生 保 数 理 （問 題）

問題 1. (42 点)

次の(1)から(6)までの各問について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。

(1) $\ddot{a}_{\infty}=21$のとき、$(Ia)_{\infty}$の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 294　(B) 315　(C) 336　(D) 357　(E) 378
(F) 399　(G) 420　(H) 441　(I) 462　(J) 483

(2) $l_x=\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^{\alpha}$ $(0\leqq x<\omega)$, $\alpha>0$のとき、$\mu_x \mathring{e}_x$に等しいものは次のうちどれか。

(A) $\dfrac{1}{\alpha-1}$　(B) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$　(C) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$　(D) $\dfrac{1}{\alpha}$　(E) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$
(F) 1　(G) $\dfrac{\alpha+1}{\alpha}$　(H) $\dfrac{1}{\alpha+1}$　(I) $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$　(J) $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$

(3) 死亡解約脱退残存表における x歳の残存者が$l_x=A-1000\cdot x$で表され、解約率q_x^wが死亡率q_xの 9 倍であるとすると、x歳における絶対死亡率は $q_x^*=1-\dfrac{l_x-k_1}{l_x-k_2}$となる。このとき k_1, k_2 は次のうちどれか。死亡・解約はそれぞれ独立に発生し、一年を通じて一様に発生するものとする。

(A) $k_1=510$, $k_2=490$　(B) $k_1=520$, $k_2=480$　(C) $k_1=530$, $k_2=470$
(D) $k_1=540$, $k_2=460$　(E) $k_1=550$, $k_2=450$　(F) $k_1=560$, $k_2=440$
(G) $k_1=570$, $k_2=430$　(H) $k_1=580$, $k_2=420$　(I) $k_1=590$, $k_2=410$
(J) $k_1=600$, $k_2=400$

(4) ある集団が原因A, B, Cによって減少していく 3 重脱退残存表を考える。
ここで各脱退はそれぞれ独立に発生し、一年を通じて一様に発生するものとする。
$l_x=10{,}000$, $l_{x+1}=8{,}000$, 中央脱退率 $m_x{}^A=0.10$, 中央脱退率 $m_x{}^C=0.07$ のとき、$q_x{}^B$の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.025　(B) 0.027　(C) 0.030　(D) 0.032　(E) 0.035
(F) 0.037　(G) 0.040　(H) 0.042　(I) 0.045　(J) 0.047

(5) 死力が年齢に関係なく 0.1 で、$\bar{a}_x = 7.233$ のとき、利力 δ の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.014	(B) 0.017	(C) 0.020	(D) 0.023	(E) 0.026
(F) 0.029	(G) 0.032	(H) 0.035	(I) 0.038	(J) 0.041

(6) 死力 $\mu_x = \dfrac{1}{80-x}$ $(0 \leqq x < 80)$ のとき、${}_{20}q_{40,\overset{2}{50}}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{4}$	(D) $\frac{1}{5}$	(E) $\frac{1}{6}$
(F) $\frac{1}{7}$	(G) $\frac{1}{8}$	(H) $\frac{1}{9}$	(I) $\frac{1}{10}$	(J) $\frac{1}{11}$

問題 2. (8 点)

次の①～④に当てはまる最も適切な数値を、計算過程を簡潔に示すとともに、指定の解答用紙の所定欄に、①～③は整数、④は小数点第 2 位で記入せよ。必要ならば①～③については小数点第 1 位を四捨五入し、④は小数点第 3 位を四捨五入のうえ、記入せよ。なお、計算過程の記入のない答案は採点の対象とはならない。

x	l_x^{aa}	d_x^{aa}	i_x	l_x^{ii}	d_x^{ii}	${}_{x-30}p_{30}^{i}$	q_x^{i}	q_x^{aa}	$q_x^{(i)}$
30	1,140,000	—	1,200	4,000	①	—	0.1	—	—
31	1,135,000	—	②	—	—	—	0.1	0.003	—
32	1,130,595	250	—	③	850	④	—	—	0.0008

(＊) 就業不能者が回復して就業者集団に復帰することはないことを前提とする。

問題 3. (21 点)

次の(1)から(3)までの各問について最も適当な数値を、計算過程を簡潔に示すとともに、小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位で、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、計算過程の記入のない答案は採点の対象とはならない。

(1) 契約年齢 45 歳 年払終身払込 保険金年末支払の終身保険（保険期間を通じて保険金額 1）について 45～64 歳の純保険料をP_1とするとき、65 歳以降についての純保険料はP_2となる。この保険の 65 歳以降の保険金額を 0.75 に引下げ、保険期間を通じて純保険料を一定としたとき、その純保険料はP_1になる。また、この 65 歳時点の平準純保険料式責任準備金は元の保険の純保険料式責任準備金と同じ値となる。この時、65 歳時点の純保険料式責任準備金の値を求めよ。なお、必要ならば、$A_{45}=0.103$，$A_{65}=0.284$，$\ddot{a}_{45}=12.112$，$\ddot{a}_{65}=9.668$，$\ddot{a}_{45:\overline{20|}}=10.360$ を使用すること。

(2) $P_{x:\overline{5|}}=0.25137$ ， $i=0.05$ ， $q_{x+3}=0.2$ のとき、${}_4V_{x:\overline{5|}}-{}_3V_{x:\overline{5|}}$の値を求めよ。

(3) 契約年齢 30 歳 保険期間 30 年 年払全期払込 で次の(ァ) および（ィ)の給付を行う保険の営業保険料の値を求めよ。

（ァ）保険期間中の死亡に対してはその保険年度末全期チルメル式責任準備金を年度末に支払う。（各年度末の全期チルメル式責任準備金は正である。）

（ィ）満期まで生存したときは保険金 1 を支払う。

ただし、付加保険料は新契約費のみで契約時に保険金額 1 に対して 0.02 とし、チルメル割合は新契約費に等しいものとし、予定利率は 1.5 %とする。

なお、必要ならば、$v^{30}=$ 0.639762 を使用すること。

問題 4.　　(14 点)

以下の空欄の①～⑭に当てはまる数値、記号または式を指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。ただし、③、④、および⑨から⑫については、1つの数値または記号で答え、それ以外は最も簡潔な式で答えること。また、(生命) 年金現価の記号を用いるときは期始払の記号を用いること。なお、番号の異なる空欄に異なる数値、記号または式が入る、とは限らないので留意すること。

(1) (A) 契約年齢 x 歳 年払全期払込 n 年満期養老保険(保険金額 1 保険金年末支払)の第 t 保険年度末責任準備金を ${}_tV_x^E$

(B) (A)と同じ条件で死亡保険金を満期日に支払う契約の第 t 保険年度末責任準備金を ${}_tV_x^T$

(C) 毎年一定額を払い込む n 年満期定期積金(保険金額 1)の第 t 年度末の積立金を ${}_tV_x^S$

とするとき、${}_tV_x^T = a_1 \times {}_tV_x^E + b_1 \times {}_tV_x^S$ の形に表せるという。これを次のように示す。

$$ {}_tV_x^T = \boxed{①} - \frac{\boxed{②}}{\boxed{③}} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = 1 - \frac{\boxed{②}}{\boxed{③}} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \left(\boxed{④} - \boxed{⑤}\right) \times \frac{1-v^{n-t}}{1-v^n} $$

$$ = \left(\boxed{⑥}\right) \times {}_tV_x^E + \left(\boxed{⑦}\right) \times {}_tV_x^S $$

(2) (1)の(B)の契約で被保険者が死亡したときに、死亡直後の契約応当日から満期直前の契約応当日まで年金年額 u の確定年金を死亡保険金のほかに支払うとした。このとき、第 t 保険年度末責任準備金 ${}_tV_x^{T+R}$ は ${}_tV_x^{T+R} = a_2 \times {}_tV_x^T + b_2 \times {}_tV_x^E$ の形に表せるという。これを次のように示す。

純保険料を P^{T+R} とすると、$P^{T+R} = \dfrac{\boxed{⑧}}{\boxed{③}} + u \times \dfrac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩}}{\boxed{③}}$ より、

$$ {}_tV_x^{T+R} = \boxed{①} + u \times \left(\boxed{⑪} - \boxed{⑫}\right) - \left(\frac{\boxed{⑧}}{\boxed{③}} + u \times \frac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩}}{\boxed{③}}\right) \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

$$ = {}_tV_x^T + u \times \left(\boxed{⑪} - \frac{\boxed{⑨}}{\boxed{③}} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) = \left(\boxed{⑬}\right) \times {}_tV_x^T + \left(\boxed{⑭}\right) \times {}_tV_x^E $$

問題 5.　(15 点)

次の空欄に当てはまる記号または算式を指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。
ただし、解答にあたっては、適切な数値および問題文中の記号ならびに文末の【語群】(7 ページを参照) 中の記号のみを用い、Σ記号や∫記号は用いないこと。

契約年齢子供 x 歳・親 y 歳 死亡保険金年末支払 保険期間 n 年 保険料は年払全期払込で、親と子の共存期間中に払い込まれるものとし、次の(a)から(d)の給付を行う親子連生保険を考える。また、予定死亡率は親子とも同一の生命表によるものとし、予定事業費は考慮しないものとする。

(a) 子供が n 年後まで生存した場合は、満期保険金 S^E を支払う。

(b) 子供が保険期間中に死亡した場合は、死亡保険金としてその死亡時までの既払込保険料相当額（(c)で親の死亡の場合に払込を免除された部分を含む）を支払い、契約は消滅する。

(c) 親が死亡した場合は死亡保険金 S^P を支払い、その後の保険料の払込を免除する。

(d) 親の死亡した年度の年度末から第 n 保険年度末まで、子供の生存を条件として年額 R の年金を支払う。

(1) 保険料を P とすると、

支出の現価は $\boxed{\quad ① \quad}+P\cdot\boxed{\quad ② \quad}$ となり、収入の現価は $P\cdot\boxed{\quad ③ \quad}$ となるので、

収支相等の原則から、$P=\dfrac{\boxed{\quad ① \quad}}{\boxed{\quad ③ \quad}-\boxed{\quad ② \quad}}$ となる。

(2) 親子とも生存の場合の平準純保険料式責任準備金を ${}_tV$ 、子供のみ生存の場合の平準純保険料式責任準備金を ${}_t\tilde{V}$ とすると、それぞれ次のようになる。 ただし、責任準備金を計算する時点（t）での支払いについては、死亡保険金は支払われたものと考え、満期保険金と年金はまだ支払われていない状態にあるとして計算を行う。

${}_tV$ に関して将来法で考えたとき、将来支出の現価として、給付事由(a) (b)については $\boxed{\quad ④ \quad}$ 、給付事由(c) (d)については $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ となり、将来収入の現価として、

$P\cdot\boxed{\quad ⑥ \quad}$ となる。

したがって、${}_tV = \boxed{④} + \boxed{⑤} - P\cdot\boxed{⑥}$

同様に、${}_t\tilde{V}$ に関しては、将来支出の現価として、給付事由(a) (b)については

$\boxed{④}$ 子供のみ生存することから、給付事由(d)については $\boxed{⑦}$ となる。

したがって、${}_t\tilde{V} = \boxed{④} + \boxed{⑦}$

(3)責任準備金の再帰式を以下のようにして導く。ただし、$0 \leq t \leq n-1$ とする。

まず、${}_tV$ の算式の $\boxed{④}$、$\boxed{⑤}$ および $P\cdot\boxed{⑥}$ は次のように変形できる。

$$\boxed{④} = \boxed{⑧} + v\cdot p_{x+t}\cdot\left(\boxed{⑨}\right) \cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$\boxed{⑤} = \boxed{⑩} + \boxed{⑪}\cdot\left(\boxed{⑫}\right) + \boxed{⑬}\cdot\boxed{⑭} \cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$P\cdot\boxed{⑥} = P + \boxed{⑪}\cdot\boxed{⑮} \cdots\cdots(\mathrm{III})$$

(Ⅰ)式と(Ⅱ)式の左辺と右辺それぞれを足し、そこから(Ⅲ)式の左辺と右辺のそれぞれを引くと、左辺は${}_tV$ となり、右辺は、

$$\begin{aligned}\text{右辺} =& \boxed{⑧} + \boxed{⑩} - P + v\cdot p_{x+t}\cdot\left(\boxed{⑨}\right)\\ &+ \boxed{⑪}\cdot\left(\boxed{⑫} - \boxed{⑮}\right)\\ &+ \boxed{⑬}\cdot\boxed{⑭}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=& \boxed{⑧} + \boxed{⑩} - P\\ &+ \boxed{⑪}\cdot\left(\boxed{⑨} + \boxed{⑫} - \boxed{⑮}\right)\\ &+ \boxed{⑬}\cdot\left(\boxed{⑨} + \boxed{⑭}\right)\end{aligned}$$

したがって、次の再帰式が得られる。

$${}_tV + P = \boxed{⑧} + \boxed{⑩} + \boxed{⑪}\cdot{}_{t+1}V + \boxed{⑬}\cdot{}_{t+1}\tilde{V}$$

【語群】

v	t						
p_x	p_{x+t-1}	p_{x+t}	p_{x+t+1}	q_x	q_{x+t-1}	q_{x+t}	q_{x+t+1}
p_y	p_{y+t-1}	p_{y+t}	p_{y+t+1}	q_y	q_{y+t-1}	q_{y+t}	q_{y+t+1}
$q_{\overset{1}{x}y}$	$q_{\overset{1}{x+t-1},y+t-1}$	$q_{\overset{1}{x+t},y+t}$	$q_{\overset{1}{x+t+1},y+t+1}$	$q_{x\overset{1}{y}}$	$q_{x+t-1,\overset{1}{y+t-1}}$	$q_{x+t,\overset{1}{y+t}}$	$q_{x+t+1,\overset{1}{y+t+1}}$
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}$	$\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}\|}$	$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\|}$	$\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n+1}\|}$	$\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+2}\|}$	$\ddot{a}_{x+t:\overline{n+1-t}\|}$	$\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}\|}$
$\ddot{a}_{y:\overline{n}\|}$	$\ddot{a}_{y+t-1:\overline{n-t+1}\|}$	$\ddot{a}_{y+t:\overline{n-t}\|}$	$\ddot{a}_{y+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	$\ddot{a}_{y:\overline{n+1}\|}$	$\ddot{a}_{y+t-1:\overline{n-t+2}\|}$	$\ddot{a}_{y+t:\overline{n+1-t}\|}$	$\ddot{a}_{y+t+1:\overline{n-t}\|}$
$A^{1}_{x:\overline{n}\|}$	$A^{\ 1}_{x+t-1:\overline{n-t+1}\|}$	$A^{1}_{x+t:\overline{n-t}\|}$	$A^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	$A_{x:\overset{1}{\overline{n}\|}}$	$A_{x+t-1:\overset{1}{\overline{n-t+1}\|}}$	$A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}\|}}$	$A_{x+t+1:\overset{1}{\overline{n-t-1}\|}}$
$A^{1}_{y:\overline{n}\|}$	$A^{\ 1}_{y+t-1:\overline{n-t+1}\|}$	$A^{1}_{y+t:\overline{n-t}\|}$	$A^{\ 1}_{y+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	$A_{y:\overset{1}{\overline{n}\|}}$	$A_{y+t-1:\overset{1}{\overline{n-t+1}\|}}$	$A_{y+t:\overset{1}{\overline{n-t}\|}}$	$A_{y+t+1:\overset{1}{\overline{n-t-1}\|}}$
$\ddot{a}_{xy:\overline{n}\|}$		$\ddot{a}_{x+t-1,y+t-1:\overline{n-t+1}\|}$		$\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}\|}$		$\ddot{a}_{x+t+1,y+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	
$a_{x\|y:\overline{n}\|}$		$a_{x+t-1\|y+t-1:\overline{n-t+1}\|}$		$a_{x+t\|y+t:\overline{n-t}\|}$		$a_{x+t+1\|y+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	
$a_{y\|x:\overline{n}\|}$		$a_{y+t-1\|x+t-1:\overline{n-t+1}\|}$		$a_{y+t\|x+t:\overline{n-t}\|}$		$a_{y+t+1\|x+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	
$(IA)^{1}_{x:\overline{n}\|}$		$(IA)^{\ 1}_{x+t-1:\overline{n-t+1}\|}$		$(IA)^{1}_{x+t:\overline{n-t}\|}$		$(IA)^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	
$(IA)^{1}_{y:\overline{n}\|}$		$(IA)^{\ 1}_{y+t-1:\overline{n-t+1}\|}$		$(IA)^{1}_{y+t:\overline{n-t}\|}$		$(IA)^{\ 1}_{y+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	
$A_{\overset{1}{x}y:\overline{n}\|}$		$A_{\overset{1}{x+t-1},y+t-1:\overline{n-t+1}\|}$		$A_{\overset{1}{x+t},y+t:\overline{n-t}\|}$		$A_{\overset{1}{x+t+1},y+t+1:\overline{n-t-1}\|}$	
$A_{x\overset{1}{y}:\overline{n}\|}$		$A_{x+t-1,\overset{1}{y+t-1}:\overline{n-t+1}\|}$		$A_{x+t,\overset{1}{y+t}:\overline{n-t}\|}$		$A_{x+t+1,\overset{1}{y+t+1}:\overline{n-t-1}\|}$	

以上

生 保 数 理 （解 答）

問題 1.

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
解答欄	(G)	(C)	(E)	(J)	(I)	(E)

解答は上の表のとおりであり、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) 二見隆　生命保険数学(上)　25 頁 第 1 章練習問題 (2)　の (6) 番が類似問題
…………………… (G)

$\ddot{a}_\infty = 1/d$　,　$(Ia)_\infty = 1/id = 1/i + 1/i^2$

$\ddot{a}_\infty = (1+i)/i = 21$ より $i = 0.05$

$\therefore (Ia)_\infty = 1/id = 1/i + 1/i^2 = 1/0.05 + (1/0.05)^2 = 420$

(別解)

$\ddot{a}_\infty = a_\infty + 1$ より、$a_\infty = \ddot{a}_\infty - 1 = 21 - 1 = 20$

$$
\begin{aligned}
(Ia)_\infty &= a_\infty + va_\infty + v^2 a_\infty + \cdots \\
&= a_\infty(1 + v + v^2 + \cdots) \\
&= a_\infty \cdot \frac{1}{1-v} \\
&= a_\infty \cdot \ddot{a}_\infty \\
&= 20 \cdot 21 \\
&= 420
\end{aligned}
$$

(2) 二見隆　生命保険数学(上)　第 2 章　練習問題 (1)　の (12) 番を参照
…………………… (C)

$$\mu_x = -\frac{d \log l_x}{dx} \text{ より } \mu_x = -\frac{d \log\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^\alpha}{dx} = \frac{\alpha}{\omega - x}$$

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \, dt = \int_0^{\omega-x} \frac{\left(1-\dfrac{x+t}{\omega}\right)^\alpha}{\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^\alpha} dt = \frac{1}{(\omega-x)^\alpha} \int_0^{\omega-x} (\omega - x - t)^\alpha \, dt$$

$$= \frac{1}{(\omega-x)^\alpha}\left[\frac{-(\omega-x-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^{\omega-x} \qquad = \frac{\omega-x}{\alpha+1}$$

したがって $\mu_x \mathring{e}_x = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$

(別解)

$$\mathring{e}_x = \int_0^{w-x} {}_t p_x dt = \int_0^{w-x} \frac{\left(1-\dfrac{x+t}{\omega}\right)^\alpha}{\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^\alpha} dt$$

$$= \frac{1}{(\omega-x)^\alpha}\int_0^{w-x}(\omega-x-t)^\alpha dt = \frac{1}{(\omega-x)^\alpha}\left[\frac{-(w-x-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^{\omega-x} = \frac{\omega-x}{\alpha+1}$$

$$\frac{d\mathring{e}_x}{dx} = \mu_x \mathring{e}_x - 1 \quad \text{より} \quad \mu_x \mathring{e}_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\omega-x}{\alpha+1}\right)+1 = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

(3) 二見隆　生命保険数学(上)　99 頁 第 3 章　練習問題 (4) 番を参照

…………………… (E)

$w_x = l_x q_x^w = l_x 9 q_x = 9 d_x$ であるから、

$l_{x+1} = l_x - d_x - w_x = l_x - 10 d_x$

よって、$d_x = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{10} = 100$　　$(\because\ l_x = A - 1000x)$

$\therefore w_x = 900$

$$q_x^* = \frac{d_x}{l_x - \dfrac{w_x}{2}} = \frac{100}{l_x - 450} = 1 - \frac{l_x - 550}{l_x - 450}$$

(4) 二見隆　生命保険数学(上)　第 3 章　92 頁から 94 頁などを参照

…………………… (J)

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} = 9{,}000$$

$$m_x{}^A = \frac{d_x{}^A}{L_x} = \frac{d_x{}^A}{9{,}000} \quad \therefore d_x{}^A = 900$$

同様に、$d_x{}^C = 630$

$$d_x{}^B = d_x - d_x{}^A - d_x{}^C = 2000 - 900 - 630 = 470$$

$$\therefore q_x{}^B = \frac{d_x{}^B}{l_x} = \frac{470}{10{,}000} = 0.047$$

(5) 二見隆　生命保険数学(上)　第 4 章　113 頁などを参照

…………………… (I)

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) = \exp(-0.1t)$$

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x dt = \int_0^\infty v^t e^{-0.1t} dt = \left[\frac{\left(ve^{-0.1}\right)^t}{\log\left(ve^{-0.1}\right)}\right]_0^\infty = \frac{1}{\delta+0.1} \text{ より}$$

$$\delta = \frac{1}{\bar{a}_x} - 0.1 = \frac{1}{7.233} - 0.1 = 0.038255\ldots$$

(6)二見隆　生命保険数学(下)　第12章　92頁から96頁などを参照

…………………　(E)

$$ {}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t}dt\right) = \exp\left(-\int_0^n \frac{1}{80-x-t}dt\right)$$

$$= \exp\{[\log(80-x-t)]_0^n\} = \exp\left\{\log\left(\frac{80-x-n}{80-x}\right)\right\}$$

$$= \frac{80-x-n}{80-x}$$

したがって ${}_n q_x = \dfrac{n}{80-x}$

$$ {}_{20}q_{40,\overset{2}{50}} = \int_0^{20} {}_t q_{40} \cdot {}_t p_{50} \cdot \mu_{50+t}dt = \int_0^{20} \frac{t}{40} \cdot \frac{30-t}{30} \cdot \frac{1}{30-t}dt = \int_0^{20} \frac{t}{1200}dt = \left[\frac{t^2}{2400}\right]_0^{20} = \frac{1}{6}$$

(別解)

解答は、（５０）の死亡に着目した式で、別解として（４０）の死亡に着目して解くことができる。

$$ {}_{20}q_{40,\overset{2}{50}} = \int_0^{20} {}_t p_{40,50} \cdot \mu_{40+t} \cdot {}_{20-t}q_{50+t}dt$$

$$= \int_0^{20} {}_t p_{40} \cdot {}_t p_{50} \cdot \mu_{40+t} \cdot {}_{20-t}q_{50+t}dt$$

$$= \int_0^{20} \frac{80-40-t}{80-40} \cdot \frac{80-50-t}{80-50} \cdot \frac{1}{80-40-t} \cdot \frac{20-t}{80-50-t}dt$$

$$= \int_0^{20} \frac{20-t}{40 \cdot 30}dt$$

$$= \frac{1}{1200}\left[20t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^{20}$$

$$= \frac{1}{6}$$

(参考)　${}_{20}q_{40,\overset{2}{50}}$ の表記について

${}_{20}q_{40,\overset{2}{50}}$ の表記は英米の主要なテキストでは“ : ”を使用して ${}_{20}q_{40:\overset{2}{50}}$ となっている。また、

絶版となっているが，守田「保険数学」も米英の主要なテキストと同じ表現となっている。

しかし、二見隆　「生命保険数学」では ${}_{20}q_{40,\overset{2}{50}}$ と表現されている(例：(下) 256頁など)ことか

ら，テキストの表記に準じた。

問題２ 二見隆 生命保険数学(上) 第５章 練習問題(1) (14)番 (18)番などを参照

① $d_{30}{}^{ii} = q_{30}^{i} \cdot (l_{30}^{ii} + \frac{1}{2} i_{30}) = 0.1 \times (4{,}000 + 1{,}200 \times \frac{1}{2}) = 460$

② $d_{31}^{aa} = l_{31}^{aa} \cdot q_{31}^{aa} = 1{,}135{,}000 \times 0.003 = 3{,}405$

$l_{x+1}^{aa} = l_{x}^{aa} - d_{x}^{aa} - i_{x}$ より $i_{31} = l_{31}^{aa} - d_{31}^{aa} - l_{32}^{aa} = 1{,}135{,}000 - 3{,}405 - 1{,}130{,}595 = 1{,}000$

③ $l_{31}^{ii} = l_{30}^{ii} - d_{30}^{ii} + i_{30} = 4{,}000 - 460 + 1{,}200 = 4{,}740$

$d_{31}{}^{ii} = q_{31}^{i} \cdot (l_{31}^{ii} + \frac{1}{2} i_{31}) = 0.1 \times (4{,}740 + 1{,}000 \times \frac{1}{2}) = 524$

$l_{32}^{ii} = l_{31}^{ii} - d_{31}^{ii} + i_{31} = 4{,}740 - 524 + 1{,}000 = 5{,}216$

④

$p_{30}^{i} = 1 - q_{30}^{i} = \dfrac{l_{30}^{ii} - l_{30}^{ii} \times q_{30}^{i}}{l_{30}^{ii}}$、 $p_{31}^{i} = 1 - q_{31}^{i}$ より

$${}_2p_{30}^{i} = p_{30}^{i} \times p_{31}^{i} = \frac{l_{30}^{ii} - l_{30}^{ii} \times q_{30}^{i}}{l_{30}^{ii}} \times (1 - q_{31}^{i}) = \frac{l_{30}^{ii} - l_{30}^{ii} \times q_{30}^{i} - (l_{30}^{ii} - l_{30}^{ii} \times q_{30}^{i}) \times q_{31}^{i}}{l_{30}^{ii}}$$

$${}_2p_{30}^{i} = \frac{l_{30}^{ii} - l_{30}^{ii} \times q_{30}^{i} - (l_{30}^{ii} - l_{30}^{ii} \times q_{30}^{i}) \times q_{31}^{i}}{l_{30}^{ii}}$$

$$= \frac{4000 - 4000 \times 0.1 - (4000 - 4000 \times 0.1) \times 0.1}{4000} = 0.81$$

(別解)

$l_{x}^{i} - d_{x}^{i} = l_{x+1}^{i} \qquad \therefore \quad p_{x}^{i} = 1 - q_{x}^{i}$

$${}_np_{x}^{i} = \frac{l_{x+n}^{i}}{l_{x}^{i}} = \frac{l_{x+1}^{i}}{l_{x}^{i}} \times \frac{l_{x+2}^{i}}{l_{x+1}^{i}} \times \cdots\cdots \times \frac{l_{x+n}^{i}}{l_{x+n-1}^{i}}$$

$$= p_{x}^{i} \times p_{x+1}^{i} \times \cdots\cdots \times p_{x+n}^{i}$$

$$= (1 - q_{x}^{i}) \times (1 - q_{x+1}^{i}) \times \cdots\cdots\cdots \times (1 - q_{x+n}^{i})$$

したがって

$${}_2p_{30}^{i} = p_{30}^{i} \times p_{31}^{i} = (1 - q_{30}^{i}) \times (1 - q_{31}^{i}) = (1 - 0.1) \times (1 - 0.1) = 0.81$$

問題３.

(1) ${}_{20|}\ddot{a}_{45}=\ddot{a}_{45}-\ddot{a}_{45:\overline{20|}}=12.112-10.360=1.752$

収支相等の原則から $A_{45}=\ddot{a}_{45:\overline{20|}}\times P_1+{}_{20|}\ddot{a}_{45}\times P_2$

したがって、 $0.103=10.360\times P_1+1.752\times P_2$ …①

${}_{20}V_{45}=0.75\times A_{65}-P_1\times\ddot{a}_{65}$ 　また、${}_{20}V_{45}=A_{65}-P_2\times\ddot{a}_{65}$

したがって、${}_{20}V_{45}=0.75\times 0.284-9.668P_1$ また、${}_{20}V_{45}=0.284-9.668P_2$

$\dfrac{0.071+9.668P_1}{9.668}=P_2\rightarrow 0.007343815+P_1=P_2$ …②

①及び②の連立方程式を解くと、$P_1=0.007441681$

よって、${}_{20}V_{45}=0.75\times 0.284-0.007441681\times 9.668=0.1410538 \fallingdotseq 0.141$

(2) $(P_{x:\overline{5|}}+{}_4V_{x:\overline{5|}})(1+i)=1 \quad \therefore {}_4V_{x:\overline{5|}}=\dfrac{1}{1+i}-P_{x:\overline{5|}}=0.701011$

$(P_{x:\overline{5|}}+{}_3V_{x:\overline{5|}})(1+i)-q_{x+3}=p_{x+3}\cdot{}_4V_{x:\overline{5|}} \quad \therefore {}_3V_{x:\overline{5|}}=0.473210$

$\therefore {}_4V_{x:\overline{5|}}-{}_3V_{x:\overline{5|}}=0.227801 \fallingdotseq 0.228$

(別解)

$${}_4V_{x:\overline{5|}}-{}_3V_{x:\overline{5|}}=\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+4:\overline{1|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}}\right)-\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+3:\overline{2|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}}\right)$$

$$=\frac{\ddot{a}_{x+3:\overline{2|}}-1}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}}$$

ここで、 $P_{x:\overline{5|}}=\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}}-d$ より、$\ddot{a}_{x:\overline{5|}}=\dfrac{1}{P_{x:\overline{5|}}+d}=\dfrac{1}{0.25137+\dfrac{0.05}{1.05}}=3.34460$

また、 $\ddot{a}_{x+3:\overline{2|}}=1+vp_{x+3}=1+\dfrac{1}{1.05}(1-0.2)=1.76190$

よって、 ${}_4V_{x:\overline{5|}}-{}_3V_{x:\overline{5|}}=\dfrac{1.76190-1}{3.34460}=0.2278 \fallingdotseq 0.228$

(3) 年払営業保険料を P'、年払純保険料を P とすると $P'=P+\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{30:\overline{30|}}}$

であるから、全期チルメル式責任準備金を ${}_tV$ とすると、次の式が成り立つ。

$P' - \alpha = vq_{30} \cdot {}_1\mathrm{V} + vp_{30} \cdot {}_1\mathrm{V}$、$P' + {}_t\mathrm{V} = vq_{30+t} \cdot {}_{t+1}\mathrm{V} + vp_{30+t} \cdot {}_{t+1}\mathrm{V}$　　(1≦t≦29)

すなわち、$P' - \alpha = v \cdot {}_1\mathrm{V}$　　… ①

$P' + {}_t\mathrm{V} = v \cdot {}_{t+1}\mathrm{V}$　　(1≦t≦29)　　… ②

②の両辺にv^tを乗じたもの t = 1～29 と①を合計すると

$$P' \cdot \sum_{t=0}^{29} v^t - \alpha = v^{30}\,{}_{30}\mathrm{V} = v^{30} \qquad \therefore P' = \frac{v^{30} + \alpha}{\ddot{a}_{\overline{30|}}} = 0.027066 \fallingdotseq 0.027$$

(参考)

$P' \fallingdotseq 0.027$　がわかると、$\alpha = 0.02$ であるから　$P' - \alpha > 0$

したがって　$P' - \alpha = v \cdot {}_1\mathrm{V} > 0$、

更に　$P' + {}_t\mathrm{V} = v \cdot {}_{t+1}\mathrm{V} > 0$　であるため、

問題文の指示にある「各年度末の全期チルメル式責任準備金は正である」ことがわかる。

解答を行う際の支障が生ずることのないようこの指示文を記載した。

問題 4.

設問番号	解答	別解
①	v^{n-t}	$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-t}$
②	v^{n}	$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}$
③	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	—
④	1	—
⑤	v^{n}	$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}$
⑥	v^{n}	$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}$
⑦	$1-v^{n}$	$1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}$
⑧	v^{n}	$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}$
⑨	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$	—
⑩	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	—
⑪	$\ddot{a}_{\overline{n-t}\vert}$	—
⑫	$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert}$	—
⑬	$1-\frac{u(1+i)}{i}$	$1-\frac{u}{d}$
⑭	$\frac{u(1+i)}{i}$	$\frac{u}{d}$

$$ {}_tV_x^T = v^{n-t} - v^n \times \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}} $$

$$ = 1 - v^n \times \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}} - (1-v^n)\times\frac{1-v^{n-t}}{1-v^n} $$

$$ = v^n - v^n \times \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}} + (1-v^n) - (1-v^n)\times\frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}\vert}}{\ddot{a}_{\overline{n}\vert}} $$

$$ = v^n \times {}_tV_x^E + (1-v^n) \times {}_tV_x^S $$

(2) $P^{\mathrm{T+R}} = \dfrac{v^n}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + u \times \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ であるから、　　　　　(下記「参考」を参照)

$${}_t\mathrm{V}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T+R}} = v^{n-t} + u \times (\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) - \left(\frac{v^n}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + u \times \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$= {}_t\mathrm{V}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} + u \times \left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right)$$

$$= {}_t\mathrm{V}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} + \frac{u}{1-v} \times \left\{ (1-v^{n-t}) - (1-v^n) \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right\}$$

$$= {}_t\mathrm{V}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} + \frac{u(1+i)}{i} \times ({}_t\mathrm{V}_x^E - {}_t\mathrm{V}_x^T)$$

$$= \left[1 - \frac{u(1+i)}{i} \right] \times {}_t\mathrm{V}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} + \left[\frac{u(1+i)}{i} \right] \times {}_t\mathrm{V}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{E}}$$

(参考)

$\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ の表記について

守田氏：保険数学(下巻 P.74)には次のように書かれている。絶版となっているため少し長く引用する。参考にされたい。

§4.復帰年金の拡張

年 1 回払の復帰年金の公式 $a_{y|x} = a_x - a_{xy}$ で、(x) および (y) に対し、2 生命以上の組合せまたは、生命と確定期間の組合せを代入して、この公式を使用することができる。

$$a_{s|z} = a_z - a_{sz}$$

において、記号 s および z はいずれも単生命であってよいし、確定期間または、2 生命の組合せでも良い。さらに、単生命または 2 生命以上の確定期間の組合せとしてもよい。ただし、年金が 1 年 2 回以上支払われ、かつ、確定期間を含む場合には実用公式にすぎないことを注意しておく。たとえば、n 期間経過後に (x) に対し毎年払の年金が給付されるとすれば、

$$a_{\overline{n}||z} = a_x - a_{x:\overline{n}|}$$

ところが、年金が年m回払ならば公式はつぎのようになるが、これは年金の価に対する実用公式としてのみ使用される。

$$a^{(m)}_{n|:x} = a^{(m)}_{x} - a^{(m)}_{x:\overline{n|}}$$

$$= \left(a_x + \frac{m-1}{2m} \right) - \left\{ a_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \right\}$$

$$= a_x - a_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m} \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

これは据置年金に対する普通の公式

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} a^{(m)}_{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \left(a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \right)$$ と同じものになる。

(x)の死亡に始まり、かつ、その年金が現在から n 年以上は続かない年金の現価は、

$$a_{x|\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}}$$

なお、同様の記述は Alistair Neill "Life Contingencies"の p278　8.7　Special and contingent reversionary annuities にもある。

問題 5.

設問番号	解答	別解
①	$S^E \cdot A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ \ 1} + S^P \cdot A_{\overset{1}{xy}:\overline{n}\vert} + R \cdot a_{y\vert x:\overline{n}\vert}$	—
②	$(IA)^1_{x:\overline{n}\vert}$	—
③	$\ddot{a}_{xy:\overline{n}\vert}$	—
④	$S^E \cdot A_{x+t:\overline{n-t}\vert}^{\ \ \ \ \ 1} + P \cdot \left(t \cdot A^1_{x+t:\overline{n-t}\vert} + (IA)^1_{x+t:\overline{n-t}\vert} \right)$	—
⑤	$S^P \cdot A_{x+t,\overset{1}{y+t}:\overline{n-t}\vert} + R \cdot a_{y+t\vert x+t:\overline{n-t}\vert}$	—
⑥	$\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}\vert}$	—
⑦	$R \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n+1-t}\vert}$	—
⑧	$(t+1) \cdot P \cdot v \cdot q_{x+t}$	$(t+1) \cdot P \cdot v \cdot (1-p_{x+t})$ も可
⑨	$S^E \cdot A_{x+t+1:\overline{n-t-1}\vert}^{\ \ \ \ \ \ 1} + P \cdot \left((t+1) \cdot A^1_{x+t+1:\overline{n-t-1}\vert} + (IA)^1_{x+t+1:\overline{n-t-1}\vert} \right)$	—
⑩	$S^P \cdot v \cdot q_{x+t,\overset{1}{y+t}}$	—
⑪	$v \cdot p_{x+t} \cdot p_{y+t}$	$v \cdot (1-q_{x+t}) \cdot (1-q_{y+t})$ 等も可
⑫	$S^P \cdot A_{x+t+1,\overset{1}{y+t+1}:\overline{n-t-1}\vert} + R \cdot a_{y+t+1\vert x+t+1:\overline{n-t-1}\vert}$	—
⑬	$v \cdot p_{x+t} \cdot q_{y+t}$	$v \cdot (1-q_{x+t}) \cdot (1-p_{y+t})$ 等も可
⑭	$R \cdot \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}\vert}$	—
⑮	$P \cdot \ddot{a}_{x+t+1,y+t+1:\overline{n-t-1}\vert}$	—

(1) 年払保険料を P とすると、

支出の現価は $\boxed{S^E \cdot A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1} + S^P \cdot A_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|} + R \cdot a_{y|x:\overline{n}|}}^{①} + P \cdot \boxed{(IA)^1_{x:\overline{n}|}}^{②}$ となり、収入の現価は

$P\cdot\boxed{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}$③ となるので、

収支相等の原則から、 $P=\dfrac{\boxed{S^E\cdot A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}+S^P\cdot A_{xy:\overline{n|}}^{1}+R\cdot a_{y|x:\overline{n|}}}^{①}}{\boxed{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}^{③}-\boxed{(IA)_{x:\overline{n|}}^{1}}^{②}}$ となる。

親子とも生存の場合の平準純保険料式責任準備金を${}_tV$、子供のみ生存の場合の平準純保険料式責任準備金を${}_t\tilde{V}$とすると、それぞれ次のようになる。 ただし、責任準備金を計算する時点 (t) での支払いについては、死亡保険金は支払われたものと考え、満期保険金と年金はまだ支払われていない状態にあるとして計算を行う。

${}_tV$に関して将来法で考えたとき、
将来支出の現価として、給付事由(a) (b)については

$$\boxed{S^E\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}+P\cdot\left(t\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}+(IA)_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}\right)}^{④}$$

給付事由(c) (d)については $\boxed{S^P\cdot A_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ 1}+R\cdot a_{y+t|x+t:\overline{n-t|}}}$⑤ となり、

将来収入の現価として $P\cdot\boxed{\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}}$⑥ となる。

したがって、

$${}_tV=\boxed{S^E\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}+P\cdot\left(t\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}+(IA)_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}\right)}^{④}+\boxed{S^P\cdot A_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ 1}+R\cdot a_{y+t|x+t:\overline{n-t|}}}^{⑤}-P\cdot\boxed{\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}}^{⑥}$$

同様に、${}_t\tilde{V}$に関しては、将来支出の現価として、給付事由(a) (b)について

$$\boxed{S^E\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}+P\cdot\left(t\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}+(IA)_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}\right)}^{④}$$

子供のみ生存することから、給付事由(d)については $\boxed{R\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n+1-t|}}}$⑦ となる。

したがって、${}_t\tilde{V}=\boxed{S^E\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}+P\cdot\left(t\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}+(IA)_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}\right)}^{④}+\boxed{R\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n+1-t|}}}^{⑦}$

(3) 責任準備金の再帰式を以下のようにして導く。ただし、$0\le t\le n-1$とする。

まず、${}_tV$の算式の $\boxed{S^E\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1}+P\cdot\left(t\cdot A_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}+(IA)_{x+t:\overline{n-t|}}^{1}\right)}^{④}$、

$\boxed{S^P\cdot A_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ 1}+R\cdot a_{y+t|x+t:\overline{n-t|}}}^{⑤}$ および $P\cdot\boxed{\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}}^{⑥}$ は次のように変形できる。

$$\boxed{S^E \cdot A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}} + P\cdot\left(t\cdot A^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + (IA)^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}\right)}^{④}$$

$$= \boxed{(t+1)\cdot P\cdot v\cdot q_{x+t}}^{⑧} + v\cdot p_{x+t}\cdot\left(\boxed{S^E\cdot A_{x+t+1:\overset{1}{\overline{n-t-1}|}} + P\cdot\left((t+1)\cdot A^{1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} + (IA)^{1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\right)}^{⑨}\right)$$

$$\boxed{S^P\cdot A_{x+t,\overset{1}{y+t}:\overline{n-t}|} + R\cdot a_{y+t|x+t:\overline{n-t}|}}^{⑤}$$

$$= \boxed{S^P\cdot v\cdot q_{x+t,\overset{1}{y+t}}}^{⑩} + \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot p_{y+t}}^{⑪}\cdot\left(\boxed{S^P\cdot A_{x+t+1,\overset{1}{y+t+1}:\overline{n-t-1}|} + R\cdot a_{y+t+1|x+t+1:\overline{n-t-1}|}}^{⑫}\right)$$

$$+ \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot q_{y+t}}^{⑬}\cdot\boxed{R\cdot \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}}^{⑭}$$

$$P\cdot\boxed{\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|}}^{⑥} = P + \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot p_{y+t}}^{⑪}\cdot\boxed{P\cdot\ddot{a}_{x+t+1,y+t+1:\overline{n-t-1}|}}^{⑮}$$

最初の２式の両辺を足し、そこから３番目の式の両辺を引くと、左辺は${}_tV$となり、右辺は、

$$右辺 = \boxed{(t+1)\cdot P\cdot v\cdot q_{x+t}}^{⑧} + \boxed{S^P\cdot v\cdot q_{x+t,\overset{1}{y+t}}}^{⑩} - P$$

$$+ v\cdot p_{x+t}\cdot\left(\boxed{S^E\cdot A_{x+t+1:\overset{1}{\overline{n-t-1}|}} + P\cdot\left((t+1)\cdot A^{1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} + (IA)^{1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\right)}^{⑨}\right)$$

$$+ \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot p_{y+t}}^{⑪}\cdot\left(\begin{array}{l}\boxed{S^P\cdot A_{x+t+1,\overset{1}{y+t+1}:\overline{n-t-1}|} + R\cdot a_{y+t+1|x+t+1:\overline{n-t-1}|}}^{⑫} \\ -\boxed{P\cdot\ddot{a}_{x+t+1,y+t+1:\overline{n-t-1}|}}^{⑮}\end{array}\right)$$

$$+ \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot q_{y+t}}^{⑬}\cdot\boxed{R\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}}^{⑭}$$

$$= \boxed{(t+1)\cdot P\cdot v\cdot q_{x+t}}^{⑧} + \boxed{S^P\cdot v\cdot q_{x+t,\overset{1}{y+t}}}^{⑩} - P$$

$$+ \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot p_{y+t}}^{⑪}\cdot\left(\begin{array}{l}\boxed{S^E\cdot A_{x+t+1:\overset{1}{\overline{n-t-1}|}} + P\cdot\left((t+1)\cdot A^{1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} + (IA)^{1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\right)}^{⑨} \\ +\boxed{S^P\cdot A_{x+t+1,\overset{1}{y+t+1}:\overline{n-t-1}|} + R\cdot a_{y+t+1|x+t+1:\overline{n-t-1}|}}^{⑫} - \boxed{P\cdot\ddot{a}_{x+t+1,y+t+1:\overline{n-t-1}|}}^{⑮}\end{array}\right)$$

$$+ \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot q_{y+t}}^{⑬}\cdot\left(\begin{array}{l}\boxed{S^E\cdot A_{x+t+1:\overset{1}{\overline{n-t-1}|}} + P\cdot\left((t+1)\cdot A^{1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} + (IA)^{1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\right)}^{⑨} \\ +\boxed{R\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}}^{⑭}\end{array}\right)$$

したがって、次の再帰式が得られる。

$${}_tV + P = \boxed{(t+1)\cdot P\cdot v\cdot q_{x+t}}^{⑧} + \boxed{S^P\cdot v\cdot q_{x+t,\overset{1}{y+t}}}^{⑩} + \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot p_{y+t}}^{⑪}\cdot{}_{t+1}V + \boxed{v\cdot p_{x+t}\cdot q_{y+t}}^{⑬}\cdot{}_{t+1}\tilde{V}$$

以上