r} \cdot \alpha(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} - P_{x_e}^{A} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right) \right\}$$

同様に、制度Bにおける後発過去勤務債務は

$$V^{B\prime} - V^{B}$$

$$= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \frac{\sum_{z=x}^{y} b_z}{y-x_e+1} \cdot \beta(y) + D_{x_r} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r-x_e+1} \cdot \beta(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot \gamma$$

$$-P_{x_e}^{B} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \gamma$$

(3) 被保険者がいつ脱退しても年金年額が等しくなるように支給率$\alpha(x)$、$\beta(x)$を設定するので、以下の関係が成り立つ。

$$①\ b_x \cdot \alpha(x) = \frac{\sum_{y=x_e}^{x} b_y}{x-x_e+1} \cdot \beta(x) \quad (x_e \leqq x \leqq x_r)$$

$$②\ P_{x_e}^{A} = P_{x_e}^{B}$$

②を用いると

$$(V^{A'}-V^{A})-(V^{B'}-V^{B})=$$

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x\cdot B_x\left\{\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y\cdot\left(b_y\cdot\alpha(y)-\frac{\sum_{z=x}^{y} b_z}{y-x_e+1}\cdot\beta(y)\right)+D_{x_r}\cdot\left(b_{x_r}\cdot\alpha(x_r)-\frac{\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r-x_e+1}\cdot\beta(x_r)\right)}{D_x\cdot b_x}\right\}\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}\cdot\gamma$$

ここで、{ }の分子について①を用いると

$$\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y\cdot\left(b_y\cdot\alpha(y)-\frac{\sum_{z=x}^{y} b_z}{y-x_e+1}\cdot\beta(y)\right)+D_{x_r}\cdot\left(b_{x_r}\cdot\alpha(x_r)-\frac{\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r-x_e+1}\cdot\beta(x_r)\right)$$

$$=\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y\cdot\left(\frac{\sum_{z=x_e}^{y} b_z-\sum_{z=x}^{y} b_z}{y-x_e+1}\cdot\beta(y)\right)+D_{x_r}\cdot\left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r} b_y-\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r-x_e+1}\cdot\beta(x_r)\right)$$

$$=\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y\cdot\left(\frac{\sum_{z=x_e}^{x-1} b_z}{y-x_e+1}\cdot\beta(y)\right)+D_{x_r}\cdot\left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x-1} b_y}{x_r-x_e+1}\cdot\beta(x_r)\right)>0$$

よって、制度Aの後発過去勤務債務のほうが大きい。

問題4.

(1)題意より、

$$S_x=\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y b_y\alpha+D_{x_r}b_{x_r}\alpha}{D_x b_x}\ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y b_y+D_{x_r}b_{x_r}\right)$$

(2)現在x歳(x_e歳加入、$x_e\le x\le x_r-1$)の被保険者が、将来y歳($x\le y\le x_r$)で脱退した場合、

i)$x\le y<x_r$のとき　　; 過去加入期間は$x-x_e$、将来加入期間は$y+1-x$

ii)$y=x_r$のとき　　; 過去加入期間は$x-x_e$、将来加入期間はx_r-x

であるから、

$$^PS_x=\frac{\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y b_y\frac{x-x_e}{y+1-x_e}+D_{x_r}b_{x_r}\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\right)\cdots(ア)$$

$$^FS_x=\frac{\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y b_y\frac{y+1-x}{y+1-x_e}+D_{x_r}b_{x_r}\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\right)$$

(3)ファクラーの公式より、導かれる関係式は

$$b_{x+1}\,l_{x+1}\,{}^PS_{x+1}\;=\;b_x\,l_x\left({}^PS_x+P_x\right)(1+i)-b_x\,d_x\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}\cdots(イ)$$

ゆえに、

$$^PS_{x+1}\;=\;\frac{b_x\,l_x}{b_{x+1}\,l_{x+1}}\left\{\left({}^PS_x+P_x\right)(1+i)-\frac{d_x}{l_x}\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}\right\}$$

(4)(イ)式に(ア)式を代入すると、

$$b_{x+1}\,l_{x+1}\frac{\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_{x+1}b_{x+1}}\left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1}C_y b_y\frac{x+1-x_e}{y+1-x_e}+D_{x_r}b_{x_r}\frac{x+1-x_e}{x_r-x_e}\right)$$

$$=b_x\,l_x\frac{\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y b_y\frac{x-x_e}{y+1-x_e}+D_{x_r}b_{x_r}\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\right)(1+i)+b_x\,l_x\,P_x(1+i)-b_x d_x\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

両辺にv^{x+1}を掛けると、

$$D_{x+1}\,b_{x+1}\frac{\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_{x+1}b_{x+1}}\left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1}C_y b_y\frac{x+1-x_e}{y+1-x_e}+D_{x_r}b_{x_r}\frac{x+1-x_e}{x_r-x_e}\right)$$

$$=D_x\,b_x\frac{\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y b_y\frac{x-x_e}{y+1-x_e}+D_{x_r}b_{x_r}\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\right)+D_x b_x P_x-C_x b_x\alpha\,\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$\alpha\, \ddot{a}_{\overline{n}|}\left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x+1-x_e}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x+1-x_e}{x_r-x_e}\right)$$

$$= \alpha\, \ddot{a}_{\overline{n}|}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x-x_e}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x-x_e}{x_r-x_e}\right) + D_x b_x P_x - C_x b_x \alpha\, \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$D_x b_x P_x = \alpha\, \ddot{a}_{\overline{n}|}\left(-C_x b_x \frac{x-x_e}{x+1-x_e} + \sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y b_y \frac{1}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{1}{x_r-x_e} + C_x b_x\right)$$

$$D_x b_x P_x = \alpha\, \ddot{a}_{\overline{n}|}\left(C_x b_x \frac{1}{x+1-x_e} + \sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y b_y \frac{1}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{1}{x_r-x_e}\right)$$

ゆえに、

$$P_x = \frac{\alpha\, \ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \frac{1}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{1}{x_r-x_e}\right) \cdots (ウ)$$

従って、(ア)式および(ウ)式より

$${}^{P}S_x = (x-x_e)P_x$$

よって、求める$f(x)$は、

$$f(x) = x - x_e$$

以 上