保険数学2（問題）

1．次の（1）から（5）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔(A) から (E) のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。 (40点)

（1）x歳加入、2年満期定期保険（保険金即時払）において、死因iによる死亡の保険金額を1、死因i以外の死亡の保険金額を2とする。いま、正の値tについて、死因iによる死力$\mu_{x+t}^{(i)}=\dfrac{t}{10}$、死因$i$以外の死力$\mu_{x+t}^{(j)}=\dfrac{t}{20}$とするとき、この保険の一時払純保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、$\delta=0$、$e^{-0.3}=0.7408$とする。

（A）0.3444　（B）0.3447　（C）0.3450　（D）0.3453　（E）0.3456

（2）x歳加入、n年満期養老保険（保険金額1、保険金年末払）において、営業保険料の値が一時払のとき0.43447、年払全期払込のとき0.03561、年払m年払込のとき0.05649とすると、x歳加入、m年満期養老保険（保険金額1、保険金年末払）の一時払営業保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、予定事業費は以下のとおりとする。

	一　時　払	年　　払
予定新契約費	新契約時に保険金額の25‰	新契約時に保険金額の25‰
予定集金経費		保険料払込のつど、営業保険料の3％
予定維持費	毎年始に保険金額の2‰	保険料払込中は毎年始に保険金額の3‰ 保険料払済後は毎年始に保険金額の2‰

（A）0.653　（B）0.655　（C）0.657　（D）0.659　（E）0.661

（3）x歳加入、一時払n年満期生存保険（保険金額1）の契約が多数あり、その契約日はすべて同じ年の4月1日であるとする。第t保険年度始の契約はℓ_{x+t-1}件、第t保険年度の予定死亡率q_{x+t-1}は0.005、実際利回りは3.5％、予定利率は4.0％とするとき、この年度の剰余金は0であるという。この年度の実際死亡率に最も近いのは次のうちどれか。ただし、死亡以外の脱退はないものとし、予定事業費、実際事業費は0、t＜nとする。

（A）0.0092　（B）0.0094　（C）0.0096　（D）0.0098　（E）0.0100

（4）40歳加入、年払全期払込20年満期定期保険（保険金額1、保険金年末払）において、7年経過時点で保険料が払い込めなくなったので、第8回目の保険料から自動的に保険料振替貸付[注]が行なわれたが、当該貸付は1回のみ行なわれ2回目（第9回目の保険料分）は不可能であった。

このときの貸付金に対する利率に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、貸付金については1年単位で利息が元金に繰り入れられるものとし、7年経過時点までは保険料は正常に払い込まれており、保険料振替貸付以外の貸付はないものとする。また、純保険料$P^{1}_{40:\overline{20}|}$は0.003826、営業保険料$P^{*1}_{40:\overline{20}|}$は0.007683とし、t年経過後の平準純保険料式責任準備金${}_tV^{1}_{40:\overline{20}|}$および解約返戻金${}_tW$は以下のとおりとする。

t	7	8	9
${}_tV^{1}_{40:\overline{20}|}$	0.015167	0.016850	0.018261
${}_tW$	0.012767	0.015250	0.017461

（A）5％　（B）6％　（C）7％　（D）8％　（E）9％

（注）保険料の払い込みがないまま猶予期間が過ぎると、契約は失効することになる。
しかし、ある一定の条件を満たすときには会社が自動的に保険料を立て替えて契約を有効に継続させる。これを保険料振替貸付という。

（5）x歳加入、年払全期払込20年満期生存保険（保険金額1）において、第t年度の死亡に対しては第t保険年度末10年チルメル式責任準備金を年末に支払うものとするとき、この保険の年払営業保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、予定事業費は予定新契約費$\alpha = 0.02$のみとし、チルメル割合は予定新契約費に等しいものとする。また、$v^{10} = 0.61$、$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 12.90$、$\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = 8.00$、$\ddot{a}_{\overline{20}|} = 13.10$、$\ddot{a}_{\overline{10}|} = 8.10$とする。

（A）0.030　（B）0.033　（C）0.036　（D）0.039　（E）0.042

2．死亡表がゴムパーツの法則に従うとき、すなわち $\mu_x = BC^x$（B、Cは定数）のとき、次の二つの条件付生命確率をC^w、C^x、C^y、C^zを用いて表わせ。なお、必ず計算過程も示すこと。解答用紙は汎用解答用紙を使用すること。（20点）

（1）$_{\infty}\vartheta^{\ 1}_{xyz}$

（2）$_{\infty}\vartheta^{\ \ \ 3}_{\underset{1\,2}{wxyz}}$

3．次の①～⑤の条件を満たす終身保険の連続払純保険料の値を求めよ。なお、必ず計算過程も示すこと。解答用紙は汎用解答用紙を使用すること。（20点）

①夫、妻、子供（1人）の3人を被保険者とする。

②夫が妻および子供よりも先に死亡した場合は、保険金1を即時に支払うとともに、以後は保険料の払込を免除し、また、年額0.1の年金を子供が生存する限り連続して支払う。

③妻が夫および子供よりも先に死亡した場合は、保険金0.5を即時に支払うとともに年額0.1の年金を子供が生存する限り連続して支払う。その後、夫が子供よりも先に死亡した場合は、保険金0.5を即時に支払い、以後は保険料の払込を免除する。

④子供が死亡した場合はその時点で契約は消滅する。

⑤利力は0.01、死力は年齢に関係なく男性0.02、女性0.01、子供の性別は男女ともに0.5の確率であり、保険料は子供の性別によらず同一とする。

4．死亡・就業不能脱退残存表において、就業者の死力をμ^{ad}_x、就業不能の瞬間発生率をμ^{ai}_x、就業不能者の死力をμ^{id}_xとするとき、次の問いに答えよ。ただし、就業不能状態からの回復はないものとする。（20点）

（1）次の空欄に当てはまる適当な算式を所定の解答用紙に記入せよ。

（i）$_t p^{ai}_x = \dfrac{1}{\ell^{aa}_x}(\ell^{ii}_{x+t} - \boxed{\quad ① \quad})$

$= \int_0^t \boxed{\quad ② \quad}\, ds$

$= {}_t p^i_x \int_0^t \boxed{\quad ③ \quad}\, ds$

（ii）$\dfrac{d}{dt}\,{}_t p^{ai}_x = {}_t p^{aa}_x \cdot \mu^{ai}_{x+t} - \boxed{\quad ④ \quad}$

（iii）$\mu_{x+t}^{id} = \mu$（μは正の定数）の場合

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{{}_t p_x^{ai}}{{}_t p_x^{i}}\right) = \boxed{\quad ⑤ \quad}$$

（2）（1）（iii）の仮定のもとで、${}_t p_x^{aa} \cdot \mu_{x+t}^{ai} = {}_t p_x^{i}$が成立していたとすると、

${}_t p_x^{ai} = t \cdot e^{-\mu t}$が成り立つことを証明せよ。

以上

（注）出題した問題の一部に誤りがあり、それを訂正して問題を掲載した。

なお、実際の採点にあたっては、すべての受験者に不利な取扱とならないように配点の配慮をした。

保 険 数 学 2（解答例）

1.

設 問 番 号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
解 答 欄	(E)	(C)	(D)	(E)	(A)

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) …… (E)

一時払純保険料をPとすると

$$P=\int_0^2 v^t\,{}_tp_x\,\mu^{(i)}_{x+t}\,dt+2\int_0^2 v^t\,{}_tp_x\,\mu^{(j)}_{x+t}\,dt=\int_0^2 {}_tp_x\frac{t}{10}\,dt+2\int_0^2 {}_tp_x\frac{t}{20}\,dt$$

$$=\int_0^2 \frac{t}{5}\,{}_tp_x\,dt$$

ここで　$ {}_tp_x=e^{-\int_0^t\{\mu^{(i)}_{x+s}+\mu^{(j)}_{x+s}\}ds}=e^{-\int_0^t\frac{3s}{20}ds}=e^{-\frac{3}{40}t^2}$

$$\therefore\quad P=\int_0^2\frac{t}{5}e^{-\frac{3}{40}t^2}\,dt=\frac{4}{3}(1-e^{-0.3})=0.3456$$

(2) …… (C)

題意より　$A_{x:\overline{n}|}+0.025+0.002\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=0.43447$

$$\frac{A_{x:\overline{n}|}+0.025+0.003\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-0.03)\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=0.03561$$

$$\frac{A_{x:\overline{n}|}+0.025+0.003\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}+0.002\,(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{m}|})}{(1-0.03)\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}=0.05649$$

これらより　$A_{x:\overline{n}|}\fallingdotseq 0.38356$　　$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\fallingdotseq 12.95313$　　$\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\fallingdotseq 8.07629$

また、$A_{x:\overline{m}|}=1-d\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}=1-\dfrac{1-A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\fallingdotseq 0.61565$

従って、求める営業保険料は

$A_{x:\overline{m}|}+0.025+0.002\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\fallingdotseq 0.65680$

(3) …… (D)

予定利率をi、実際利回りをi'、実際死亡率をq'_{x+t-1}、剰余金をGとすると、

$\ell_{x+t-1}\cdot{}_{t-1}V^{1}_{x:\overline{n}|}(1+i')-\ell_{x+t-1}(1-q'_{x+t-1})\,{}_tV^{1}_{x:\overline{n}|}=G$ ……①

$\ell_{x+t-1}\cdot{}_{t-1}V^{1}_{x:\overline{n}|}(1+i)-\ell_{x+t-1}(1-q_{x+t-1})\,{}_tV^{1}_{x:\overline{n}|}=0$ ……②

①、②およびG＝0より

$$\frac{1+i'}{1+i}=\frac{1-q'_{x+t-1}}{1-q_{x+t-1}}$$

$\therefore\ \ q'_{x+t-1} = 1 - \left(\dfrac{1+i'}{1+i}\right)(1 - q_{x+t-1}) \fallingdotseq 0.0098$

(4) …… (E)

tにおける貸付金総額を$_t$L、貸付金に対する利率をi'とすると

$({}_t\mathrm{L} + \mathrm{P}^*{}^{\ 1}_{40:\overline{20|}})(1+i') \leqq {}_{t+1}\mathrm{W}$となれば貸付可能となる。

題意より　$({}_7\mathrm{L} + \mathrm{P}^*{}^{\ 1}_{40:\overline{20|}})(1+i') \leqq {}_8\mathrm{W}$ ……①

$({}_8\mathrm{L} + \mathrm{P}^*{}^{\ 1}_{40:\overline{20|}})(1+i') > {}_9\mathrm{W}$ ……②

ここで　${}_7\mathrm{L} = 0$, ${}_8\mathrm{L} = \mathrm{P}^*{}^{\ 1}_{40:\overline{20|}}(1+i')$

従って、①より　$i' \leqq 0.9849\cdots$

②および$1+i'>0$より　$1+i' > \dfrac{-1+\sqrt{1+\dfrac{4\,{}_9\mathrm{W}}{\mathrm{P}^*{}^{\ 1}_{40:\overline{20|}}}}}{2} \fallingdotseq 1.08829$

$\therefore\ \ 0.08829 < i' \leqq 0.9849$

(5) …… (A)

平準純保険料をP、第1年度の10年チルメル式純保険料をP_1、第2年度以降第10年度までの10年チルメル式純保険料をP_2、第t年度末10年チルメル式責任準備金を${}_t\mathrm{V}^{[10z]}$とすると

$\mathrm{P}_1 = v q_x \cdot {}_1\mathrm{V}^{[10z]} + v p_x \cdot {}_1\mathrm{V}^{[10z]} = v\ {}_1\mathrm{V}^{[10z]}$

$\mathrm{P}_2 + {}_t\mathrm{V}^{[10z]} = v q_{x+t} \cdot {}_{t+1}\mathrm{V}^{[10z]} + v p_x \cdot {}_{t+1}\mathrm{V}^{[10z]} = v\ {}_{t+1}\mathrm{V}^{[10z]}\quad (1 \leqq t \leqq 9)$

$\mathrm{P} + {}_t\mathrm{V}^{[10z]} = v\ {}_{t+1}\mathrm{V}^{[10z]}\quad (10 \leqq t \leqq 19)$ ……③

また、$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P} + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} - \alpha$、$\mathrm{P}_2 = \mathrm{P} + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}$より

$\mathrm{P} + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} - \alpha = v\ {}_1\mathrm{V}^{[10z]}$ ……①

$\mathrm{P} + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} + {}_t\mathrm{V}^{[10z]} = v\ {}_{t+1}\mathrm{V}^{[10z]}\quad (1 \leqq t \leqq 9)$ ……②

②、③の両辺にv^tを掛けて、①、②、③を加えると

$$\mathrm{P}\sum_{t=0}^{19} v^t + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}\sum_{t=0}^{9} v^t - \alpha = v^{20} \cdot {}_{20}\mathrm{V}^{[10z]}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{P} = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{20|}}}\left(v^{20} + \alpha - \frac{\alpha\ddot{a}_{\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}\right) \fallingdotseq 0.028385$$

従って、営業保険料は

$$\mathrm{P} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}}} \fallingdotseq 0.029935$$

2. (1) $${}_\infty q^{\ 1}_{xyz} = \int_0^\infty {}_t p_{xyz}\, \mu_{x+t}\, dt = \int_0^\infty {}_t p_{xyz}\, Bc^{x+t}\, dt$$

$$= \frac{c^x}{c^x + c^y + c^z}\int_0^\infty {}_t p_{xyz}\, Bc^t\,(c^x + c^y + c^z)\, dt$$

$$=\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}\int_0^\infty {}_tp_{xyz}(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\mu_{z+t})\,dt$$

$$=\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}\int_0^\infty {}_tp_{xyz}\mu_{x+t,\,y+t,\,z+t}\,dt=\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}{}_\infty q_{xyz}$$

$$\therefore\quad {}_\infty q^{\ 1}_{xyz}=\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}$$

(2) $${}_\infty q^{\ \ 3}_{\underset{1\,2}{wxyz}}=\int_0^\infty {}_tq_w\cdot{}_tp_{xyz}\cdot\mu_{x+t}\cdot{}_\infty q^{\ 1}_{y+t,\,z+t}\,dt$$

ここで${}_\infty q^{\ 1}_{y+t,\,z+t}$は（1）と同様にして計算すると${}_\infty q^{\ 1}_{y+t,\,z+t}=\dfrac{c^{y+t}}{c^{y+t}+c^{z+t}}$

$${}_\infty q^{\ \ 3}_{\underset{1\,2}{wxyz}}=\int_0^\infty {}_tq_w\cdot{}_tp_{xyz}\cdot\mu_{x+t}\cdot\frac{c^{y+t}}{c^{y+t}+c^{z+t}}\,dt$$

$$=\frac{c^y}{c^y+c^z}\int_0^\infty(1-{}_tp_w)\,{}_tp_{xyz}\cdot\mu_{x+t}\,dt$$

$$=\frac{c^y}{c^y+c^z}\left({}_\infty q^{\ 1}_{xyz}-{}_\infty q^{\ \ 1}_{wxyz}\right)$$

${}_\infty q^{\ \ 1}_{wxyz}$は（1）と同様にして計算すると${}_\infty q^{\ \ 1}_{wxyz}=\dfrac{c^x}{c^w+c^x+c^y+c^z}$

$$\therefore\quad {}_\infty q^{\ \ 3}_{\underset{1\,2}{wxyz}}=\frac{c^y}{c^y+c^z}\left(\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}-\frac{c^x}{c^w+c^x+c^y+c^z}\right)$$

$$=\frac{c^w\cdot c^x\cdot c^y}{(c^y+c^z)(c^x+c^y+c^z)(c^w+c^x+c^y+c^z)}$$

3．夫をx、妻をy、子供をzとすると

給付現価は

$$\bar{A}^{1}_{xyz}+0.5\bar{A}_{x\overset{1}{y}z}+0.5\bar{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z}+0.1\bar{a}_{xy|z}$$

$$=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\cdot{}_tp_y\cdot{}_tp_z\,\mu_{x+t}\,dt+0.5\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\cdot{}_tp_y\cdot{}_tp_z\mu_{y+t}dt$$

$$+0.5\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x(1-{}_tp_y)\,{}_tp_z\,\mu_{x+t}\,dt+0.1\int_0^\infty v^t(1-{}_tp_x\cdot{}_tp_y)\,{}_tp_z\,dt\ \cdots①$$

ここで　${}_tp_x=e^{-\int_0^t\mu_{x+s}ds}=e^{-0.02t}$、${}_tp_y=e^{-0.01t}$、$v^t=e^{-\delta t}=e^{-0.01t}$

$${}_tp_z=\begin{cases}e^{-0.02t} & (\text{zが男の場合})\\ e^{-0.01t} & (\text{zが女の場合})\end{cases}$$

子供が男の場合

$$①=0.02\int_0^\infty e^{-0.06t}\,dt+0.005\int_0^\infty e^{-0.06t}\,dt+0.01\int_0^\infty(e^{-0.05t}-e^{-0.06t})\,dt$$

$$+0.1\int_0^\infty(e^{-0.03t}-e^{-0.06t})\,dt$$

$$=-0.085\int_0^\infty e^{-0.06t}\,dt+0.01\int_0^\infty e^{-0.05t}\,dt+0.1\int_0^\infty e^{-0.03t}\,dt$$

$$=-\frac{85}{60}+\frac{1}{5}+\frac{10}{3}=\frac{127}{60}$$

子供が女の場合

$$①= 0.02\int_0^\infty e^{-0.05t}\,dt + 0.005\int_0^\infty e^{-0.05t}\,dt + 0.01\int_0^\infty (e^{-0.04t} - e^{-0.05t})\,dt$$
$$+ 0.1\int_0^\infty (e^{-0.02t} - e^{-0.05t})\,dt$$
$$= \frac{71}{20}$$

従って、給付現価は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{127}{60} + \frac{71}{20}\right) = \frac{17}{6}$$

次に連続払純保険料を$\bar{P}$とすると、収入現価は

$$\bar{P}\,\bar{a}_{xz} = \bar{P}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x \cdot {}_tp_z\,dt \quad \cdots\cdots ②$$

子供が男の場合

$$②= \bar{P}\int_0^\infty e^{-0.05t}\,dt = \frac{1}{0.05}\,\bar{P}$$

子供が女の場合

$$②= \bar{P}\int_0^\infty e^{-0.04t}\,dt = \frac{1}{0.04}\,\bar{P}$$

従って、収入現価は、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.04}\right)\bar{P} = \frac{45}{2}\,\bar{P}$$

収支相等の原則より

$$\frac{45}{2}\,\bar{P} = \frac{17}{6} \qquad\qquad \bar{P} = \frac{17}{135}$$

4. (1) (i) $${}_tp_x^{ai} = \frac{1}{\ell_x^{aa}}(\ell_{x+t}^{ii} - \ell_x^{ii} \cdot {}_tp_x^{i}) \qquad \left[= \frac{1}{\ell_x^{aa}}(\ell_{x+t}^{ii} - \ell_x^{ii}\ e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{id} ds}\right]$$
$$= \int_0^t {}_sp_x^{aa} \cdot \mu_{x+s}^{ai} \cdot {}_{t-s}p_{x+s}^{i}\,ds \qquad \left[= \int_0^t e^{-\int_0^s (\mu_{x+\tau}^{ad} + \mu_{x+\tau}^{ai})d\tau} \cdot \mu_{x+s}^{ai} \cdot e^{-\int_0^{t-s} \mu_{x+s+\tau}^{id} d\tau}\right]$$
$$= {}_tp_x^{i}\int_0^t \frac{{}_sp_x^{aa}}{{}_sp_x^{i}}\,\mu_{x+s}^{ai}\,ds \qquad \left[= {}_tp_x^{i}\int_0^t e^{-\int_0^s (\mu_{x+\tau}^{ad} + \mu_{x+\tau}^{ai} - \mu_{x+\tau}^{id})d\tau} \cdot \mu_{x+s}^{ai}\,ds\right]$$

(ii) $$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{ai} = {}_tp_x^{i} \cdot \frac{{}_tp_x^{aa}}{{}_tp_x^{i}}\,\mu_{x+t}^{ai} + \left(\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{i}\right)\int_0^t \frac{{}_sp_x^{aa}}{{}_sp_x^{i}}\,\mu_{x+s}^{ai}\,ds$$
$$= {}_tp_x^{aa}\,\mu_{x+t}^{ai} - {}_tp_x^{i}\,\mu_{x+t}^{id}\,\frac{{}_tp_x^{ai}}{{}_tp_x^{i}} \qquad \left[= {}_tp_x^{aa}\,\mu_{x+t}^{ai} - {}_tp_x^{i}\,\mu_{x+t}^{id}\int_0^t \frac{{}_sp_x^{aa}}{{}_sp_x^{i}}\,\mu_{x+s}^{ai}\,ds\right]$$
$$= {}_tp_x^{aa}\,\mu_{x+t}^{ai} - {}_tp_x^{ai}\,\mu_{x+t}^{id}$$

(iii) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{{}_tp_x^{ai}}{{}_tp_x^{i}}\right) = \frac{d}{dt}\,(e^{\mu t}\,{}_tp_x^{ai}) = \mu e^{\mu t}\,{}_tp_x^{ai} + e^{\mu t}({}_tp_x^{aa}\,\mu_{x+t}^{ai} - {}_tp_x^{ai}\,\mu)$$

$$= e^{\mu t}\, {}_t p_x^{aa} \mu_{x+t}^{ai} \qquad \left[= \frac{{}_t p_x^{aa} \mu_{x+t}^{ai}}{{}_t p_x^{i}} \right]$$

①	$\ell_x^{ii} \cdot {}_t p_x^{i}$ $\left(\text{または}\ \ \ell_x^{ii} e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{id} ds}\right)$
②	${}_s p_x^{aa} \cdot \mu_{x+s}^{ai} \cdot {}_{t-s} p_{x+s}^{i}$ $\left(\text{または}\ \ e^{-\int_0^s (\mu_{x+\tau}^{ad} + \mu_{x+\tau}^{ai}) d\tau} \cdot \mu_{x+s}^{ai} \cdot e^{-\int_0^{t-s} \mu_{x+s+\tau}^{id} d\tau}\right)$
③	$\frac{{}_s p_x^{aa}}{{}_s p_x^{i}} \mu_{x+s}^{ai}$ $\left(\text{または}\ \ e^{-\int_0^s (\mu_{x+\tau}^{ad} + \mu_{x+\tau}^{ai} - \mu_{x+\tau}^{id}) d\tau} \cdot \mu_{x+s}^{ai}\right)$
④	${}_t p_x^{ai} \mu_{x+t}^{id}$ $\left(\text{または}\ \ \mu_{x+t}^{id}\, {}_t p_x^{i} \int_0^t \frac{{}_s p_x^{aa}}{{}_s p_x^{i}} \mu_{x+s}^{ai} ds\right)$
⑤	$e^{\mu t} \cdot {}_t p_x^{aa} \cdot \mu_{x+t}^{ai}$ $\left(\text{または}\ \ \frac{{}_t p_x^{aa} \mu_{x+t}^{ai}}{{}_t p_x^{i}}\right)$

(2)

(1)（iii）で $\frac{d}{dt}\left(\frac{{}_t p_x^{ai}}{{}_t p_x^{i}}\right) = e^{\mu t} \cdot {}_t p_x^{aa} \cdot \mu_{x+t}^{ai}$ より

${}_t p_x^{aa} \cdot \mu_{x+t}^{ai} = e^{-\mu t} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{{}_t p_x^{ai}}{{}_t p_x^{i}}\right)$

一方題意より

${}_t p_x^{aa} \cdot \mu_{x+t}^{ai} = {}_t p_x^{i}$ であるが

${}_t p_x^{i} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{id} ds} = e^{-\int_0^t \mu dx} = e^{-\mu t}$ であるから

${}_t p_x^{aa} \cdot \mu_{x+t}^{ai} \cdot e^{-\mu t}$

ゆえに

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{{}_t p_x^{ai}}{{}_t p_x^{i}}\right) = 1 \qquad \text{となる。}$$

この両辺を0からtまで積分する。

すなわち $\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{{}_t p_x^{ai}}{{}_t p_x^{i}}\right) dt = t$

$$\left[\frac{{}_t p_x^{ai}}{{}_t p_x^{i}}\right]_0^t = t$$

ここで ${}_t p_x^{ai}$ はx歳の就業者がt年以内に就業不能となりx＋t歳まで生存している確率である。

t＝0の時点では就業者の状態で生存中であり ${}_0 p_x^{ai} = 0$

したがって $\frac{{}_t p_x^{ai}}{{}_t p_x^{i}} - \frac{{}_0 p_x^{ai}}{{}_0 p_x^{i}} = t$ において $\frac{{}_0 p_x^{ai}}{{}_0 p_x^{i}} = 0$

ゆえに　${}_tp_x^{ai} = t \cdot {}_tp_x^i = t \cdot e^{-\mu t}$ が示された。

以　上