数学（問題）

［問題1から問題4を通じて、必要であれば（付表）に記載された数値を用いよ。］

問題1．　次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（36点）

(1) つぼの中に、赤玉1つと白玉2つが入っている。今無作為につぼの中から玉を一つ取り出し、色を確認後元にもどす作業を続け、赤玉が3回出たらこの作業を終了する。この場合、終了までに白玉をちょうど2回取り出す確率は $\boxed{}$ となる。

（小数点以下第4位を四捨五入して、小数点以下第3位まで求めよ。）

(2) 確率変数 X,Y が互いに独立でともに同じ分布（平均 μ、分散 σ^2）に従うとき、$U=aX+bY, V=cX+dY$ （a,b,c,d は正の定数）の相関係数は、 $\boxed{}$ となる。

(3) 事象 A,B,C があり、次の各式を満たす。

① $P(A\cap B)=P(B\cap C)=P(C\cap A)=2P(A\cap B\cap C)$

② $5P(A\cap B\cap C)<P(A)=P(B)=P(C)<6P(A\cap B\cap C)$

③ $1-P(A\cup B\cup C)<P(A\cap B\cap C)$

このとき、次のa)からj)のうち $P(A\cap B\cap C)$ の取り得る値として適当な数値は記号 $\boxed{}$ である。

a) 0.02　b) 0.04　c) 0.06　d) 0.08　e) 0.10　f) 0.12　g) 0.14　h) 0.16　i) 0.18　j) 0.20

(4) 互いに独立な2つの確率変数 X,Y がそれぞれ次の確率分布

$$P(X=x)={}_5C_x p^x(1-p)^{5-x}\quad (x=0,1,2,3,4,5),\quad P(Y=y)=p^y(1-p)^{1-y}\quad (y=0,1)$$

に従うとき、$X+Y$ の積率母関数は $\boxed{}$ 、平均は $\boxed{}$ 、分散は $\boxed{}$ である。

(5) サイコロを100回投げた時、45～55回偶数目のでる確率を中心極限定理を使って求めると、確率は $\boxed{}$ となる。

（小数点以下第4位を四捨五入して、小数点以下第3位まで求めよ。）

(6) 確率変数 X の確率密度関数が、$f(x)=\begin{cases} ae^{-ax} & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$ （ただし、$a>0$） のとき、

$E(X^n)=$ $\boxed{}$ である。

(7) 確率変数 X が平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うとき、$Y=e^X$ とすると、
$E(Y)=$ $\boxed{}$, $V(Y)=$ $\boxed{}$ である。

(8) 確率変数 X,Y の同時確率密度関数が、$f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)} & (x>0, y>0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$ のとき、

$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ の確率密度関数 $g(z)$ は、$g(z)=\begin{cases}\boxed{} & (z>0)\\ 0 & (z\leq 0)\end{cases}$ である。

(9) 箱の中に 1 から 5 までの数字を書いたカードが 1 枚ずつ入っている。その箱から、すべてのカードを 1 枚ずつ引き出していく時（非復元抽出）、少なくとも 1 枚のカードについて、引き出した順番とそのカードの数字が一致する確率は、 $\boxed{}$ である。

（小数点以下第 4 位を四捨五入して、小数点以下第 3 位まで求めよ。）

問題２．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（３６点）

(1) 身長と体重について次のデータが与えられている。これらのデータから回帰直線を求め、身長165.4 cmの人の体重を推定するとき、その推定値 $\hat{y}$ は

$$\hat{y} = \boxed{}\ \text{(kg)}$$

である。

	平均値	標準偏差	相関係数
身長（cm）	168.1	7.2	+0.63
体重（kg）	58.7	6.4	

（小数点以下第２位を四捨五入して、小数点以下第１位まで求めよ。）

(2) 二項母集団 $B(1,p)$ から大きさ 10 の標本変量 $(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$ をとり帰無仮説 $H_0 : p = 0.5$ を対立仮説 $H_1 : p = 0.8$ に対して検定する。統計量 X を $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ とし、棄却域を $W = \{X = 8,9,10\}$ としたとき、この検定の第 1 種の誤りのおこる確率は $\boxed{}$ 、第 2 種の誤りのおこる確率は $\boxed{}$ である。

（小数点以下第４位を四捨五入して、小数点以下第３位まで求めよ。）

(3) 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立でともに一様分布 $U(0,L)$ に従うとき、

$$E(|X_1 - X_2|^n) = \boxed{}$$

である。

(4) ある農場で生産されるメロンの重さは平均 1180 g、標準偏差 20 g の正規分布に従う。このとき、無作為に選んだ n 個のメロンの重さの平均が、少なくとも 90％の確率で 1175 g を超えるために最低限必要な個数 n は $\boxed{}$ 個である。

(5) 母集団が平均 $\theta(>0)$ の指数分布に従うとき、大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ に対して、$a_n \overline{X}^2$ が θ^2 の不偏推定量となるためには a_n の値を $\boxed{}$ とすればよい。

(6) 袋の中に１から N までの数字をそれぞれ１つずつ記したボールが入っている。この中から n 個のボールを無作為に非復元抽出で取り出すとき、取り出した n 個のボールに記された番号の和の平均は $\boxed{}$ 、分散は $\boxed{}$ である。（N>n、N,n は正の整数）

(7) 標本変量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ が互いに独立な正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従いかつ μ と σ^2 の間には、

$\mu^2 = \sigma^2 \quad (\mu > 0)$ の関係があるとき、μ の最尤推定量は $\boxed{}$ である。

(8) ある２組の母集団から各々５個のデータを抽出したところ、次の結果を得た。

Ａ母集団：17.0,　14.5,　15.0,　15.5,　13.0

Ｂ母集団：12.0,　8.5,　11.0,　9.0,　9.5

Ａ母集団とＢ母集団は、分散の等しい正規分布に従うものとして、Ａ母集団とＢ母集団の平均値の差（Ａ母集団の平均値－Ｂ母集団の平均値）を信頼係数９５％で区間推定すると、信頼区間は（$\boxed{}$, $\boxed{}$ ）である。

（小数点以下第４位を四捨五入して、小数点以下第３位まで求めよ。）

(9) ある母集団の母平均をμ、母分散をσ^2とし、帰無仮説$H_0 : \mu = \mu_0$を検定する。このとき、真の平均値がμ_0より 0.5σ 以上離れたときに、これを検出することのできる確率が 99％以上であるようにするには、標本の大きさを $\boxed{}$ 以上とすればよい。ただしσ は既知で、有意水準は５％とする。

問題 3. ある部品について、使用しはじめてから破損するまでの時間（寿命）を表す確率変数を X とするとき、次の問に答えよ。（１４点）

(1) 十分小さい時間 Δx について、使用後 x 時間以内には破損がなく、続く Δx 時間内に破損する確率が、$P(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x) = K\Delta x \quad (K > 0)$ のとき、X の確率密度関数を求めよ。

(2) この部品の平均寿命は統計上、500 時間であった。この度、部品の一部の仕様を変更し、20 個の部品に対して平均寿命を測定したところ、730 時間となった。この部品の平均寿命は伸びたと言えるか。有意水準 5%で検定せよ。

問題４．成功の確率が p である試行を独立に繰り返す時、初めて成功を得るまでの失敗の数を表わす確率変数を X としたとき、その確率関数は、

$$P(X = x) = (1 - p)^x p \qquad (x = 0,1,2,\cdots)$$

である。これを幾何分布という。

今、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を幾何分布に従う母集団からの大きさ n の標本変量とするとき、次の問に答えよ。（１４点）

(1) p の最尤推定量を求めよ。

(2) $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の確率関数 $P(Y = y) \quad (y = 0,1,2,\cdots)$ を求めよ。

(3) Y に基づく（y を変数とする）p の不偏推定量を $A(y)$ としたとき、不偏性の条件と二項展開を用いて $A(y)$ を求めよ。

ヒント

二項展開

m を任意の実数としたとき

$$(1+x)^m = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{m}{t} x^t \qquad (|x| < 1)$$

（付表）

Ⅰ．標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0.159	0.100	0.050	0.025	0.023	0.010	0.005
$u(\varepsilon)$	1.000	1.282	1.645	1.960	2.000	2.326	2.576

Ⅱ．自由度 ϕ の t 分布の上側 ε 点：$t_\phi(\varepsilon)$

$\phi \diagdown \varepsilon$	0.100	0.050	0.025
6	1.440	1.943	2.447
7	1.415	1.896	2.365
8	1.397	1.860	2.306
9	1.383	1.833	2.262
10	1.372	1.812	2.228
11	1.363	1.796	2.201
12	1.356	1.782	2.179
13	1.350	1.771	2.160
14	1.345	1.761	2.145
15	1.341	1.753	2.131
16	1.337	1.746	2.120
17	1.333	1.740	2.110
18	1.330	1.734	2.101
19	1.328	1.729	2.093
20	1.325	1.725	2.086
21	1.323	1.721	2.080
22	1.321	1.717	2.074
23	1.319	1.714	2.069
24	1.318	1.711	2.064
25	1.316	1.708	2.060

Ⅲ. 自由度ϕのχ^2分布の上側ε点：$\chi_\phi^2(\varepsilon)$

ϕ ＼ ε	0.975	0.950	0.100	0.050	0.025
1	0.001	0.004	2.706	3.841	5.024
2	0.051	0.103	4.605	5.991	7.378
3	0.216	0.352	6.251	7.815	9.348
4	0.484	0.711	7.779	9.488	11.143
5	0.831	1.145	9.236	11.070	12.832
6	1.237	1.635	10.645	12.592	14.449
7	1.690	2.167	12.017	14.067	16.013
8	2.180	2.733	13.362	15.507	17.535
9	2.700	3.325	14.684	16.919	19.023
10	3.247	3.940	15.987	18.307	20.483
11	3.816	4.575	17.275	19.675	21.920
12	4.404	5.226	18.549	21.026	23.337
13	5.009	5.892	19.812	22.362	24.736
14	5.629	6.571	21.064	23.685	26.119
15	6.262	7.261	22.307	24.996	27.488
16	6.908	7.962	23.542	26.296	28.845
17	7.564	8.672	24.769	27.587	30.191
18	8.231	9.390	25.989	28.869	31.526
19	8.907	10.117	27.204	30.144	32.852
20	9.591	10.851	28.412	31.410	34.170
21	10.283	11.591	29.615	32.671	35.479
22	10.982	12.338	30.813	33.924	36.781
23	11.689	13.091	32.007	35.172	38.076
24	12.401	13.848	33.196	36.415	39.364
25	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646
26	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923
27	14.573	16.151	36.741	40.113	43.195
28	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461
29	16.047	17.708	39.088	42.557	45.722
30	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979
31	17.539	19.281	41.422	44.985	48.232
32	18.291	20.072	42.585	46.194	49.480
33	19.047	20.867	43.745	47.400	50.725
34	19.806	21.664	44.903	48.602	51.966
35	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203
36	21.336	23.269	47.212	50.999	54.437
37	22.106	24.075	48.363	52.192	55.668
38	22.879	24.884	49.513	53.384	56.896
39	23.654	25.695	50.660	54.572	58.120
40	24.433	26.509	51.805	55.759	59.342
50	32.357	34.764	63.167	67.505	71.420
60	40.482	43.188	74.397	79.082	83.298
70	48.758	51.739	85.527	90.531	95.023
80	57.153	60.392	96.578	101.879	106.629
90	65.647	69.126	107.565	113.145	118.136
100	74.222	77.930	118.498	124.342	129.561

Ⅳ. 分母の自由度m 、分子の自由度nのF 分布の上側ε点：$F_m^n(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.100$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon = 0.050$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.329	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.785
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978

$\varepsilon = 0.025$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.331	39.356	39.373	39.387	39.398
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419
4	12.218	10.649	9.979	9.604	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717

$\varepsilon = 0.01$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849

Ⅳ．分母の自由度m、分子の自由度nのF分布の上側ε点：$F_m^n(\varepsilon)$（続き）

$\varepsilon = 0.005$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.501	199.000	199.166	199.250	199.300	199.333	199.357	199.375	199.388	199.400
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.838	44.434	44.126	43.882	43.686
4	31.333	26.284	24.259	23.155	22.456	21.975	21.622	21.352	21.139	20.967
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.513	14.200	13.961	13.772	13.618
6	18.635	14.544	12.917	12.028	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.250
7	16.236	12.404	10.882	10.050	9.522	9.155	8.885	8.678	8.514	8.380
8	14.688	11.042	9.596	8.805	8.302	7.952	7.694	7.496	7.339	7.211
9	13.614	10.107	8.717	7.956	7.471	7.134	6.885	6.693	6.541	6.417
10	12.826	9.427	8.081	7.343	6.872	6.545	6.302	6.116	5.968	5.847

数学 解答

問題１　確率に関する範囲について、基礎的と思われる問題を出題した。

(１)	0.099
(２)	$\dfrac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$
(３)	(d)
(４)	積率母関数　$\{pe^{\theta}+(1-p)\}^6$ 平均　$6p$ 分散　$6p(1-p)$
(５)	0.682
(６)	$\dfrac{n!}{a^n}$　なお、分子が『$\Gamma(n+1)$』、『$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$』すべて可。
(７)	E(Y)　$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$　V(Y)　$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$
(８)	$2z^3e^{-z^2}$
(９)	0.633

(1) 白玉２回、赤玉３回の計５回取り出しを行い、最後の１回は赤玉となるから、

$${}_{3+2-1}C_2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2={}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{81}=0.098765\cdots$$

(答)　$\boxed{0.099}$

(2) X,Y が独立なので、

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$$

同様に、$V(cX+dY)=(c^2+d^2)\sigma^2$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(U,V)&=\mathrm{cov}(aX+bY,cX+dY)\\&=E\{(aX+bY-a\mu-b\mu)(cX+dY-c\mu-d\mu)\}\\&=acE\{(X-\mu)^2\}+bdE\{(Y-\mu)^2\}+(ad+bc)E\{(X-\mu)(Y-\mu)\}\\&=ac\sigma^2+bd\sigma^2\end{aligned}$$

よって、相関係数は、

$$\rho(U,V)=\frac{ac\sigma^2+bd\sigma^2}{\sqrt{(a^2+b^2)\sigma^2(c^2+d^2)\sigma^2}}=\frac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$$

答 $\boxed{\dfrac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}}$

(3) 一般に、

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

が成立する。

ここで、$P(A\cap B\cap C)=k$ とおくと、第１式より

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-5k \quad \cdots ①$$

ここで、第２式より

$$P(A)+P(B)+P(C)>15k \quad \cdots ②$$

であるから、①と②より

$$P(A\cup B\cup C)>10k$$

$P(A\cup B\cup C)<1$ であるから、$k<\dfrac{1}{10}$

また、第３式に①を代入すると

$$P(A)+P(B)+P(C)>1+4k$$

この式と第２式より

$$18k>1+4k$$

$$\therefore \quad k>\frac{1}{14}$$

よって $\dfrac{1}{14}<k<\dfrac{1}{10}$ 答 $\boxed{\text{(d)}}$

(4) X,Y は独立だから、$X+Y$ の積率母関数を $g(\theta)$ とすると

$$g(\theta)=E\left(e^{\theta(X+Y)}\right)=E\left(e^{\theta X}\right)E\left(e^{\theta Y}\right)$$

ここで、

$$E\left(e^{\theta X}\right)=\{pe^{\theta}+(1-p)\}^5, E\left(e^{\theta Y}\right)=pe^{\theta}+(1-p)$$

ゆえに、$g(\theta)=\{pe^{\theta}+(1-p)\}^6$

よって、$E(X+Y)=g'(0)=6p$， $V(X+Y)=g''(0)-\{g'(0)\}^2=6p(1-p)$

答 積率母関数 $\boxed{\{pe^{\theta}+(1-p)\}^6}$ 平均 $\boxed{6p}$ 分散 $\boxed{6p(1-p)}$

(5) i 回目に投げたサイコロの目が偶数であるとき 1、奇数であるとき 0 となる確率変数を X_i とすると、サイコロを 100 回投げた時の偶数の目のでる回数は、

$$S = X_1 + \cdots + X_{100}$$

に従う。ここで、$E(X_i) = \frac{1}{2}$, $V(X_i) = \frac{1}{4}$ であるため、

中心極限定理より、$Z = \dfrac{\sqrt{100}\left(S - 100 \times \frac{1}{2}\right)}{100 \times \sqrt{\frac{1}{4}}} = \dfrac{S-50}{5}$

は正規分布 $N(0,1)$ に従う。

また、S=45 のとき、Z=-1,S=55 のとき、Z=1 となる。

よって、$P(45 \le S \le 55) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.682$　　答 $\boxed{0.682}$

(6) X の積率母関数を $\phi(\theta)$ とすると、$\theta < a$ のとき、

$$\phi(\theta) = E\left(e^{\theta X}\right) = \int_0^\infty a e^{(\theta - a)x} dx = \frac{a}{a-\theta}$$

ここで、$\phi^{(n)}(\theta) = \dfrac{d^n}{d\theta^n}\phi(\theta) = \dfrac{an!}{(a-\theta)^{n+1}}$

また、一方で、$\phi^{(n)}(\theta) = \dfrac{d^n}{d\theta^n} E\left(e^{\theta X}\right) = E\left(X^n e^{\theta X}\right)$

したがって、$E\left(X^n\right) = \phi^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{a^n}$　　答 $\boxed{\dfrac{n!}{a^n}}$

(7)

$$E\left(Y^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2\mu x - 2\sigma^2 kx + \mu^2\right)} dx$$

ここで、

$$\begin{aligned} x^2 - 2\mu x - 2\sigma^2 kx + \mu^2 &= x^2 - 2\left(\mu + \sigma^2 k\right)x + \mu^2 \\ &= x^2 - 2\left(\mu + \sigma^2 k\right)x + \left(\mu + \sigma^2 k\right)^2 - 2\sigma^2 k\mu - \sigma^4 k^2 \\ &= \left(x - \left(\mu + \sigma^2 k\right)\right)^2 - \sigma^2 k\left(\sigma^2 k + 2\mu\right) \end{aligned}$$

よって

$$E\left(Y^k\right)=e^{\frac{k}{2}\left(\sigma^2 k+2\mu\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\left(\mu+\sigma^2 k\right)\right)^2}dx$$

$$=e^{\mu k+\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}$$

したがって、

$$E\left(Y\right)=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$E\left(Y^2\right)=e^{2\mu+2\sigma^2}$$

$$V\left(Y\right)=E\left(Y^2\right)-E\left(Y\right)^2$$

$$=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}\quad\cdot\cdot\cdot\quad(解)$$

$$=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$

$E\left(Y\right)=$ $\boxed{e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}}$ $V\left(Y\right)=$ $\boxed{e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)}$

(8) Z の分布関数を $G(z)$ とすると、

$$G(z)=P(Z\le z)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right)$$

$$=\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z,x>0,y>0}4xye^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

$$=4\int_0^z xe^{-x^2}dx\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}}ye^{-y^2}dy$$

ここで、$\displaystyle\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}}ye^{-y^2}dy=\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^{\sqrt{z^2-x^2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{x^2-z^2}$

よって、

$$G(z)=4\int_0^z xe^{-x^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{x^2-z^2}\right)dx=\int_0^z\left(2xe^{-x^2}-2xe^{-z^2}\right)dx$$

$$=\left[-e^{-x^2}-x^2e^{-z^2}\right]_0^z=1-e^{-z^2}\left(1+z^2\right)$$

よって、

$g(z)=G'(z)=2z^3e^{-z^2}$ 答 $\boxed{2z^3e^{-z^2}}$

(9)

カードの組み合わせは、5！

その中で、１が１番目に引き出される場合の数は、$(5-1)!=4!$

次に２が２番目に引き出される場合の数は、4！　となり、そのうち、１が１番目に引き出される場合の数は３！であるから、1、2がともに順番どおりに引き出されない場合の数は、　$5!-4!-(4!-3!)=5!-2\cdot 4!+3!$

同様に、さらに３が３番目に引き出され、1、2が順番どおりに引き出されない場合の数は、３を固定して１、２が順番どおりに出ない場合、つまり１枚少ないと思えば、$4!-2\cdot 3!+2!$　となるので、1、2、3が順番どおりに引き出されない場合の数は、

$5!-2\cdot 4!+3!-4!+2\cdot 3!-2!=5!-3\cdot 4!+3\cdot 3!-2!$

以下これを繰り返すと、1,2,3,4,5が順番どおり引き出されない場合の数は、

$5!-{}_5C_1\cdot 4!+{}_5C_2\cdot 3!-{}_5C_3\cdot 2!+{}_5C_4\cdot 1!-{}_5C_5$

これを5!でわると、

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}=\frac{44}{120}=0.3666$$

従って、少なくとも１枚のカードについて、引き出した順番とそのカードの数字が一致する確率は、1-0.3666=0.6334

答　$\boxed{0.633}$

問題２　統計に関する範囲について、基礎的と思われる問題を出題した。

(1)	57.2
(2)	第１種の誤りの起こる確率　0.055 第２種の誤りの起こる確率　0.322
(3)	$\dfrac{2L^n}{(n+1)(n+2)}$
(4)	27
(5)	$\dfrac{n}{n+1}$
(6)	平均 $\dfrac{n(N+1)}{2}$　分散 $\dfrac{n(N+1)(N-n)}{12}$
(7)	$-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 + 4n\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}{2n}$
(8)	(2.874, 7.126)
(9)	74

(1) 回帰方程式は $\hat{y} = \bar{y} + b(x - \bar{x})$ と書くことができ、また、$b = r\dfrac{s_y}{s_x}$ である。この式に所与の値を代入して身長に対する体重の回帰方程式は次のとおりに定まる。

$$\hat{y} = \bar{y} + b(x - \bar{x}) = \bar{y} + r\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) = 58.7 + \left(0.63 \times \frac{6.4}{7.2}\right)(x - 168.1)$$
$$= -35.44 + 0.56x$$

よって、$x = 165.4$ cmのときの体重の推定値は

$\hat{y} = \boxed{57.2}$　(kg)

(2)
H_0 のもとで X は $B(10, 1/2)$ にしたがうので、
第 1 種の誤りのおこる確率は

$$P_{H_0}(X \in W) = \sum_{k=8}^{10} P_{H_0}(X = k) = \sum_{k=8}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

$$= \frac{45+10+1}{2^{10}} = \frac{56}{1024} = 0.0546\cdots \qquad (答) \quad \boxed{0.055}$$

また、H_1 のもとでは X は $B(10, 4/5)$ にしたがうので、
第 2 種の誤りのおこる確率は

$$P_{H_1}(X \notin W) = 1 - P_{H_1}(X \in W)$$

$$= 1 - \sum_{k=8}^{10} P_{H_1}(X = k) = 1 - \sum_{k=8}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(1-\frac{4}{5}\right)^{10-k}$$

$$= 1 - \frac{4^8}{5^{10}}(45 + 10 \times 4 + 1 \times 4^2)$$

$$= 1 - \frac{65{,}536}{9{,}765{,}625} \times 101 = 0.3222\cdots \qquad (答) \quad \boxed{0.322}$$

である。

ここで、P_{H_0}, P_{H_1} はそれぞれ H_0 H_1 のもとでの確率をあらわす。

(3) $|X_1 - X_2| = R$ の分布は

$$f_R(R) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{x_{(1)}}^{R+x_{(1)}} f(x)dx \right\}^0 f(x_{(1)}) f(R + x_{(1)}) dx_{(1)}$$

で与えられるから、 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{L} & (0 < x < L) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$ を代入して

$$f_R(R) = 2\int_0^{L-R} \frac{dx_{(1)}}{L^2} = \frac{2(L-R)}{L^2}$$

よって、

$$E(R^n) = \int_0^1 R^n \frac{2(L-R)}{L^2} dR = \boxed{\frac{2L^n}{(n+1)(n+2)}}$$

(4)

メロンの重さをXとすると、題意より、Xは$N(1180, 20^2)$に従う。
n個のメロンの重さを$X_1, X_2, \cdots X_n$,その平均を

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

とすれば、$\overline{X}_n$は$N(1180, \frac{20^2}{n})$に従う。
$\overline{X}_n$が少なくとも90%の確率で1175gを超えることから、

$$P(\overline{X}_n > 1175) \geq 0.90$$
$$\Leftrightarrow P(\overline{X}_n < 1175) < 0.10$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\overline{X}_n - 1180}{20/\sqrt{n}} < \frac{1175 - 1180}{20/\sqrt{n}}\right) < 0.10$$

となるので、$\frac{1175-1180}{20/\sqrt{n}} < -u(0.10)$となる$n$を求めればよい。
すなわち、

$$-\frac{\sqrt{n}}{4} < -u(0.10)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} > 1.282 \Leftrightarrow n > 26.296384$$

よって、最低限必要な個数nは $\boxed{27}$ 個。

(5)

この指数分布に従う確率変数Xに対して$E(X) = \theta, E(X^2) = 2\theta^2$であるから、
この母集団からの標本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$に対して、
$E(X_i) = \theta,\quad E(X_i^2) = 2\theta^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$
また、$i \neq j$ならば、
$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = \theta \cdot \theta = \theta^2 \quad (\because X_i, X_j$は独立$)$
従って、

$$E(\overline{X}^2) = \frac{1}{n^2}E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \frac{1}{n^2}\sum_{i \neq j} E(X_i X_j)$$
$$= \frac{1}{n^2} n \cdot 2\theta^2 + \frac{1}{n^2} n(n-1)\theta^2 = \frac{n+1}{n}\theta^2$$

よって、

$$E(a_n \overline{X}^2) = a_n E(\overline{X}^2) = a_n \frac{n+1}{n}\theta^2 = \theta^2 \qquad \therefore a_n = \boxed{\frac{n}{n+1}}$$

(6)

袋の中のN個のボールを母集団とすれば、有限母集団から大きさnの標本を抽出することになるから、標本を$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$として

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

の平均と分散を求めればよい。

さて、母平均μと母分散σ^2はそれぞれ

$$\mu = \frac{1}{N}(1+2+\cdots\cdots+N) = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\{(1-\mu)^2 + (2-\mu)^2 + \cdots\cdots + (N-\mu)^2\} = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N} k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} k\mu + N\mu^2\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left\{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - 2N\mu^2 + N\mu^2\right\} = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

であるから

$$E(Z) = nE(\overline{X}) = n\mu = \boxed{\frac{n(N+1)}{2}}$$

$$V(Z) = n^2 V(\overline{X}) = n^2 \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = n^2 \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

$$= \boxed{\frac{n(N+1)(N-n)}{12}}$$

(7)

母集団分布の確率密度関数は

$$f\ (\mathrm{x}\ ;\mu,\sigma^2)\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

によってあらわされるから、標本変量（$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$）の確率密度関数は、$\mu^2=\sigma^2$より

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{f}\ (\mathrm{x}_i;\mu)\ =\ (\frac{1}{2\pi\mu^2})^{\frac{n}{2}} e\,xp(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i-\mu)^2}{2\mu^2})$$

尤度関数は

$$1\ (\mu)\ =\ (\frac{1}{2\pi\mu^2})^{\frac{n}{2}}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i-\mu)^2}{2\mu^2})$$

であるから、$1\ (\mu)$ を最大ならしめるμを求めるためには

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log l\ (\mu)\ =0 \qquad \cdot\cdot\cdot①$$

を解けばよいことになる。　①式の$1\ (\mu)$ に上記の関数を代入すれば、

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log l\ (\mu)=\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{-\frac{n}{2}\log 2\pi\mu^2-\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i-\mu)^2\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log l\ (\mu)=-\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{\mu}+\frac{1}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i^{\ 2}-\frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log l\ (\mu)=\frac{1}{\mu^3}(-n\mu^2-\mu\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i^{\ 2})$$

$$\mu\ =\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\pm\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i)^2+4n\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i^{\ 2}}}{-2n}$$

$\mu>0$より

μ	$\sim$	$\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i-\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i)^2+4n\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i^{\ 2}}\right)\Big/-2n$	$\sim$
$\frac{\partial}{\partial\mu}\log l\ (\mu)$	+	0	-

よって、

$$\mu\ =\boxed{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i-\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i)^2+4n\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i^{\ 2}}}{2n}}$$

(8)

A母集団、B母集団の標本平均、標本分散を求める。
$\bar{x}_A = 15.00, s_A{}^2 = 1.70, \bar{x}_B = 10.00, s_B{}^2 = 1.70, m + n - 2 = 8$
また、信頼係数が95%ならば自由度8のt－分布の0.05点は$t_1 = 2.306$であるから、

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_1 \sqrt{\frac{ms_X{}^2 + ns_y{}^2}{m + n - 2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$$

$= 2.8740, 7.1260$

したがって、求める信頼区間 $\boxed{(2.874, 7.126)}$ である

(9)

標本の大きさをn、標本平均を$\bar{x}$、標本変量平均を$\bar{X}$とする。有意水準5%のもとで、H_0を検定するとき
その棄却域は

$$\bar{x} < \mu_0 - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{または} \quad \bar{x} > \mu_0 + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \cdots\cdots ①$$

である。（$\because u(0.025) = 1.960$）
ここで真の平均値を$\mu_0 + 0.5\sigma$とした場合を考える。
題意より、$\bar{x}$をとったとき、①の範囲となる確率が99%以上となればよい。
（真の平均値が$\mu_0 + 0.5\sigma$より大きければ①の範囲となる確率は99%以上となる）
すなわち、

$$1 - P\left\{\mu_0 - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \geq 0.99$$

$\bar{X}$は$N\left(\mu_0 + 0.5\sigma, \sigma^2/n\right)$に従うから、

$$P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{2} - 1.96 < \frac{\bar{X} - (\mu_0 + 0.5\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}} < -\frac{\sqrt{n}}{2} + 1.96\right\} \leq 0.01$$

となるので、$-\dfrac{\sqrt{n}}{2} + 1.96 \leq -u(0.01)$となる$n$を求めればよい。

（$-\dfrac{\sqrt{n}}{2} - 1.96$以下となる確率は極めて小さいためゼロとしてよい）

$$\therefore -\frac{\sqrt{n}}{2} + 1.96 \leq -2.326$$

$$n \geq 73.47\cdots$$

また、逆に真の平均値を$\mu_0 - 0.5\sigma$として同じnが得られる。
よって、標本の大きさは、$\boxed{74}$ 以上とすればよい。

問題３

(1)　Xの分布関数をF(x)とすると

$$P(x<X<x+\Delta x \mid X>x)=\frac{P(x<X\leq x+\Delta x)}{P(X>x)}$$
$$=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)}$$
$$=\frac{F'(x)\cdot\Delta x}{1-F(x)}$$

よって、題意より

$$\frac{F'(x)}{1-F(x)}=K \quad (x>0)$$
$$\int\frac{F'(x)}{1-F(x)}dx=\int Kdx$$
$$-\log(1-F(x))=Kx+C$$
$$1-F(x)=e^{-Kx-C}$$

$F(0)=0$　より　$e^{-C}=1$　よって

$$F(x)=1-e^{-Kx}$$

よって、Xの確率密度関数は

$$F'(x)=Ke^{-Kx} \quad (x>0)$$

(2)

(1)よりXは指数分布に従う。したがって指数分布の検定を行う。

帰無仮説　$H_0:\mu=\mu_0=500$

対立仮説　$H_1:\mu>=\mu_0$　とすると

$\frac{2n\overline{X}}{\mu_0}$は自由度2ｎの$\chi^2$-分布に従うので、

$$\chi^2=2n\overline{x}/\mu_0=2\cdot20\cdot730/500=58.4$$

$$\chi^2_{2n}(0.05)=\chi^2_{40}(0.05)=55.8$$

$\chi^2>\chi^2_{2n}(0.05)$　より、H_0は棄却される。

よって、平均寿命は伸びたといえる。

問題４

(1)尤度関数は、 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i}p$ であるから、

$L(p)$を最大とならしめるｐ の値を求めるには、

$$\frac{\partial}{\partial p}\log L(p)=\frac{\partial}{\partial p}\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i}p=\frac{\partial}{\partial p}\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\times\log(1-p)+n\log p\right\}=0$$

を解けばよいこと になる。

$$\frac{\partial}{\partial p}\log L(p)=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}+\frac{n}{p}=0$$

$$p=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i+n}$$

よって、 pの最尤推定量は、$\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i+n}$ となる。

(2) yは、n回成功を得るまでの失敗の数であるから、Yの確率関数P(Y = y)は、

$$P(Y=y)={}_{y+n-1}C_y(1-p)^y p^n \qquad \cdots\cdots①$$

となる。

(参考：①式の証明)

ｎがｎ+1の時にも成立することを証明する。

$$P[X_1+X_2+\cdots+X_n+X_{n+1}=y]=\sum_{i=0}^{y}P[X_1+X_2+\cdots+X_n=i、X_{n+1}=y-i]$$

$$=\sum_{i=0}^{y}P[X_1+X_2+\cdots+X_n=i]\times P[X_{n+1}=y-i]$$

$$=\sum_{i=0}^{y}{}_{i+n-1}C_i(1-p)^i p^n\times(1-p)^{y-i}p$$

$$=(1-p)^y p^{n+1}\sum_{i=0}^{y}{}_{i+n-1}C_i$$

$$=(1-p)^y p^{n+1}\sum_{i=0}^{y}{}_{i+n-1}C_i$$

$$=(1-p)^y p^{n+1}\sum_{i=0}^{y}{}_{i+n-1}C_i$$

$$={}_{y+n}C_y\times(1-p)^y p^{n+1}$$

となり、①式にｎ＋１を入れた算式と同じであり、成立する。

(3)　不偏性の条件式から、

$$\sum_{y=0}^{\infty} A(y)\,{}_{y+n-1}C_y (1-p)^y p^n = p$$

ここで、$(1-p)=\theta$　とおく。

$$\sum_{y=0}^{\infty} A(y)\frac{(y+n-1)!}{y!(n-1)!}(\theta)^y = (1-\theta)^{1-n}$$

となる。また、二項定理を用いると、

$$\sum_{y=0}^{\infty} A(y)\frac{(y+n-1)!}{y!(n-1)!}(\theta)^y = \sum_{t=0}^{\infty}\begin{pmatrix}1-n \\ t\end{pmatrix}(-\theta)^t = \sum_{t=0}^{\infty}\begin{pmatrix}t+n-2 \\ t\end{pmatrix}(\theta)^t$$

$$\sum_{y=0}^{\infty} A(y)\frac{(y+n-1)!}{y!(n-1)!}(\theta)^y = = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{(t+n-2)!}{t!(n-2)!}(\theta)^t$$

常に上記算式が成り立つより、下記の算式が成立する。

$$A(y)\frac{(y+n-1)!}{y!(n-1)!} = \frac{(y+n-2)!}{y!(n-2)!}$$

よって、

$$A(y) = \frac{n-1}{y+n-1}$$

したがって、pの不偏推定量$A(y)$は、$\dfrac{n-1}{Y+n-1}$　となる。