数学(問題)

[問題 1 から問題 4 を通じて、必要であれば（付表）に記載された数値を用いよ。また、解答が数値となる場合は、整数となる場合を除き、小数点以下第 5 位を四捨五入した小数点以下第 4 位までの小数、または既約分数とせよ。]

問題 1.　次の各問の $\square$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。(5 点×6)

(1)　1から9までの番号が1つずつ書いてある9枚のカードの中から1枚抜き出す試行を考える。抜き出したカードの番号が $2^m\ (m=0,1,2,3)$ で割り切れて 2^{m+1} では割り切れない場合に値 m をとるような確率変数を X とする。また、抜き出したカードの番号が $3^n\ (n=0,1,2)$ で割り切れて 3^{n+1} では割り切れない場合に値 n をとるような確率変数を Y とする。なお、全ての自然数は 1 で割り切れるものとみなす。このとき、X の平均は $\square$ 、分散は $\square$ 、Y の平均は $\square$ 、分散は $\square$ 、 X と Y の共分散は $\square$ である。

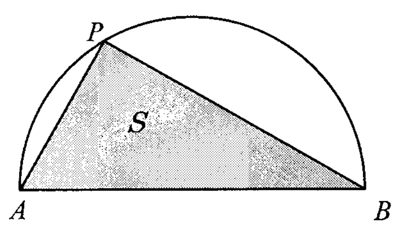
(2)　A 、B は 2 人合わせて N 円持っている。 2 人でゲームを繰り返し行い、1 回のゲームが終わるごとに、敗者が勝者に 1 円を払い、どちらかの所持金が 0 円（破産）になったところでゲームをやめることとする。 A が n 円持っているところからゲームをはじめるとき、最終的に A が破産する確率は $\square$ である。 ただし、1 回のゲームで、A 、B の勝つ確率は、それぞれ $\dfrac{1}{1+\alpha}$ 、$\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ とする。($\alpha>0, \alpha\neq 1$)

(3)　サイコロを 5 回投げる中で、1 の目が連続して 2 回以上出る確率は $\square$ である。 また、サイコロを 5 回投げる中で、同じ目が連続して 2 回以上出る確率は $\square$ である。

(4)　X_1 , X_2 , X_3 を、互いに独立でそれぞれ区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする。このとき、確率 $P\left(X_1+{X_2}^2+X_3<1\right)$ = $\square$ である。

(5)　100 個のデータ数値の合計をとることを考える。個々のデータについて、小数点以下を四捨五入して合計する場合と、小数点以下を五捨六入して合計する場合の差の絶対値が α を超えない確率が 0.95 以上となるような最小の整数 α を、中心極限定理を用いて求めると、α = $\square$ である。

(6)　右図のような半径 1 の半円周 $\widehat{AB}$ 上に点 P を無作為に選ぶ。このとき、三角形 APB の面積 S の確率密度関数 $f(s)$ は、$f(s)$ = $\square$ $(0<s<1)$ である。



問題 2.　次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。(5 点×5)

(1)　正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から標本 X_1, X_2 をとる。μ の推定量 $Y = a\cdot\dfrac{X_1}{2} + b\cdot\dfrac{X_2}{3}$ が有効推定量ならば、 $a =$ $\boxed{}$ 、$b =$ $\boxed{}$ であり、そのときの Y の分散は、 $V[Y] =$ $\boxed{}$ である。

(2)　X が正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ からの標本であるとき、仮説 $H_0 : \mu = \mu_0 = 165$ を、

対立仮説 $H_1 : \mu = \mu_1 = 172$ に対して検定したい。　いま、$\sigma = 11$ はわかっており、かつ対立仮説 H_1 が真であるとき、H_0 を採択する（第 2 種の誤りをおかす）確率が 2%以下になるようにするには、標本数 n は $\boxed{}$ 以上あればよい。ただし、有意水準は 0.05 とする。(自然数で答えよ)

(3)　X_1 , X_2 , X_3 を確率変数 X からの標本とし、$X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)}$ をその順序統計量とする。X の確率密度関数 $f(x)$ が、 $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 < x \le 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ で与えられるとき、 $E[X_{(1)}] =$ $\boxed{}$ 、$E[X_{(2)}] =$ $\boxed{}$ 、 $E[X_{(3)}] =$ $\boxed{}$ である。

(4)　分散の片側検定において、真の分散が帰無仮説において仮定された分散の3倍になったとき、帰無仮説が確率95%以上で棄却されるようにするには標本数が $\boxed{}$ 個以上あればよい。ただし、平均は未知とし、有意水準は0.05とする。

(5)　1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 を、不連続な区間 $[a,b] \cup [c,32]$ 上の一様な分布からの標本とするとき、母数 a , b および c の最尤推定量は、それぞれ、 $\boxed{}$ 、$\boxed{}$ 、$\boxed{}$ である。ただし、a , b , c はいずれも整数で、 $a < b < c < 32$ とする。

問題 3.　確率変数 X と確率変数 Y は互いに独立で、X は平均 λ のポアソン分布に従い、Y は平均 λ の指数分布に従うものとする。ここに、λ は正の定数とする。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1)　X の積率母関数 $M_X(\theta)$ 、および Y の積率母関数 $M_Y(\theta)$ を求めよ。　(2 点×2)

(2)　X の分布の歪度(わいど)および Y の分布の歪度を求めよ。　(4 点×2)

(3)　$X > Y$ となる確率 $P(X > Y)$ を求めよ。　(8 点)

なお、一般に、確率変数 Z の分布の歪度は、$\dfrac{E\left[\{Z-E[Z]\}^3\right]}{\{V[Z]\}^{3/2}}$ で定義される。

問題 4.　連続かつ（狭義）単調増加な分布関数 $F(x)$ に従う母集団から、m 個の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ をとる。これを大きさの順に並べ替え、i 番目に小さいものを $X_{(i)}$ と表す。 また、$F_{(i)} = F(X_{(i)}) = P\left(x \le X_{(i)}\right)$ とし、$F_{(i)}$ を確率変数とみなす。($i = 1, 2, \cdots, m$)

このとき、以下の問いに答えよ。

(1)　確率変数 $F_{(i)}$ の分布関数 $G_i(x)$ が、$G_i(x) = \sum_{k=i}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$ となることを導け。　(5 点)

(2)　確率変数 $F_{(i)}$ の確率密度関数 $g_i(x)$ を求めよ。　(10 点)

(3)　確率変数 $F_{(i)}$ の期待値を求めよ。　(10 点)

以　上

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表　　(例 : $P(x > 0.25) = 0.401$)

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.500	0.496	0.492	0.488	0.484	0.480	0.476	0.472	0.468	0.464
0.1*	0.460	0.456	0.452	0.448	0.444	0.440	0.436	0.433	0.429	0.425
0.2*	0.421	0.417	0.413	0.409	0.405	0.401	0.397	0.394	0.390	0.386
0.3*	0.382	0.378	0.374	0.371	0.367	0.363	0.359	0.356	0.352	0.348
0.4*	0.345	0.341	0.337	0.334	0.330	0.326	0.323	0.319	0.316	0.312
0.5*	0.309	0.305	0.302	0.298	0.295	0.291	0.288	0.284	0.281	0.278
0.6*	0.274	0.271	0.268	0.264	0.261	0.258	0.255	0.251	0.248	0.245
0.7*	0.242	0.239	0.236	0.233	0.230	0.227	0.224	0.221	0.218	0.215
0.8*	0.212	0.209	0.206	0.203	0.200	0.198	0.195	0.192	0.189	0.187
0.9*	0.184	0.181	0.179	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161
1.0*	0.159	0.156	0.154	0.152	0.149	0.147	0.145	0.142	0.140	0.138
1.1*	0.136	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.123	0.121	0.119	0.117
1.2*	0.115	0.113	0.111	0.109	0.107	0.106	0.104	0.102	0.100	0.099
1.3*	0.097	0.095	0.093	0.092	0.090	0.089	0.087	0.085	0.084	0.082
1.4*	0.081	0.079	0.078	0.076	0.075	0.074	0.072	0.071	0.069	0.068
1.5*	0.067	0.066	0.064	0.063	0.062	0.061	0.059	0.058	0.057	0.056
1.6*	0.055	0.054	0.053	0.052	0.051	0.049	0.048	0.047	0.046	0.046
1.7*	0.045	0.044	0.043	0.042	0.041	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037
1.8*	0.036	0.035	0.034	0.034	0.033	0.032	0.031	0.031	0.030	0.029
1.9*	0.029	0.028	0.027	0.027	0.026	0.026	0.025	0.024	0.024	0.023
2.0*	0.023	0.022	0.022	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.018
2.1*	0.018	0.017	0.017	0.017	0.016	0.016	0.015	0.015	0.015	0.014
2.2*	0.014	0.014	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011
2.3*	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008
2.4*	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006
2.5*	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表　　(例 : $P(x > 1.960) = 0.025$)

$\varepsilon\to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.090	2.878	2.748	2.652	2.576	2.512	2.457	2.409	2.366
0.01*	2.326	2.290	2.257	2.226	2.197	2.170	2.144	2.120	2.097	2.075
0.02*	2.054	2.034	2.014	1.995	1.977	1.960	1.943	1.927	1.911	1.896
0.03*	1.881	1.866	1.852	1.838	1.825	1.812	1.799	1.787	1.774	1.762
0.04*	1.751	1.739	1.728	1.717	1.706	1.695	1.685	1.675	1.665	1.655
0.05*	1.645	1.635	1.626	1.616	1.607	1.598	1.589	1.580	1.572	1.563
0.06*	1.555	1.546	1.538	1.530	1.522	1.514	1.506	1.499	1.491	1.483
0.07*	1.476	1.468	1.461	1.454	1.447	1.440	1.433	1.426	1.419	1.412
0.08*	1.405	1.398	1.392	1.385	1.379	1.372	1.366	1.359	1.353	1.347
0.09*	1.341	1.335	1.329	1.323	1.317	1.311	1.305	1.299	1.293	1.287
0.1*	1.282	1.227	1.175	1.126	1.080	1.036	0.994	0.954	0.915	0.878
0.2*	0.842	0.806	0.772	0.739	0.706	0.674	0.643	0.613	0.583	0.553
0.3*	0.524	0.496	0.468	0.440	0.412	0.385	0.358	0.332	0.305	0.279
0.4*	0.253	0.228	0.202	0.176	0.151	0.126	0.100	0.075	0.050	0.025

II.自由度φのχ^{2}分布の上側ε点： $\chi^2_\phi(\varepsilon)$

φ＼ε	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025
1	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024
2	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378
3	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348
4	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143
5	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833
6	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449
7	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013
8	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535
9	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023
10	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483
11	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920
12	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337
13	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736
14	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119
15	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488
16	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845
17	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191
18	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526
19	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852
20	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170
21	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479
22	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781
23	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076
24	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364
25	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646
26	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923
27	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195
28	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461
29	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722
30	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979
31	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232
32	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480
33	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725
34	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966
35	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203
36	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437
37	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668
38	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896
39	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120
40	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342
50	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420
60	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298
70	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023
80	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629
90	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136
100	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561

III.自由度φのt分布の上側ε点： $t_\phi(\varepsilon)$

φ＼ε	0.100	0.050	0.025
6	1.440	1.943	2.447
7	1.415	1.895	2.365
8	1.397	1.860	2.306
9	1.383	1.833	2.262
10	1.372	1.812	2.228
11	1.363	1.796	2.201
12	1.356	1.782	2.179
13	1.350	1.771	2.160
14	1.345	1.761	2.145
15	1.341	1.753	2.131
16	1.337	1.746	2.120
17	1.333	1.740	2.110
18	1.330	1.734	2.101
19	1.328	1.729	2.093
20	1.325	1.725	2.086
21	1.323	1.721	2.080
22	1.321	1.717	2.074
23	1.319	1.714	2.069
24	1.318	1.711	2.064
25	1.316	1.708	2.060

Ⅳ.分母の自由度m,分子の自由度nのF分布の上側ε点： $F_m^n(\varepsilon)$

ε= 0.100

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

ε= 0.050

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978

ε= 0.025

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419
4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717

ε= 0.010

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849

ε= 0.005

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.501	199.000	199.166	199.250	199.300	199.333	199.357	199.375	199.388	199.400
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.838	44.434	44.126	43.882	43.686
4	31.333	26.284	24.259	23.155	22.456	21.975	21.622	21.352	21.139	20.967
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.513	14.200	13.961	13.772	13.618
6	18.635	14.544	12.917	12.028	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.250
7	16.236	12.404	10.882	10.050	9.522	9.155	8.885	8.678	8.514	8.380
8	14.688	11.042	9.596	8.805	8.302	7.952	7.694	7.496	7.339	7.211
9	13.614	10.107	8.717	7.956	7.471	7.134	6.885	6.693	6.541	6.417
10	12.826	9.427	8.081	7.343	6.872	6.545	6.302	6.116	5.968	5.847

数学　解答例

確率や統計以前に、数学の基礎的な事柄について、理解が不足していると思われる答案が多く見られた。以下の解答例では、そういった答案を書いた受験者にも理解できるように、冗長となることを厭わず、なるべく詳細な記述に努めた。また、周辺の知識についても枠に囲んで加えた。

問題 1. 確率分野において基礎的と思われる問題を出題した。(1)～(6)に各 5 点を配点したが、受験者の平均点は(1)が飛び抜けて高く、次いで(3) (4) (2) (5) (6)の順に高かった。

(1)	X の平均	$\frac{7}{9}$　(または、0.7778)
	X の分散	$\frac{86}{81}$　(または、1.0617)
	Y の平均	$\frac{4}{9}$　(または、0.4444)
	Y の分散	$\frac{38}{81}$　(または、0.4691)
	X と Y の共分散	$-\frac{19}{81}$　(または、−0.2346)
(2)		$\dfrac{\alpha^n-\alpha^N}{1-\alpha^N}$
(3)	1 の目	$\frac{751}{7776}$　(または、0.0966)
	同じ目	$\frac{671}{1296}$　(または、0.5177)
(4)		$\frac{4}{15}$　(または、0.2667)
(5)		15　（7 も正解とした。）
(6)		$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$　$(0<s<1)$

問題 1 (1)

1 から 9 までの番号が 1 つずつ書いてある 9 枚のカードの中から 1 枚抜き出す試行を考える。抜き出したカードの番号が 2^m $(m=0,1,2,3)$ で割り切れて 2^{m+1} では割り切れない場合に値 m をとるような確率変数を X とする。また、抜き出したカードの番号が 3^n $(n=0,1,2)$ で割り切れて 3^{n+1} では割り切れない場合に値 n をとるような確率変数を Y とする。なお、全ての自然数は 1 で割り切れるものとみなす。このとき、X の平均は $\boxed{}$ 、分散は $\boxed{}$ 、Y の平均は $\boxed{}$ 、分散は $\boxed{}$ 、 X と Y の共分散は $\boxed{}$ である。

［解答例］

有限母集団の、平均、分散、共分散を求める問題である。きわめて基本的な問題であり、当然ながら出来はよかったが、それでも、平均、分散、共分散すべてに正解した答案は意外に少なかった。

1 は $2^0=1$ で割り切れて $2^1=2$ で割り切れない。また、$3^0=1$ で割り切れて、$3^1=3$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 1 のとき、$X=0$, $Y=0$

2 は $2^1=2$ で割り切れて $2^2=4$ で割り切れない。また、$3^0=1$ で割り切れて、$3^1=3$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 2 のとき、$X=1$, $Y=0$

3 は $2^0=1$ で割り切れて $2^1=2$ で割り切れない。また、$3^1=3$ で割り切れて、$3^2=9$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 3 のとき、$X=0$, $Y=1$

4 は $2^2=4$ で割り切れて $2^3=8$ で割り切れない。また、$3^0=1$ で割り切れて、$3^1=3$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 4 のとき、$X=2$, $Y=0$

5 は $2^0=1$ で割り切れて $2^1=2$ で割り切れない。 また、$3^0=1$ で割り切れて、$3^1=3$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 5 のとき、$X=0$, $Y=0$

6 は $2^1=2$ で割り切れて $2^2=4$ で割り切れない。また、$3^1=3$ で割り切れて、$3^2=9$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 6 のとき、$X=1$, $Y=1$

7 は $2^0=1$ で割り切れて $2^1=2$ で割り切れない。 また、$3^0=1$ で割り切れて、$3^1=3$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 7 のとき、$X=0$, $Y=0$

8 は $2^3=8$ で割り切れて $2^4=16$ で割り切れない。また、$3^0=1$ で割り切れて、$3^1=3$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 8 のとき、$X=3$, $Y=0$

9 は $2^0=1$ で割り切れて $2^1=2$ で割り切れない。また、$3^2=9$ で割り切れて、$3^3=27$ で割り切れない。したがって、カードの番号が 9 のとき、$X=0$, $Y=2$

カードの番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
X	0	1	0	2	0	1	0	3	0	7
X^2	0	1	0	4	0	1	0	9	0	15
Y	0	0	1	0	0	1	0	0	2	4
Y^2	0	0	1	0	0	1	0	0	4	6
XY	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

カード番号が1～9それぞれとなる確率はすべて $\frac{1}{9}$ 。

$$\overline{X}=E[X]=\frac{1}{9}\sum X=\frac{7}{9}\ (=0.7778)$$

$$E[X^2]=\frac{1}{9}\sum X^2=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$$

$$V[X]=E\left[\left(X-\overline{X}\right)^2\right]=E\left[X^2-2\overline{X}X+\left(\overline{X}\right)^2\right]=E[X^2]-2\overline{X}E[X]+\left(\overline{X}\right)^2$$

$$=E[X^2]-2\left(\overline{X}\right)^2+\left(\overline{X}\right)^2=E[X^2]-\left(\overline{X}\right)^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{86}{81}\ (=1.0617)$$

$$\overline{Y}=E[Y]=\frac{1}{9}\sum Y=\frac{4}{9}\ (=0.4444)$$

$$E[Y^2]=\frac{1}{9}\sum Y^2=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$V[Y]=E[Y^2]-\left(\overline{Y}\right)^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{38}{81}\ (=0.4691)$$

$$E[XY]=\frac{1}{9}\sum XY=\frac{1}{9}$$

$$Cov\,[X,Y]=E\left[\left(X-\overline{X}\right)\cdot\left(Y-\overline{Y}\right)\right]=E\left[XY-X\overline{Y}-\overline{X}Y+\overline{X}\,\overline{Y}\right]$$

$$=E[XY]-\overline{Y}E[X]-\overline{X}E[Y]+\overline{X}\,\overline{Y}=E[XY]-\overline{X}\,\overline{Y}-\overline{X}\,\overline{Y}+\overline{X}\,\overline{Y}$$

$$=E[XY]-\overline{X}\,\overline{Y}=\frac{1}{9}-\frac{7}{9}\times\frac{4}{9}=-\frac{19}{81}\ (=-0.2346)$$

共分散の欄が白紙の答案が多く見られた。定義を覚えていないためと思われる。

確率変数 X の分散は、$X-\overline{X}$ の2乗の期待値。確率変数 Y の分散は、$Y-\overline{Y}$ の2乗の期待値。X と Y の共分散は、分散で2乗とするかわりにそれぞれを1つずつ組み合わせた $\left(X-\overline{X}\right)\cdot\left(Y-\overline{Y}\right)$ の期待値と覚えればよい。

共分散に関連して、2つの確率変数（例えば、X と Y）の「相関係数」という概念がある。

X と Y の相関係数 ρ_{xy} の定義は、$\dfrac{Cov[X\,,\,Y]}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}}$ 　相関係数は－1以上1以下

なお、本問の相関係数は－0.3324となる。

$X=Y$ のときの共分散 $Cov[X\,,\,X]=V[X]$ 、相関係数 $\rho_{xx}=1$

X と Y は同一または互いに他の正値の定数倍であれば相関係数が１、

$X=-Y$ のときの共分散 $Cov[X\ ,-X]=-V[X]$ 、$V[-X]=V[X]$ 、相関係数 $\rho_{xx}=-1$

X と Y は互いに他の負値の定数倍であれば相関係数が－１、

X と Y が独立な場合 $E[XY]=\overline{X}\,\overline{Y}$ だから、$Cov[X\ ,Y]=0$ 、$\rho_{xx}=0$

X と Y は独立であれば相関係数が 0。

これらの逆は一般には成り立たない。

相関係数または共分散が正値ならば「X と Y は正の相関がある」、

相関係数または共分散が負値ならば「X と Y は負の相関がある」ということもある。

本問の X と Y は負の相関があることになる。

一般に、$E[XY]=\overline{X}\,\overline{Y}+Cov[X\ ,Y]$ 、 $V[X\pm Y]=V[X]+V[Y]\pm 2\cdot Cov[X\ ,Y]$

X と Y が独立ならば、$E[XY]=\overline{X}\,\overline{Y}$ 、 $V[X\pm Y]=V[X]+V[Y]$

（逆に、$E[XY]=\overline{X}\,\overline{Y}$ や $V[X\pm Y]=V[X]+V[Y]$ が成り立っても、X と Y は独立とは限らない）

以下は期待値演算子等の重要な性質

$E[aX+bY+c]=a\cdot E[X]+b\cdot E[Y]+c$

$V[aX+bY+c]=a^2\cdot V[X]+b^2\cdot V[Y]+2ab\cdot Cov[X\ ,Y]$

（$a\ ,b\ ,c$ を定数とする。それぞれの定数に 0 や 1 を入れた場合についても確かめること）

問題1(2)

Ａ 、Ｂ は2人合わせてN円持っている。 2人でゲームを繰り返し行い、1回のゲームが終わるごとに、勝者が敗者に1円を払い、どちらかの所持金が0円（破産）になったところでゲームをやめることとする。 Ａ が n円持っているところからゲームをはじめるとき、最終的に Ａ が破産する確率は

$\boxed{}$ **である。 ただし、1回のゲームで、Ａ 、Ｂ の勝つ確率は、それぞれ $\dfrac{1}{1+\alpha}$ 、$\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ とする。**（$\alpha>0, \alpha\neq 1$）

［解答例］

これは、基本的な確率過程の問題として有名なものである。ただし、確率過程の特別な知識は不要であり、順番に考えていくと解答にたどり着ける。

Ａが破産する確率は、それ以前のゲームの結果やその時点で何回ゲームが終わったか（過去の経過）に関係せず、その時点の所持金にのみ依存する。

Ａが所持金k円の状態から、最終的にＡが破産する確率をP_kとする。

$k=0$ ならばＡは既に破産している。 $k=N$ ならばＢが既に破産しておりＡが破産することはない。

それ以外のkであれば、次のゲームの勝敗により、$\dfrac{1}{1+\alpha}$の確率で$k+1$円に、$\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$の確率で$k-1$円になる。したがって、次のゲームでＡが勝った後に最終的に Ａ が破産する確率は$\dfrac{1}{1+\alpha}P_{k+1}$ 、次のゲームでＢが勝った後に最終的に Ａ が破産する確率は$\dfrac{\alpha}{1+\alpha}P_{k-1}$ である。また、次のゲームはＡが勝つかＢが勝つかいずれか。以上から、

$$P_0=1$$

$$P_k=\frac{1}{1+\alpha}P_{k+1}+\frac{\alpha}{1+\alpha}P_{k-1} \quad (k=1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot,\ N-1)$$

$$P_N=0$$

これを解いて P_k を求める。（両端が定まった有限個の漸化式）

以下、この漸化式を解く。

上記 P_k 式の両辺に $1+\alpha$ を乗じると、

$$(1+\alpha)P_k=P_{k+1}+\alpha P_{k-1}$$

変形すると、

$$P_{k+1}-P_k=\alpha(P_k-P_{k-1})$$

これから、

$$P_k-P_{k-1}=\alpha^{k-1}(P_1-P_0)$$

$$P_{k-1}-P_{k-2}=\alpha^{k-2}(P_1-P_0)$$

・・・・・

$$P_1 - P_0 = (P_1 - P_0)$$

辺々加えると、

$$P_k - P_0 = (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \cdots + \alpha + 1)(P_1 - P_0) \qquad \cdots ①$$

変形すると、

$$P_k - P_0 = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}(P_1 - P_0)$$

（$\alpha \neq 1$ なので、等比級数の和を用いた）

$P_0 = 1$　を代入すると、

$$P_k - 1 = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}(P_1 - 1) \qquad \cdots ②$$

$k = N$　とすると、

$$P_N - 1 = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}(P_1 - 1)$$

$P_N = 0$　を代入すると、

$$\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}(P_1 - 1) = -1$$

変形する。

$$\frac{P_1 - 1}{1-\alpha} = -\frac{1}{1-\alpha^N} \qquad \cdots ③$$

②③より、$P_k - 1 = -\dfrac{1-\alpha^k}{1-\alpha^N}$

$k = n$　とすると、

$$P_n = 1 - \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha^N} = \frac{\alpha^n - \alpha^N}{1-\alpha^N}$$

（参考）この問題では $\alpha \neq 1$　としたが、$\alpha = 1$　の場合は、１回のゲームで、Ａ 、Ｂ の勝つ確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$となる。その場合、①までは上記と同じであるが、そこから先が以下のとおりとなる。

$$P_k - P_0 = k(P_1 - P_0)$$

$P_0 = 1$　を代入すると、$P_k - 1 = k(P_1 - 1) \qquad \cdots ④$

$k = N$　とすると、$P_N - 1 = N(P_1 - 1)$

$P_N = 0$　を代入すると、$N(P_1 - 1) = -1$　変形して　$P_1 - 1 = -\dfrac{1}{N} \qquad \cdots ⑤$

④⑤より、$P_k = 1 - \dfrac{k}{N}$

$k = n$　とすると、

$$P_n = 1 - \frac{n}{N}$$

「以下、この漸化式を解く」以降は、漸化式の典型的な解法の一つ。隣り合う３項の漸化式なので、少なくとも２項が既知である必要がある。ここでは、第０項と第N項が既知である。他にも、漸化式の典型的な解法は何種類かある。

漸化式の解き方の基本（ d, r, s は定数とする）

① $P_k = P_{k-1} + d$ $\Rightarrow$ $P_k = P_0 + kd$

② $P_k = r\,P_{k-1}$ $\Rightarrow$ $P_k = r^k\,P_0$

③ $P_k = r\,P_{k-1} + d$ $\Rightarrow$ $P_k - \alpha = r\left(P_{k-1} - \alpha\right)$ の形に変形して、②に帰着

④ $P_k = r\,P_{k-1} + s\,P_{k-2}$ $\Rightarrow$ $P_k + \alpha\,P_{k-1} = \beta\left(P_{k-1} + \alpha\,P_{k-2}\right)$ の形に変形して、②に帰着

これらの応用として、ある関数 f を取って $Q_k = f(P_K)$ と置き、Q_k に対して、上記の基本を適用する場合もある。例えば、$Q_k = \dfrac{1}{P_k}$ である。

漸化式を解くのはそれなりの時間がかかるが、チェックは容易に出来る。本問で言えば、nに０またはNを代入して、$P_0 = 1$、$P_N = 0$ であることを確認し、次に、

$P_k = \dfrac{1}{1+\alpha}P_{k+1} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}P_{k-1}$ の右辺に得られた答えを代入する。すなわち、

$$\frac{1}{1+\alpha}P_{k+1} + \frac{\alpha}{1+\alpha}P_{k-1} = \frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{\alpha^{k+1} - \alpha^N}{1-\alpha^n} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{\alpha^{k-1} - \alpha^N}{1-\alpha^N}$$

$$= \frac{\alpha^{k+1} + \alpha^k - \alpha^{N+1} - \alpha^N}{(1+\alpha)\cdot\left(1-\alpha^N\right)} = \frac{(1+\alpha)\cdot\alpha^k - (1+\alpha)\cdot\alpha^N}{(1+\alpha)\cdot\left(1-\alpha^N\right)} = \frac{\alpha^k - \alpha^N}{1-\alpha^N} = P_k$$

問題 1 (3)

サイコロを 5 回投げる中で、1 の目が連続して 2 回以上出る確率は $\boxed{}$ である。
また、サイコロを 5 回投げる中で、同じ目が連続して 2 回以上出る確率は $\boxed{}$ である。

[解答例]

離散的な確率を求める問題である。素朴で易しい問題ではあるが、前半と後半では異なるアプローチとなるところが落とし穴である。そのためか、前半・後半共に正解したものにくらべ、どちらか一方のみ正解したものが多かった。

(前半) 1 の目が出ることを①、1 の目以外が出ることを×、いずれの目が出てもよいことを？で表すものとする。
サイコロを 5 回投げる中で 1 の目が連続して 2 回以上出るのは、

①①？？？
×①①？？
？×①①？
？？×①①　(ただし、①①×①①は、①①？？？ と重複するので除く)

の場合があり、それぞれの確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times1\times1$$

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times1$$

$$1\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1$$

$$1\times1\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times1\times1+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times1+1\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1+1\times1\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{751}{7776}=0.0966$$

(後半) サイコロを 5 回投げる中で「同じ目が連続して 2 回以上出ること」の余事象は「2 回目以降において前回の目と同じ目が出ないこと」であり、余事象の確率は、

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{625}{1296}$$

したがって、求める確率は、

$$1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}\ (=0.5177)$$ である。

前半と後半から、「連続して出現する目が 2 種類ある確率」は、$\frac{751}{7776}\times6-\frac{671}{1296}=\frac{5}{81}=0.0617$ となる。

問題 1 (4)

X_1 , X_2 , X_3 を、互いに独立でそれぞれ区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする。 このとき、確率 $P\left(X_1 + X_2{}^2 + X_3 < 1\right) = \boxed{}$ である。

[解答例]

分布の和を求める問題である。3つ確率変数の和の分布を直接求めることは、2つ確率変数の和の分布を求めるのに比べ格段に複雑になる。したがって、

$$Y = X_1 + X_3$$

$$Z = X_2{}^2$$

のそれぞれの分布を求め、その後 $Y + Z < 1$ となる確率を求めることとする。

$Y \geq 0$, $Z \geq 0$ だから、$Y < 1$, $Z < 1$ の部分のみ考えればよい。

$Y = X_1 + X_3$ の確率密度関数を $f(y)$ とすると、$0 \leq y < 1$ において、$f(y) = y$ (*)詳細は後記

$Z = X_2{}^2$ の分布関数を $G(z)$ とすると、$0 \leq z < 1$ において、$G(z) = \sqrt{z}$ (**)詳細は後記

とする。(Z の確率密度関数を $g(z)$ とする。)

確率変数 $U = Y + Z$ の確率密度関数は、 $k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(u - y)dy$

$y < 0$ ならば $f(y) = 0$
$u - y < 0$ ならば $g(u - y) = 0$
これを反映すると、$0 \leq u < 1$ の範囲で、

$$k(u) = \int_0^u f(y) \cdot g(u - y)dy = \int_0^u y \cdot g(u - y)dy = -\Big[\ y \cdot G(u - y)\ \Big]_{y=0}^{y=u} + \int_0^u G(u - y)dy$$

$$= -\Big[\ y\sqrt{u - y}\ \Big]_{y=0}^{y=u} + \int_0^u \sqrt{u - y}\,dy = -\frac{2}{3}\Big[\ (u - y)^{3/2}\ \Big]_{y=0}^{y=u} = \frac{2}{3}u^{3/2}$$

$$\mathrm{P}\left(X_1 + X_2{}^2 + X_3 < 1\right) = \mathrm{P}(Y + Z < 1) = \int_0^1 k(u)du = \frac{2}{3}\int_0^1 u^{3/2}du = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\Big[\ u^{5/2}\ \Big]_{u=0}^{u=1} = \frac{4}{15} = 0.2667$$

一般に、連続的確率変数X,Yが<u>互いに独立</u>でそれぞれ　$f(x)$, $g(y)$　なる確率密度関数をもつとき、確率変数　$X+Y$　の確率密度関数は、$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\cdot g(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot g(x-y)dy$　で与えられる。

(*)　確率変数　X_1 , X_2 , X_3　の確率密度関数は、それぞれ

$h_1(x_1)=1$, $h_2(x_2)=1$, $h_3(x_3)=1$　　　$(0\le x_1$, x_2 , $x_3\le 1)$

$h_1(x_1)=0$, $h_2(x_2)=0$, $h_3(x_3)=0$　　　(その他)

$0\le y<1$ の場合、$f(y)=\int_{\infty}^{\infty} h_1(y-u)\cdot h_2(u)du=\int_0^y du=\Big[\ u\ \Big]_{u=0}^{u=y}=y$

(**)　$G(z)=P\left(0\le {x_2}^2<z\right)=P\left(0\le x_2<\sqrt{z}\right)=\sqrt{z}$

問題 1 (5)

100 個のデータ数値の合計をとることを考える。個々のデータについて、小数点以下を四捨五入して合計する場合と、小数点以下を五捨六入して合計する場合の差の絶対値が α を超えない確率が 0.95 以上となるような最小の整数 α を、中心極限定理を用いて求めると、$\alpha=\boxed{}$ である。

[解答例]

中心極限定理を用いる近似の問題である。

中心極限定理

$X_1, X_2, X_3, \cdots$ が互いに独立な確率変数ですべて同じ分布（平均 μ、標準偏差 σ が存在する場合）にしたがうとき、確率変数 $X=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ （平均 0、分散 1 となる） は、

すべての x に対して、$n\to\infty$ のとき、$G(x)\to F(x)$ となる。

ここで、$G(x)$ は確率変数 X の分布関数、$F(x)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数。

拡張された中心極限定理

なお、$X_1, X_2, X_3, \cdots$ は必ずしも同じ分布でなくとも、互いに独立で、それぞれが平均 μ_k、分散 ${\sigma_k}^2$ を持っている場合、特別な場合（興味があれば、インターネット等で調べること）を除き、確率変数

$X=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2+\cdots+{\sigma_n}^2}}$ （平均 0、分散 1 となる） は、すべての x に対して、$n\to\infty$ のとき、$G(x)\to F(x)$ となる。

題意からデータ数値は非負値とする。(非負値に限らないとした場合は後に記す。)

k 番目のデータ数値の整数部分を a_k、小数部分を b_k とする。

また、端数処理後の数値を、四捨五入の場合を $A_k(4/5)$、五捨六入の場合を $A_k(5/6)$ とする。

ここに、

$b_k\in[0, 0.5)$ のとき、　$A_k(4/5)=A_k(5/6)=a_k$

$b_k\in[0.5, 0.6)$ のとき、　$A_k(4/5)=a_k+1$, $A_k(5/6)=a_k$

$b_k\in[0.6, 1)$ のとき、　$A_k(4/5)=A_k(5/6)=a_k+1$

となる。

k 番目のデータ数値の端数処理後の差、$A_k(5/6)-A_k(4/5)$ を X_k とすると、

$$X_k=\begin{cases}1 & \cdots b_k\in[0.5, 0.6)\\ 0 & \cdots b_k\in[0, 0.5)\cup[0.6, 1)\end{cases}$$

b_k は $[0,1)$ 上の一様分布に従うので、

$$P(b_k \in [0.5, 0.6)) = \frac{1}{10}$$

以上より、X_k は 0 または 1 の値をとる確率変数で、

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{10}$$

$$P(X_k = 0) = \frac{9}{10}$$

となる。

$$E(X_k) = 1 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$V(X_k) = \left(1^2 \times \frac{1}{10} + 0^2 \times \frac{9}{10}\right) - \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}$$

さて、100 個のデータ数値の合計をとることを考える。個々のデータについて、小数点以下四捨五入して合計する場合と、小数点以下五捨六入して合計する場合の差の絶対値を Y とすると、

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots X_{100}$$

と表わせる。

中心極限定理より、

$$Z = \frac{Y - 100 \times \frac{1}{10}}{\sqrt{100} \times \sqrt{\frac{9}{100}}} = \frac{Y-10}{3}$$

は、近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

従って、題意より、

$$P(Y < \alpha) = P\left(\frac{Y-10}{3} < \frac{\alpha - 10}{3}\right) \geq 0.95$$

ここで、付表より、$u(0.05) = 1.645$ だから、

$$\frac{\alpha - 10}{3} \geq 1.645$$

$$\therefore \alpha \geq 14.935$$

したがって、最小の整数 α は 15 である。

データ数値が非負値であることが、問題文では必ずしも明確ではなかった。したがって、データ数値が負値もあり得るとして求めたもの（9名）も正解とした。

以下、その場合の解答を示す。

k 番目のデータ数値 A_k の整数部分を a_k 、小数部分を b_k とする。
また、端数処理後の数値を、四捨五入の場合を $A_k(4/5)$ 、五捨六入の場合を $A_k(5/6)$ とする。

(a) $A_k \geq 0$ のとき

$b_k \in [0, 0.5)$ のとき、　$A_k(4/5) = A_k(5/6) = a_k$

$b_k \in [0.5, 0.6)$ のとき、　$A_k(4/5) = a_k + 1$, $A_k(5/6) = a_k$

$b_k \in [0.6, 1)$ のとき、　$A_k(4/5) = A_k(5/6) = a_k + 1$

となる。

k 番目のデータ数値の端数処理後の差、$A_k(4/5) - A_k(5/6)$ を X_k とすると、

$$X_k = \begin{cases} 1 & \cdots b_k \in [0.5, 0.6) \\ 0 & \cdots b_k \in [0, 0.5) \cup [0.6, 1) \end{cases}$$

b_k は $[0, 1)$ 上の一様分布に従うので、

$$P(b_k \in [0.5, 0.6)) = \frac{1}{10}$$

以上より、X_k は 0 または 1 の値をとる確率変数で、

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{10}$$

$$P(X_k = 0) = \frac{9}{10}$$

となる。

(b) $A_k < 0$ のとき（b_k, a_k は非正値）

$b_k \in (-0.5\ ,\ 0]$ のとき、　$A_k(4/5) = A_k(5/6) = a_k$

$b_k \in (-0.6, -0.5]$ のとき、　$A_k(4/5) = a_k - 1$, $A_k(5/6) = a_k$

$b_k \in (-1\ , -0.6]$ のとき、　$A_k(4/5) = A_k(5/6) = a_k - 1$

となる。

k 番目のデータ数値の端数処理後の差、$A_k(4/5) - A_k(5/6)$ を X_k とすると、

$$X_k = \begin{cases} -1 & \cdots b_k \in (-0.6\ ,\ -0.5] \\ 0 & \cdots b_k \in (-1\ , -0.6] \cup (-0.5\ ,\ 0] \end{cases}$$

b_k は $(-1\ ,\ 0]$ 上の一様分布に従うので、

$$P(b_k \in (-0.6\ ,\ -0.5]) = \frac{1}{10}$$

以上より、X_k は 0 または－1 の値をとる確率変数で、

$P(X_k=-1)=\dfrac{1}{10}$

$P(X_k=0)=\dfrac{9}{10}$

$P\left(A_k \geq 0\right)=P\left(A_k<0\right)=0.5$ とするのが自然であるので、

(a) (b) より、X_k は $-1, 0, 1$ の値をとる確率変数で、

$$P(X_k=-1)=P(A_k<0)\cdot P(b_k \in (-0.6\,,-0.5])=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$$

$$P(X_k=1)=P(A_k \geq 0)\cdot P(b_k \in [0.5, 0.6))=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$$

$$P(X_k=0)=\frac{9}{10}$$

となる。

さて、100 個のデータ数値の合計をとることを考える。個々のデータについて、小数点以下四捨五入して合計する場合と、小数点以下五捨六入して合計する場合の差を Y とすると、

$$Y=X_1+X_2+\cdots X_{100}$$

と表わせる。

$$E(X_k)=1\times\frac{1}{20}+(-1)\times\frac{1}{20}+0\times\frac{9}{10}=0$$

$$V(X_k)=\left\{1^2\times\frac{1}{20}+(-1)^2\times\frac{1}{20}+0^2\times\frac{9}{10}\right\}-0^2=\frac{1}{10}$$

であるので、中心極限定理より、

$$Z=\frac{Y-0}{\sqrt{100}\times\sqrt{\frac{1}{10}}}=\frac{Y}{\sqrt{10}}$$

は、標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

従って、題意より、差の絶対値が α を超えない確率が 0.95 以上であるための条件は

$$P(-\alpha<Y<\alpha)=P(-\frac{\alpha}{\sqrt{10}}<\frac{Y}{\sqrt{10}}<\frac{\alpha}{\sqrt{10}})\geq 0.95$$

ここで、付表より、$u(0.025)=1.960$ だから、

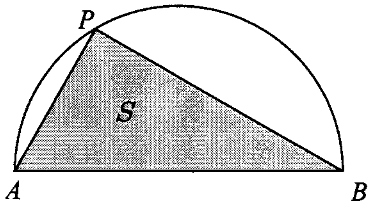
$$\frac{\alpha}{\sqrt{10}}\geq 1.960$$

$$\therefore \alpha \geq 6.198$$

したがって、最小の整数 α は 7 である。

問題 1 (6)

右図のような半径 1 の半円周 $\widehat{AB}$ 上に点 P を無作為に選ぶ。

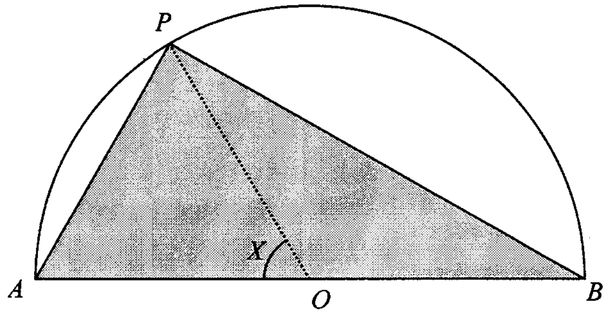


このとき、三角形 APB の面積 S の確率密度関数 $f(s)$ は、

$f(s)=\boxed{}$ $(0<s<1)$ である。

［解答例］

確率密度関数の計算問題である。三角関数と微分の知識を要する。



半円の中心をOとして、$\angle AOP$ を表す確率変数をXとおくと、Xは、$(0\,,\,\pi)$ 上の一様分布に従う。

すなわち、確率密度関数を $g(x)$ とおくと、$g(x)=\dfrac{1}{\pi}$ $(0<x<\pi)$

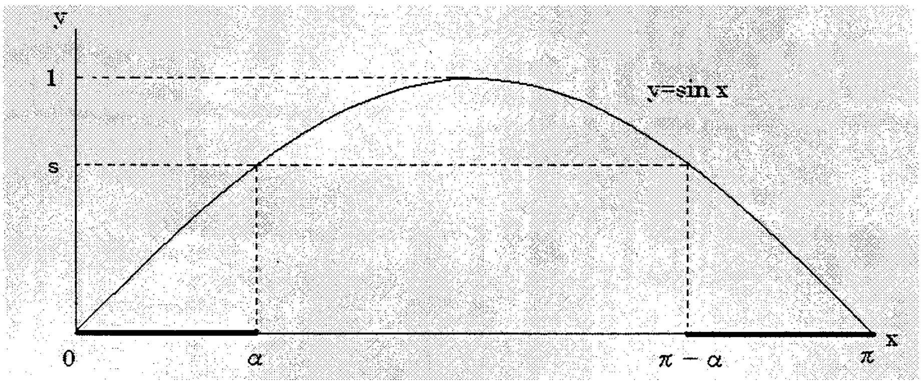
三角形 APB の面積を表す確率変数を S とすると、$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin X=\sin X$

確率変数 S の確率密度関数 $f(s)$ を求める。

まず、分布関数$F(s)$を求める。

$0<s<1$として、$s=\sin\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおけば、

$S\leq s$となるのは、下図のように、$0<X<\alpha,\ \pi-\alpha<X<\pi$ のときであるから、



$P(S \le s) = \dfrac{2\alpha}{\pi}$　　（ここで、$s = \sin\alpha$ ， $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ ）

したがって、$F(s) = P(S \le s) = \begin{cases} 1 & (s \ge 1) \\ \dfrac{2\alpha}{\pi} & (0 < s < 1) \\ 0 & (s \le 0) \end{cases}$

求める $f(s)$ は、$F(s)$ を s で微分すればよい。$0 < s < 1$ で、$f(s) = F'(s) = \dfrac{d}{ds} \cdot \dfrac{2\alpha}{\pi} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{d\alpha}{ds}$

ここに、$\dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{1}{\dfrac{ds}{d\alpha}} = \dfrac{1}{\dfrac{d\sin\alpha}{d\alpha}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

したがって、$f(s) = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$　　$(0 < s < 1)$

三角関数の主な公式

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$　　$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$　　$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$　　$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$　　$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$　　$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$　　$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

三角形の３辺の長さをa,b,c、対角の大きさをそれぞれA,B,C、三角形の外接円の半径をRとするとき、

正弦定理　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$　　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

加法定理　$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$　　特に、$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

（複号同順）　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$　　特に、$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$　　特に、$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

三角関数の微分

$\frac{d}{d\theta}\sin\theta=\cos\theta$　　$\frac{d}{d\theta}\cos\theta=-\sin\theta$　　$\frac{d}{d\theta}\tan\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

問題2. 統計分野において、基礎的と思われる問題を出題した。(1)～(5)に各5点を配点したが、受験者の平均点は(1)が最も高く、次いで(2) (3)、かなり差があって(4) (5)の順であった。

(1)	$a=$	1
	$b=$	$\frac{3}{2}$ (または、1.5)
	$V(Y)=$	$\frac{\sigma^2}{2}$
(2)		34
(3)	$E(X_{(1)})=$	$\frac{16}{35}$ (または、0.4571)
	$E(X_{(2)})=$	$\frac{24}{35}$ (または、0.6857)
	$E(X_{(3)})=$	$\frac{6}{7}$ (または、0.8571)
(4)		20
(5)	$a=$	1
	$b=$	16
	$c=$	31

問題２(1)

正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から標本 X_1, X_2 をとる。μ の推定量 $Y=a\cdot\dfrac{X_1}{2}+b\cdot\dfrac{X_2}{3}$ が有効推定量ならば、 $a=\boxed{}$ 、$b=\boxed{}$ であり、そのときの Y の分散は、 $V[Y]=\boxed{}$ である。

［解答］

問題の意味を噛み砕くと以下のとおり。

もとの集合（母集合）は、実数全体からなる。その母集合において。各々の実数の出現確率は、平均を μ 、分散を σ^2 とする正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う（正規母集団)。そこから、２つの実数を互いに独立に取り出す。

その２つの実数の一次結合（それぞれを実数倍して加えたもの）から、正規母集団の平均（母平均）μ を推定する方法を考える。

一般化するために、取り出す実数をそれぞれ確率変数で表す。一方を X_1 、もう一方を X_2 とする。

一般に、実現値を表す互いに独立な確率変数の集まりを標本変量という。標本変量（の各要素）の関数として作られた確率変数を統計量とよび、とくにこれが（・・・を）推定する目的に用いられるとき（・・・の）推定量とよぶ。(・・・は例えば母平均や母分散など)

この問題では、X_1, X_2 の一次結合 $Y=c\cdot X_1+d\cdot X_2$ で μ を推定する。(Y は μ の推定量)。

($\dfrac{1}{2}$ や $\dfrac{1}{3}$ にとくに意味がないので、$Y=c\cdot X_1+d\cdot X_2$ と置いた。)

ここで、X_1 や X_2 は正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から選ばれるが、実際（実現値）はどんな実数になるかわからない。実現値がわからない中で、μ を推定するアルゴリズム、具体的には係数 c と係数 d を求めよという問題である。

推定量はいくらでも存在し得る。 推定量も確率変数であるから、その分布を考えることが出来るが、「推定量の平均」から「推定すべき対象」を引いたものを Bias といい、Bias が 0 となるような推定量を不偏性がある（不偏推定量）という。不偏推定量も必ずしもひとつには定まらない。 不偏推定量の中で、推定量の分布の分散が最小となるものがもしあれば、その推定量は有効性がある（有効推定量）という。

$E[c\cdot X_1+d\cdot X_2]=c\cdot E[X_1]+d\cdot E[X_2]=c\cdot E[X]+d\cdot E[X]=(c+d)\cdot E[X]=(c+d)\cdot\mu$

（X_1 , X_2 は確率変数Xの実現値（標本変量）なので、確率変数としてはXそのもの）

Yはμの不偏推定量でもあるから、$(c+d)\cdot\mu=\mu$

したがって、$c+d=1$

Yはμの有効推定量であるから、

$V[c\cdot X_1+d\cdot X_2]=c^2\cdot V[X_1]+d^2\cdot V[X_2]=c^2\cdot V[X]+d^2\cdot V[X]=(c^2+d^2)\cdot V[X]=(c^2+d^2)\cdot\sigma^2$
で、$c+d=1$ いう条件の下で、c^2+d^2 が最小となる。

$2(c^2+d^2)=(c+d)^2+(c-d)^2=1+(c-d)^2$

だから、これが最小となるのは、$c=d=\dfrac{1}{2}$ となる場合。

したがって、

$a=1$

$b=\dfrac{3}{2}$

$V[Y]=\dfrac{\sigma^2}{2}$

この問題は、正規母集団でなくとも、有限の平均と分散を持つ母集団であれば同じ結果となる。

また、$\dfrac{1}{2}$や$\dfrac{1}{3}$にとくに意味はない。$Y=c\cdot X_1+d\cdot X_2$ として考えればよい。

もっとも、この式を見ると、あきらかに $c>d$ や $c<d$ となるはずもなく、

$c=d=\dfrac{1}{2}$ となるのは当然である。

問題 2 (2)

X が正規母集団　$N(\mu,\sigma^2)$　からの標本であるとき、仮説 $H_0:\mu=\mu_0=165$ を、

対立仮説　$H_1:\mu=\mu_1=172$　に対して検定したい。　いま、$\sigma=11$ はわかっており、かつ対立仮説

H_1 が真であるとき、H_0 を採択する（第 2 種の誤りをおかす）確率が 2%以下になるようにするには、

標本数 n は $\boxed{}$ 以上あればよい。ただし、有意水準は 0.05 とする。（自然数で答えよ）

［解答］

統計の問題に慣れていない人がこれを読むと、問題が何を言いたいのかさっぱりわからないであろう。問題の意味を噛み砕くと以下のとおり。

正規母集団　$N(\mu,11^2)$　の母平均 μ を、第一候補（仮説）165、第二候補（対立仮説）172 があるなかで、n 個の標本の標本平均を用いて、第一候補（仮説）165 が正しいかどうかを有意水準 0.05 で検定せよ。

a．検定方式の決定

もしも、仮説　$\mu=165$　が正しいとすれば、標本変量平均 $\overline{X}$ の分布は、$N\left(165,\dfrac{11^2}{n}\right)$

対立仮説は $\mu=165$　より大きいから、標本平均の実現値　$\bar{x}$　が、$N\left(165,\dfrac{11^2}{n}\right)$ の右側 5%点以下

つまり、$\bar{x}<165+u(0.05)\dfrac{11}{\sqrt{n}}$　ならば仮説　$\mu=165$ を採択する。ここで、$u(0.05)$　は標準正規分布の上側 5%点（付表より 1.645)。

b．決定した検定方式の評価

実際は、対立仮説　$\mu=172$　が正しいにもかかわらず、a. で決定した検定方式に従って検定を行った結果、仮説 $\mu=165$ を採択してしまう確率を 2%以下に押さえ込むためには、標本数 n を何個以上にすればよいか（標本数は多ければ多いほうが正確な検定が出来る)。

正しくは母集団が　$N(172,11^2)$　であるので、標本変量平均 $\overline{X}$ の分布は、　$N\left(172,\dfrac{11^2}{n}\right)$　であった。a．から、$\mu=165$ を採択するのは、$\bar{x}\le 165+1.645\dfrac{11}{\sqrt{n}}$　の場合。その確率を 2%以下に押さえ込む。

$$P\left(\overline{X} \leq 165 + 1.645\frac{11}{\sqrt{n}}\right) \leq 0.02$$

$$\text{左辺} = P\left(\frac{\overline{X}-172}{11/\sqrt{n}} \leq \frac{(165-172)+1.645\,11/\sqrt{n}}{11/\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{\overline{X}-172}{11/\sqrt{n}} \leq 1.645 - \frac{7}{11/\sqrt{n}}\right)$$

これが 0.02 以下となるためには、 $\dfrac{\overline{X}-172}{11/\sqrt{n}}$ は標準正規分布に従うので、

$1.645 - \dfrac{7}{11/\sqrt{n}}$ が標準正規分布の下側 2%点（付表より-2.054）以下とならなければならない。

$$1.645 - \frac{7}{11/\sqrt{n}} \leq -2.054$$

これを変形する。

$$3.699 \leq \frac{7}{11/\sqrt{n}}$$

$$3.699 \times \frac{11}{7} \leq \sqrt{n}$$

$$\left(3.699 \times \frac{11}{7}\right)^2 \leq n$$

$$33.7876 \leq n$$

標本数 n は　34　以上あればよい。

問題 2 (3)

X_1 , X_2 , X_3 を確率変数 X からの標本とし、 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)}$ をその順序統計量とする。X の確率密度関数 $f(x)$ が、 $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 < x \le 1) \\ 0 & (その他) \end{cases}$ で与えられるとき、 $E[X_{(1)}] =$ $\boxed{}$ 、 $E[X_{(2)}] =$ $\boxed{}$ 、 $E[X_{(3)}] =$ $\boxed{}$ である。

［解答］

X の分布関数を $F(x)$、$X_{(n)}$ の分布関数を $F_{X(n)}(x)$、確率密度関数を $f_{X(n)}(x)$ とすると、

$$F(x) = \int_0^x 2x dx = x^2 \qquad (0 \le x \le 1)$$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \Big[x \cdot F(x) \Big]_0^1 - \int_0^1 F(x) dx = 1 - \int_0^1 x^2\, dx = 1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \qquad \cdots ①$$

$$1 - F_{X(1)}(x) = \{P(X > x)\}^3 = \{1 - F(x)\}^3 = (1 - x^2)^3$$

$$\therefore F_{X(1)}(x) = 1 - (1 - x^2)^3$$

$$E(X_{(1)}) = \int_0^1 x \cdot f_{X(1)}(x) dx = \left[x \cdot F_{X(1)}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 F_{X(1)}(x) dx = \int_0^1 (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) dx$$

$$= \left[x - x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \right]_0^1 = 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35} \qquad \cdots ②$$

$$F_{X(3)}(x) = \{P(X \le x)\}^3 = \{F(x)\}^3 = (x^2)^3 = x^6$$

$$E(X_{(3)}) = \int_0^1 x \cdot f_{X(3)}(x) dx = \left[x \cdot F_{X(3)}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 F_{X(3)}(x) dx = 1 - \int_0^1 x^6\, dx = 1 - \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{6}{7} \qquad \cdots ③$$

①②③より、

$$E(X_{(1)}) + E(X_{(2)}) + E(X_{(3)}) = E(X_{(1)} + X_{(2)} + X_{(3)}) = 3E(X) = 2$$

$$E(X_{(2)}) = 3E(X) - E(X_{(1)}) - E(X_{(3)}) = 2 - \frac{16}{35} - \frac{6}{7} = \frac{24}{35}$$

問題 2 (4)

分散の片側検定において、真の分散が帰無仮説において仮定された分散の3倍になったとき、帰無仮説が確率95%以上で棄却されるようにするには標本数が $\boxed{}$ 個以上あればよい。ただし、平均は未知とし、有意水準は0.05とする。

［解答］

標本数 n が大きいことが予想されるため、近似分布を用いて考えることができる。

近似分布として、正規母集団を前提に考える。

帰無仮説として与えられた分散を $\sigma_0{}^2$ とおくとき、真の分散を $3\sigma_0{}^2$ とする。

一般に、母平均が未知で母分散が σ^2 の正規母集団からの標本数 n の標本分散を S^2 とおけば、

$\dfrac{nS^2}{\sigma^2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{X_k-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$ は、$n-1$ 次の χ^2-分布に従う。

a．検定方式の決定

母分散 σ^2 を、第一候補（帰無仮説）$\sigma_0{}^2$ 、第二候補（対立仮説）$3\sigma_0{}^2$ があるなかで、第一候補（帰無仮説）$\sigma_0{}^2$ が正しいかどうかを有意水準 0.05 で検定する。（片側検定）

帰無仮説 $\sigma_0{}^2$ は、 得られた標本平均 s^2 が、 $\dfrac{ns^2}{\sigma_0{}^2}>\chi_{n-1}{}^2(0.05)$ のとき棄却される。

b．決定した検定方式の評価

確率 95%以上で棄却される $P\left(\dfrac{nS^2}{\sigma_0{}^2}>\chi_{n-1}{}^2(0.05)\right)\geq 0.95$ ように、標本数 n を求める。

実際は、対立仮説 $\mu=3\mu_0{}^2$ が正しい。 $\dfrac{nS^2}{3\sigma_0{}^2}$ が、$n-1$ 次の χ^2-分布に従う。したがって、

$P\left(\dfrac{nS^2}{3\sigma_0{}^2}>\chi_{n-1}{}^2(0.95)\right)=0.95$ である。

$3\chi_{n-1}{}^2(0.95)=\chi_{n-1}{}^2(0.05)$ となる n を見出せば、条件を満たす標本数の下限となる。

これを χ^2 表より見出せば

$\chi_{18}{}^2(0.95)=9.390$ $\chi_{18}{}^2(0.05)=28.869$ $\dfrac{\chi_{18}{}^2(0.05)}{\chi_{18}{}^2(0.95)}=3.074$

$\chi_{19}{}^2(0.95)=10.117$ $\chi_{19}{}^2(0.05)=30.144$ $\dfrac{\chi_{19}{}^2(0.05)}{\chi_{19}{}^2(0.95)}=2.980$

より、$n-1\geq 19$

標本数は、20 個以上あればよい。

問題 2(5)

1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 を、不連続な区間 $[a,b]\cup[c,32]$ 上の一様な分布からの標本とするとき、母数 a , b および c の最尤推定量は、それぞれ、$\boxed{}$ 、$\boxed{}$ 、$\boxed{}$ である。ただし、a , b , c はいずれも整数で、 $a<b<c<32$ とする。

［解答］

問題文の「最尤推定量」は「最尤推定値」とすべきであった。ただし、誤解することはないであろう。

確率密度関数は、 $f(x)=\dfrac{1}{32-a+b-c}\quad (x\in([a,b]\cup[c,32]))$

尤度関数は、 $L=\prod_{i=1}^{6}f(x)=\left(\dfrac{1}{32-a+b-c}\right)^{6}$

L を最大にするのが最尤推定量。そのためには、$[a,b]\cup[c,32]$ に、1, 2, 4, 8, 16, 32 のすべてが属する条件のもとで、 $32-a+b-c$ を最小にする整数 a , b , c を求めればよい。

最小の標本値は 1 である。

従って、 $a\le 1$ である。$a\le 1$ なる条件の下で、$32-a+b-c$ を最小にする a は 1 である。

従って、 $a=1$ 。

$1<b<c<32$ の条件の下で、 $32-a+b-c=31-(c-b)$ を最小にするには、

$2\le b<c\le 31$ の条件の下で、 $c-b$ を最大にしなければならない。

2 と 4 の間隔は 2、4 と 8 の間隔は 4、8 と 16 の間隔は 8、16 と 31 の間隔は 15 であるから、

$b=16$, $c=31$ とすると、$c-b=15$ が $c-b$ を最大にする。

したがって、$a=1$, $b=16$, $c=31$ となる。

問題3　確率分野より出題した。

確率変数 X と確率変数 Y は互いに独立で、X は平均 λ のポアソン分布に従い、Y は平均 λ の指数分布に従うものとする。ここに、λ は正の定数とする。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1)　X の積率母関数 $M_X(\theta)$ 、および Y の積率母関数 $M_Y(\theta)$ を求めよ。

［解答例］

代表的な分布の確率関数（離散型分布の場合）分布や確率分布関数（連続型分布の場合）は書けるようにしておくこと。この問題は、確率関数や確率分布関数から積率母関数を求めよという問題である。積率母関数を勉強していれば必ず解いている問題であり、受験者の出来はよかった。ただし、いきなり答のみが書いてある答案もいくつかあったが、「求めよ」という問題であるので、計算過程がわからないものには点をほとんど与えなかった。

確率変数 X は平均 λ のポアソン分布（離散型分布）に従うので、

その確率関数は、$f(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$　　$(x=0,1,2,\cdots$ で定義$)$

その積率母関数　$M_X(\theta)$　は、

$$M_X(\theta)=\sum_{x=0}^{\infty}\left\{e^{x\theta}f(x)\right\}=\sum_{x=0}^{\infty}\left\{e^{x\theta}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right\}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{\theta}\right)^x}{x!}=e^{-\lambda}\cdot\exp(\lambda e^{\theta})=\exp\left(\lambda\left(e^{\theta}-1\right)\right)$$

確率変数 Y（連続型分布）は平均 λ の指数分布に従うので、

その確率密度関数は、$g(y)=\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}$　　$(y\geq 0$ で定義$)$

その積率母関数　$M_Y(\theta)$　は、

$$M_Y(\theta)=\int_0^{\infty}e^{y\theta}g(y)dy=\int_0^{\infty}e^{y\theta}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}dy=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}\exp\left(\left(\theta-\frac{1}{\lambda}\right)y\right)dy$$

$$=\frac{1}{\lambda\left(\theta-\dfrac{1}{\lambda}\right)}\left[\exp\left(\left(\theta-\frac{1}{\lambda}\right)y\right)\right]_{y=0}^{y=\infty}=-\frac{1}{\lambda\left(\theta-\dfrac{1}{\lambda}\right)}=\frac{1}{1-\lambda\theta}$$

（ただし、上記の積分が収束し、積率母関数 $M_Y(\theta)$ が存在するのは、$\theta-\dfrac{1}{\lambda}<0$ であるときのみ。

ここで、λ は正の定数であるから、$M_Y(\theta)$　は、原点　$\theta=0$　の近傍で存在する。積率母関数は原点の近傍で存在すれば十分である。）

（　　）内について、何らかの記述がない場合は減点した。

$M_X(\theta)$ の計算の中で、 $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{\theta}\right)^x}{x!}=\exp(\lambda e^{\theta})$ となることを用いた。

これは、 e^z のべき級数展開（テイラー展開） $e^z=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ （すべての z に対して成り立つ）に対して、 $z=\lambda e^{\theta}$ を代入したもの。

e^z のべき級数展開を忘れた場合は、 $e^0=1$ と $\dfrac{d}{dz}e^z=e^z$ から、以下のとおり導けばよい。

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
e^z=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}= & 1 & + & z & + & \dfrac{z^2}{2!} & + & \dfrac{z^3}{3!} & + & \dfrac{z^4}{4!} & + & \dfrac{z^5}{5!} & + & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\text{微分}} & \downarrow{\scriptstyle\text{項別微分}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{項別微分}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{項別微分}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{項別微分}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{項別微分}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{項別微分}} & & \\
e^z=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}= & 0 & + & 1 & + & z & + & \dfrac{z^2}{2!} & + & \dfrac{z^3}{3!} & + & \dfrac{z^4}{4!} & + & \cdots
\end{array}$$

ちなみに、主なべき級数展開は以下のとおり。

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
e^z & = & 1 & + & z & + & \dfrac{z^2}{2!} & + & \dfrac{z^3}{3!} & + & \dfrac{z^4}{4!} & + & \dfrac{z^5}{5!} & + & \dfrac{z^6}{6!} & + & \dfrac{z^7}{7!} & + \cdots \\
\log(1+z) & = & & & z & - & \dfrac{z^2}{2} & + & \dfrac{z^3}{3} & - & \dfrac{z^4}{4} & + & \dfrac{z^5}{5} & - & \dfrac{z^6}{6} & + & \dfrac{z^7}{7} & + \cdots \\
\sin z & = & & & z & & & - & \dfrac{z^3}{3!} & & & + & \dfrac{z^5}{5!} & & & - & \dfrac{z^7}{7!} & \cdots \\
\cos z & = & 1 & & & - & \dfrac{z^2}{2!} & & & + & \dfrac{z^4}{4!} & & & - & \dfrac{z^6}{6!} & & & + \cdots
\end{array}$$

一般に、確率変数 X に対して

「原点まわりの第 r 次の積率（moment）」とは、 $\nu_r=E[X^r]$ 　 $(r=0,1,2,\cdots)$

ここで、 $E[Z]$ は、 Z の期待値

明らかに、 $\nu_0=E[\,1\,]=1$ 。 ν_1 は平均。以下、これを μ と書く。

「平均まわりの第 r 次の積率」とは、 $\nu_r'=E\left[\ (X-\mu)^r\ \right]$ 　 $(r=0,1,2,\cdots)$

特に、 ν_2' は分散。これは非負値であり、以下、その平方根（標準偏差）を σ と書く。

明らかに、 $\nu_0'=E[1]=1$ 　 $\nu_1'=E[X-\mu]=0$

「基準化後の第 r 次の積率」とは、 $\alpha_r=E\left[\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^r\right]$ 　 $(r=0,1,2,\cdots)$

基準化後の確率変数 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ の平均は 0、標準偏差は 1

明らかに、すべての分布で、$\alpha_0 = E[1] = 1 \qquad \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = 1$

特に、α_3 を歪度（わいど）という。歪度は分布の平均に対する非対称性を示す尺度で、絶対値が大きいほど非対称性が大きいことを示している。正規分布では、$\alpha_3 = 0$ となる。

また、α_4 を尖度（せんど）という。尖度は分布が平均の回りに集中している度合いを示す尺度で、この値が小さいほど平均の回りに集中している度合いが高いことを示している。正規分布では、$\alpha_4 = 3$ となる。

問題 3（2） X の分布の歪度（わいど）および Y の分布の歪度を求めよ。

［解答例］

一般に、確率変数 X に対し、積率母関数 $M_X(\theta)$ が原点 $\theta = 0$ の近傍で存在するとき、$E[X^k] = M_X^{(k)}(0)$ となる。ここで、k は 1 以上の整数。$M_X^{(k)}(0)$ は、積率母関数 $M_X(\theta)$ を、θ で k 回微分した関数の $\theta = 0$ での値。

$$M_X(\theta) = \exp(\lambda(e^\theta - 1))$$

$$M'_X(\theta) = \frac{d}{d\theta}\{\lambda(e^\theta - 1)\} \times \exp(\lambda(e^\theta - 1)) = \lambda e^\theta \exp(\lambda(e^\theta - 1))$$

$$M''_X(\theta) = \frac{d}{d\theta}\{\lambda e^\theta\} \times \exp(\lambda(e^\theta - 1)) + \lambda e^\theta \frac{d}{d\theta}\exp(\lambda(e^\theta - 1)) = (\lambda^2 e^{2\theta} + \lambda e^\theta)\exp(\lambda(e^\theta - 1))$$

$$M'''_X(\theta) = \frac{d}{d\theta}\{\lambda^2 e^{2\theta} + \lambda e^\theta\} \times \exp(\lambda(e^\theta - 1)) + (\lambda^2 e^{2\theta} + \lambda e^\theta)\frac{d}{d\theta}\exp(\lambda(e^\theta - 1))$$

$$= (2\lambda^2 e^{2\theta} + \lambda e^\theta) \times \exp(\lambda(e^\theta - 1)) + (\lambda^2 e^{2\theta} + \lambda e^\theta) \times \lambda e^\theta \exp(\lambda(e^\theta - 1))$$

$$= (2\lambda^2 e^{2\theta} + \lambda e^\theta + \lambda^3 e^{3\theta} + \lambda^2 e^{2\theta})\exp(\lambda(e^\theta - 1)) = (\lambda^3 e^{3\theta} + 3\lambda^2 e^{2\theta} + \lambda e^\theta)\exp(\lambda(e^\theta - 1))$$

であることより、

$$E[X^3] = M'''_X(0) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$E[X^2] = M''_X(0) = \lambda^2 + \lambda$$

したがって、

$$E\left[\ \{X-E[X]\}^3\right]=E\left[\ (X-\lambda)^3\right]=E\left[X^3-3\lambda X^2+3\lambda^2X-\lambda^3\right]$$

$$=E\left[X^3\right]-3\lambda E\left[X^2\right]+3\lambda^2E[X]-\lambda^3$$

$$=\left(\lambda^3+3\lambda^2+\lambda\right)-3\left(\lambda^2+\lambda\right)\lambda+3\lambda^3-\lambda^3=\lambda$$

$$V[X]=E\left[\ (X-\lambda)^2\right]=E\left[X^2\right]-\lambda^2=\left(\lambda^2+\lambda\right)-\lambda^2=\lambda$$

以上から、X の分布の歪度は、

$$\frac{E\left[\{X-E[X]\}^3\right]}{\{V[X]\}^{3/2}}=\frac{\lambda}{\lambda^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

同様に、

$$M_Y(\theta)=\frac{1}{1-\lambda\theta}$$

$$M_Y'(\theta)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{1-\lambda\theta}\right)=(-1)\frac{1}{(1-\lambda\theta)^2}\frac{d}{d\theta}(1-\lambda\theta)=\frac{\lambda}{(1-\lambda\theta)^2}$$

$$M_Y''(\theta)=\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\lambda}{(1-\lambda\theta)^2}\right\}=(-2)\frac{\lambda}{(1-\lambda\theta)^3}\frac{d}{d\theta}(1-\lambda\theta)=\frac{2\lambda^2}{(1-\lambda\theta)^3}$$

$$M_Y'''(\theta)=\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{2\lambda^2}{(1-\lambda\theta)^3}\right\}=(-3)\frac{2\lambda^2}{(1-\lambda\theta)^4}\frac{d}{d\theta}(1-\lambda\theta)=\frac{6\lambda^3}{(1-\lambda\theta)^4}$$

であることより、

$$E\left[Y^3\right]=M_Y'''(0)=6\lambda^3$$

$$E\left[Y^2\right]=M_Y''(0)=2\lambda^2$$

したがって、

$$E\left[\ \left\{\ Y-E[Y]\right\}^3\right]=E\left[Y^3\right]-3E\left[Y^2\right]E[Y]+3\{E[Y]\}^2E[Y]-\{E[Y]\}^3$$

$$=6\lambda^3-3\times2\lambda^2\times\lambda+3\lambda^3-\lambda^3=2\lambda^3$$

$$V[Y]=E\left[\left\{Y-E[Y]\right\}^2\right]=E\left[Y^2\right]-\{E[Y]\}^2=2\lambda^2-\lambda^2=\lambda^2$$

以上から、Y の分布の歪度は、

$$\frac{E\left[\{Y-E[Y]\}^3\right]}{\{V[Y]\}^{3/2}}=\frac{2\lambda^3}{\left(\lambda^2\right)^{3/2}}=2$$

以上が出題時に想定した解答であるが、以下のキュムラント母関数を用いた解答も数多く見られた。

キュムラント母関数 $C_X=\log M_X(\theta)$ の

2階微分 $C_X^{(2)}(\theta)=\dfrac{d^2C_X(\theta)}{d\theta^2}$ で $\theta=0$ とおくと、平均値まわりの２次のモーメント(*)

3階微分 $C_X^{(3)}(\theta)=\dfrac{d^3C_X(\theta)}{d\theta^3}$ で $\theta=0$ とおくと、平均値まわりの３次のモーメント(**)

ただし、４階微分で $\theta=0$ とおいても、平均値まわりの４次のモーメントとはならない。
同様に、１階微分で $\theta=0$ とおいても、平均値まわりの１次のモーメントである０とはならない。

(*) $C_X=\log M_X(\theta)=\log E\left[e^{\theta X}\right]$

$$\frac{d}{d\theta}C_X=\frac{d}{d\theta}\log M_X(\theta)=\frac{1}{M_X(\theta)}\frac{dM_X(\theta)}{d\theta}$$

$$\left.\frac{d}{d\theta}C_X\right|_{\theta=0}=\left.\frac{1}{M_X(0)}\frac{dM_X(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}=E[X]=\mu \qquad \text{（ここで、}M_X(0)=1\text{）}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}C_X=-\frac{1}{\{M_X(\theta)\}^2}\left\{\frac{dM_X(\theta)}{d\theta}\right\}^2+\frac{1}{M_X(\theta)}\frac{d^2M_X(\theta)}{d\theta^2}$$

$$\left.\frac{d^2}{d\theta^2}C_X\right|_{\theta=0}=-\frac{1}{\{M_X(0)\}^2}\left.\left\{\frac{dM_X(\theta)}{d\theta}\right\}^2\right|_{\theta=0}+\frac{1}{M_X(0)}\left.\frac{d^2M_X(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}$$

$$=-\{E[X]\}^2+E\left[X^2\right]=E\left[(X-\mu)^2\right]=V[X]$$

(**) $$\frac{d^3}{d\theta^3}C_X=\frac{2}{\{M_X(\theta)\}^3}\left\{\frac{dM_X(\theta)}{d\theta}\right\}^3-\frac{3}{\{M_X(\theta)\}^2}\frac{dM_X(\theta)}{d\theta}\frac{d^2M_X(\theta)}{d^2\theta}+\frac{1}{M_X(\theta)}\frac{d^3M_X(\theta)}{d\theta^3}$$

$$\left.\frac{d^3}{d\theta^3}C_X\right|_{\theta=0}=\frac{2}{\{M_X(0)\}^3}\left.\left\{\frac{dM_X(\theta)}{d\theta}\right\}^3\right|_{\theta=0}-\frac{3}{\{M_X(0)\}^2}\left.\frac{dM_X(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}\left.\frac{d^2M_X(\theta)}{d^2\theta}\right|_{\theta=0}+\frac{1}{M_X(0)}\left.\frac{d^3M_X(\theta)}{d\theta^3}\right|_{\theta=0}$$

$$=2\{E[X]\}^3-3E[X]\,E\left[X^2\right]+E\left[X^3\right]=E\left[(X-\mu)^3\right]$$

[別解]

一般に、確率変数 X に対し、積率母関数 $M_X(\theta)$ が原点 $\theta=0$ の近傍で存在するとき、$E\left[X^k\right]=M_X^{(k)}(0)$ となる。ここで、k は 1 以上の整数。$M_X^{(k)}(0)$ は、積率母関数 $M_X(\theta)$ を、θ で k 回微分した関数の $\theta=0$ での値。

$$M_X(\theta)=\exp\left(\lambda\left(e^\theta-1\right)\right)$$

$$C_X=\log M_X(\theta)=\lambda\left(e^\theta-1\right)$$

$$V[X]=\left.\frac{d^2}{d\theta^2}C_X\right|_{\theta=0}=\left.\frac{d^2}{d\theta^2}\left\{\lambda\left(e^\theta-1\right)\right\}\right|_{\theta=0}=\left.\lambda e^\theta\right|_{\theta=0}=\lambda$$

$$E\left[(X-\lambda)^3\right]=\left.\frac{d^3}{d\theta^3}C_X\right|_{\theta=0}=\left.\frac{d^3}{d\theta^3}\left\{\lambda\left(e^\theta-1\right)\right\}\right|_{\theta=0}=\left.\lambda e^\theta\right|_{\theta=0}=\lambda$$

以上から、X の分布の歪度は、

$$\frac{E\left[\left\{X-E[X]\right\}^3\right]}{\left\{V[X]\right\}^{3/2}}=\frac{\lambda}{\lambda^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$M_Y(\theta)=\frac{1}{1-\lambda\theta}$$

$$C_Y=\log M_Y(\theta)=-\log(1-\lambda\theta)$$

$$V[Y]=\left.\frac{d^2}{d\theta^2}C_Y\right|_{\theta=0}=\left.-\frac{d^2}{d\theta^2}\log(1-\lambda\theta)\right|_{\theta=0}=\left.\frac{d}{d\theta}\frac{\lambda}{1-\lambda\theta}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{\lambda^2}{(1-\lambda\theta)^2}\right|_{\theta=0}=\lambda^2$$

$$E\left[(Y-\lambda)^3\right]=\left.\frac{d^3}{d\theta^3}C_Y\right|_{\theta=0}=\left.-\frac{d^3}{d\theta^3}\log(1-\lambda\theta)\right|_{\theta=0}=\left.\frac{d}{d\theta}\frac{\lambda^2}{(1-\lambda\theta)^2}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{2\lambda^3}{(1-\lambda\theta)^3}\right|_{\theta=0}=2\lambda^3$$

以上から、Y の分布の歪度は、

$$\frac{E\left[\left\{Y-E[Y]\right\}^3\right]}{\left\{V[Y]\right\}^{3/2}}=\frac{2\lambda^3}{\left(\lambda^2\right)^{3/2}}=2$$

3(2)はポアソン分布と指数分布の歪度を計算させる問題。歪度の定義は与えてあるので単純な計算問題。また、(1)で積率母関数を計算させているので、方針も明らか。そのため、比較的出来はよかった。しかし、根本的な事項または中学生レベルの事項の誤りがあった。

$E\left[(X-\mu)^3\right]=E\left[X^3\right]-\mu^3$ 　　としたもの 8 名

$E\left[(X-\mu)^3\right]=E\left[(X-\mu)^2\right]\cdot E[X-\mu]=V[X]\cdot E[X-\mu]$　　としたもの１名

後者は論外としても、前者は　$E\left[(X-\mu)^2\right]=E\left[X^2\right]-\mu^2$　を勝手に一般化して、

$E\left[(X-\mu)^n\right]=E\left[X^n\right]-\mu^n$　としているものと思われる。しかし、一度でも、手を動かして、

$$E\left[(X-\mu)^2\right]=E\left[X^2-2\mu X+\mu^2\right]=E\left[X^2\right]-E[2\mu X]+E\left[\mu^2\right]$$

$$=E\left[X^2\right]-2\mu\cdot E[X]+\mu^2\cdot E[1]=E\left[X^2\right]-2\mu^2+\mu^2=E\left[X^2\right]-\mu^2$$

を確かめていれば、こういった一般化ができないことは明らかである。

また、以下は３乗の展開に関する誤り。

$(X-\mu)^3=X^3-3X^2\mu+3X\mu^2+\mu^3$　　としたもの 25 名

$(X-\mu)^3=X^3+3X^2\mu-3X\mu^2+\mu^3$　　としたもの３名

$(X-\mu)^3=X^3-X^2\mu+X\mu^2-\mu^3$　　としたもの７名

$(X-\mu)^3=X^3-3X^2\mu+3X\mu^2$　　としたもの２名

$(X-\mu)^3=X^3-3X^2\mu-3X\mu^2-\mu^3$　　としたもの２名

その他の$(X-\mu)^3$の誤り　　８名

なぜこういった誤りを犯すのか理解できないが、うろ覚えであれば記憶に頼らず、その場で計算する姿勢が重要と思われる。たとえば、$(X-\mu)^2=X^2-2X\mu+\mu^2$　はさすがに知っているだろうから、

$$(X-\mu)^3=(X-\mu)(X-\mu)^2=(X-\mu)\left(X^2-2X\mu+\mu^2\right)=X\left(X^2-2\mu X+\mu^2\right)-\mu\left(X^2-2\mu X+\mu^2\right)$$

と計算すれば、すぐに得られる。また、各項の正負の符号は、$X-\mu=X+(-\mu)$　と考えれば、間違えることはあり得ないと思われる。数学は「なるべく憶えない」のが上達のコツである。
いうまでもないが、正しくは以下のとおり。

$$(X-\mu)^3=X^3-3X^2\mu+3X\mu^2-\mu^3$$

$$E\left[(X-\mu)^3\right]=E\left[X^3\right]-3\mu\cdot E\left[X^2\right]+3\mu^2\cdot E[X]-\mu^3=E\left[X^3\right]-3\mu\cdot E\left[X^2\right]+2\mu^3$$

問題3（3） $X > Y$ **となる確率** $P(X > Y)$ **を求めよ。**

［解答例］

$$P(X > Y) = \sum_{k=0}^{\infty}\{P(X = k)\cdot P(Y < k)\} \qquad (\because X \text{ と } Y \text{ は独立})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\int_0^k \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}dy\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\left(1-e^{-\frac{k}{\lambda}}\right)\right\}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} - e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)^k}{k!}$$

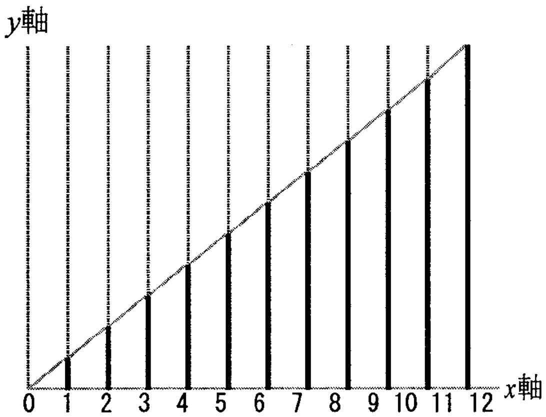
$$= e^{-\lambda}\times e^{\lambda} - e^{-\lambda}\times\exp\left(\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$= 1-\exp\left(\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}} - \lambda\right)$$

非負の整数値を取る x と正の実数値を取る y からなる２次元空間が全空間。横に x 、縦に y を取って、全空間とそのうち $x > y$ を満たす部分を視覚的に描いてみれば、

$$P(X > Y) = P[X > Y \ \ and \ \ \{(X=0)or(X=1)or(X=2)or\cdots\}] = \sum_{k=0}^{\infty}\{P(X=k)\cdot P(X>Y)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\{P(X=k)\cdot P(Y<k)\}$$

と分割するのが簡単であることがわかる。ここがこの問題の唯一のポイントである。



問題4　統計分野より出題した。

連続かつ（狭義）単調増加な分布関数 $F(x)$ **に従う母集団から、** m **個の標本** $X_1, X_2, \cdots, X_m$ **をとる。これを大きさの順に並べ替え、** i **番目に小さいものを** $X_{(i)}$ **と表す。また、** $F_{(i)} = F(X_{(i)}) = P\left(x \le X_{(i)}\right)$ **とし、** $F_{(i)}$ **を確率変数とみなす。（** $i = 1,2,\cdots,m$ **）**

このとき、以下の問いに答えよ。

(1)　**確率変数** $F_{(i)}$ **の分布関数** $G_i(x)$ **が、** $G_i(x) = \sum_{k=i}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$ **となることを導け。**

[解答例]

この問題は、「分布関数の値域を確率変数とみなす」ところで混乱した受験者が多かったのか、きわめて出来が悪かった。（狭義）単調増加を仮定しているところで、逆関数を用いることを思いついてほしい。

確率変数　$Y = F(X)$　の分布関数　$G(y)$　を考える。　$(0 \le y \le 1)$

F　は連続かつ単調増加だから、逆関数　$F^{-1}(y)$　$(0 \le y \le 1)$ が存在する。

$G(y) = \mathrm{Pr}\,ob(F(X) \le y) = \mathrm{Pr}\,ob(X \le F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$

確率変数 Y は分布関数 G が、$G(y) = y$　$(0 \le y \le 1)$　となるので、[0, 1] 上の一様分布。

したがって、すべての i $(i = 1,2,\cdots,m)$ に対して、$Y_i = F(X_i)$ は一様分布に従う。

$$G_i(x) = \mathrm{Pr}\,ob\{F_{(i)} \le x\} = \sum_{k=i}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$$

（$\mathrm{Pr}\,ob\{F_{(i)} \le x\}$ は、$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ のうち、i 個以上が x 以下となる確率）

問題4 (2)　確率変数$F_{(i)}$の確率密度関数 $g_i(x)$ を求めよ。

[解答例]

$F_{(i)}$は(1)で与えてあるので、(1)が出来ていなくとも解答可能。しかも、単に微分をするだけであり、迷うところもない。出題者としては高得点を期待した問題であった。ところが、これも正解が少なかった。(1)が出来なかったので、(2)が出来るわけないと判断してしまった受験者が多かったのではないか。

どこまで変形するかを明確には書いていないものの、それには一種の暗黙の了解というものがある。計算できるにもかかわらず$\frac{d}{dx}$を残してあるのは論外としても、外せるにもかかわらず$\sum$ が残っているもの（下記の中途で計算をやめたもの）には、ほとんど点を与えなかった。むろん、下記と同じ形でなくとも、同値かつシンプルであれば正解である。

(1) から、すべてのi $(0 \le i \le m)$ において、$G_i(x)$がxに対して微分可能であるから、確率密度関数$g_i(x)$は$G_i(x)$をxで微分して得られる。

$$g_i(x) = \frac{d}{dx}G_i(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=i}^{m}\binom{m}{k}x^k(1-x)^{m-k}$$

$$= \sum_{k=i}^{m}\left[\binom{m}{k}\frac{d}{dx}\left\{x^k(1-x)^{m-k}\right\}\right]$$

$$= \sum_{k=i}^{m}\left[\binom{m}{k}\left\{k\,x^{k-1}(1-x)^{m-k} + (-1)(m-k)x^k(1-x)^{m-k-1}\right\}\right]$$

$$= \sum_{k=i}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}kx^{k-1}(1-x)^{m-k} - \sum_{k=i}^{m-1}\frac{m!}{k!(m-k)!}(m-k)x^k(1-x)^{m-k-1}$$

$$= \sum_{k=i}^{m}\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}x^{k-1}(1-x)^{m-k} - \sum_{k=i}^{m-1}\frac{m!}{k!(m-k-1)!}x^k(1-x)^{m-k-1}$$

$$= \sum_{k=i-1}^{m-1}\frac{m!}{k!(m-k-1)!}x^k(1-x)^{m-k-1} - \sum_{k=i}^{m-1}\frac{m!}{k!(m-k-1)!}x^k(1-x)^{m-k-1}$$

$$= \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!}x^{i-1}(1-x)^{m-i}$$

$$= \binom{m}{i}i\,x^{i-1}(1-x)^{m-i}$$

問題 3(2)と同様に、問題 4(2)でも採点者を驚かせる答案が多く見られた。

積の微分を、微分の積であると計算したもの。具体的には、

$\frac{d}{dx}\left\{x^k(1-x)^{m-k}\right\}=\frac{dx^k}{dx}\frac{d(1-x)^{m-k}}{dx}$ としたものが 25 名

わからなければ、極端な例を入れて確かめるとよい（しばらく離れていると、記憶があいまいになることもあるだろう)。「積の微分は、微分の積だったか？」と思えば、$\frac{dx^k}{dx}=\left(\frac{dx}{dx}\right)^k=1^k=1$ と計算し、こうなるはずはない、これは違うと考えなおせばよい。数学以外の原理原則が正しいかあるいは一般的かを検証するときも、極端な例を入れてみる手法は有効ではあるが、一般には「極端なことを言っても仕方ない」と受け取られ、「変な人」という評価を受けかねない。そこに、アクチュアリーとして会社で生きていく困難さがある。

また、

$\frac{d(1-x)^{m-k}}{dx}=(m-k)(1-x)^{m-k-1}$ としたもの（マイナスを落としたもの）が 72 名

これは、式を書くに至らない受験者が多いなかで、式を書いたにもかかわらず誤った答案を書いた人数である。

式の変形は、慣れないうちは step by step で指差し確認をしながら行なうくらいの慎重さが必要である。それを面倒がっていたのでは、いつまでたっても上達しない。

こういった初歩的な誤りをしながら、「問題が難しすぎる」とか「アクチュアリーは学者ではない」といった批判は的外れではないか。

いうまでもないが、正しくは以下のとおり。

$$\frac{d}{dx}\left\{x^k(1-x)^{m-k}\right\}=\frac{dx^k}{dx}(1-x)^{m-k}+\frac{d(1-x)^{m-k}}{dx}x^k=k\,x^{k-1}(1-x)^{m-k}+(-1)(m-k)(1-x)^{m-k-1}x^k$$

問題4（3）　確率変数$F_{(i)}$の期待値を求めよ。

［解答例］

(2)で正解していることが前提条件になるので、この問題も出来が悪かった。出題者は、(2)に高得点を想定していたので、(3)もある程度の出来を期待していた。 以下を見てわかるように、特に高度な知識やテクニックを要求しているわけではない。

(2)より

$$E[F_{(i)}]=\int_0^1 x g_i(x)dx=\binom{m}{i} i\int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}dx$$

ここで、

$$\int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}dx=\left[\frac{1}{i+1}x^{i+1}(1-x)^{m-i}\right]_0^1+\frac{m-i}{i+1}\cdot\int_0^1 x^{i+1}(1-x)^{m-i-1}dx$$

$$=\frac{m-i}{i+1}\cdot\int_0^1 x^{i+1}(1-x)^{m-(i+1)}dx$$

$$=\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{m-(i+1)}{i+2}\cdot\int_0^1 x^{i+2}(1-x)^{m-(i+2)}dx$$

$$\cdots$$

$$=\frac{i!(m-i)!}{m!}\int_0^1 x^m dx$$

$$=\frac{i!(m-i)!}{m!}\frac{1}{m+1}=\frac{1}{\binom{m}{i}}\frac{1}{m+1}$$

$$E[F_{(i)}]=\frac{i}{m+1}$$

別解

$$E[F_{(i)}]=\int_0^1 xg_i(x)dx=\binom{m}{i}i\int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}dx=\binom{m}{i}\times i\times \mathrm{B}(i+1,m-i+1)$$

$$=\frac{m!}{i!\times(m-i)!}\times i\times\frac{\Gamma(i+1)\Gamma(m-i+1)}{\Gamma(m+2)}$$

$$=i\times\frac{m\,!}{i!\times(m-i)\,!}\times\frac{i!\times(m-i)\,!}{(m+1)\,!}=\frac{i}{m+1}$$

ここでBはベータ関数、Γはガンマ関数を表す。

> 参考：定義　$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$
>
> B関数とΓ関数の関係　　$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\times\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
>
> Γ関数と階乗の関係　　kが自然数の場合、$\Gamma(k+1)=k!$

今回の数学の試験は、基本的な事項をきちんと理解しており、それを使いこなせる力があるかどうかを試すことを目指して出題した。ひたすら記憶に頼って勉強してきた受験者には難しいと感じたかもしれないが、この解答例を見れば、出題者が無理な要求をしているわけでも、重箱の隅をつつくような出題をしているわけでもないことがわかっていただけると思う。

過去問にしろ、問題集の問題にしろ、憶えるのではなく理解しようとすること。そして、少なくともポイントの部分は手を動かすこと。新しい知識は、それまでに持っていた知識に関連づけて理解することが重要である。記憶力に自信があったとしても、安易に丸覚えをしないでほしい。

数学は、アクチュアリーの職務の基盤になる部分である。単に試験のためだけではなく、その後の職務のためにも、是非とも時間を見つけて慣れ親しんでほしい。