保 険 数 学 1（問題）

1．次の（1）から（10）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔(A) から (E) のいずれか一つ〕を記入せよ。（50点）

（1）次の①～⑤のうちiに等しいものはいくつあるか。

① $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}-\dfrac{1}{s_{\overline{n}|}}$　② $\dfrac{a_{\overline{n}|}}{(Ia)_{\overline{n}|}-a_{\overline{n}|}+n\cdot{}_{n|}a_{\infty}}$

③ $\dfrac{D_x}{D_{x+1}}p_x-1$　④ $\dfrac{p_x\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-1}$　⑤ $\dfrac{\ddot{a}_x-a_x-A_x}{A_x+a_x}$

(A) 1つ　(B) 2つ　(C) 3つ　(D) 4つ　(E) 5つ

（2）40歳の人が年金年額1を各年始に受けとる即時開始終身年金に加入し、同時に必要掛金全額を支払った。その人は受けとった年金年額1を利率iで積み立てを行ない、その人の死亡した保険年度の末日に積立額全額を遺族が受け取れるようにしておいた。遺族が受け取る額の期待値が22.00のとき、利率iに最も近い値は次のうちどれか。但し${}_tp_{40}=(0.907)^t$とする。

(A) 4.50％　(B) 4.75％　(C) 5.00％　(D) 5.25％　(E) 5.50％

（3）$\mu_x=\dfrac{b}{a}x^{b-1}$　$(a>0,\ b>1)$ のとき、$\mathring{e}_0$は次のうちどれに等しいか。

但し、$c=\dfrac{1}{b}$とし$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}dy$とする。

(A) $a^c\cdot\Gamma(c)$　(B) $a^c\cdot\Gamma(1+c)$　(C) $c\cdot a^c\cdot\Gamma(1+c)$　(D) $c\cdot\log_e a\cdot\Gamma(c)$　(E) $c\cdot\log_e a\cdot\Gamma(1+c)$

（4）定常社会で$\mu_x=\dfrac{2}{120-x}$　$(0\leqq x<120)$ のとき、この人口の平均年齢は次のうちどれに等しいか。

(A) 20　(B) 30　(C) 40　(D) 50　(E) 60

（5）$\ell_x=100-x$　$(0\leqq x\leqq 100)$, $i=0.0400$であるときP_{50}の値に最も近い値は次のうちどれか。

但し、必要ならば、$v^{50}\fallingdotseq 0.1407126$を用いよ。

(A) 0.0290　(B) 0.0293　(C) 0.0296　(D) 0.0299　(E) 0.0302

（6）$P_x=\dfrac{1}{20}$, $p_x\cdot\ddot{a}_{x+1}=12.00$のとき予定利率$i$の値に最も近いのは次のうちどれか。

(A) 3.00％　(B) 3.25％　(C) 3.50％　(D) 3.75％　(E) 4.00％

（7）x歳加入、保険期間n年（保険料全期払込、死亡の場合の給付はすべて死亡保険年度末払、$n>1$）のときの年払純保険料が、各種保険につきア～ウであった。

ア．満期保険金1、死亡保険金1の養老保険では0.0156

イ．満期保険金2、死亡保険金1の保険では0.0288

ウ．満期保険金1、死亡の場合に既払込純保険料を支払う保険では0.0138

このとき、満期保険金1、死亡の場合に既払込純保険料の2倍を支払う保険の年払純保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.0143　(B) 0.0145　(C) 0.0147　(D) 0.0149　(E) 0.0151

(8) ${}_{20}V_{60} = 2 \times {}_{10}V_{60}$の関係があるとき、$\ddot{a}_{80}$は次のうちどれに等しいか。

(A) $3\ddot{a}_{60} - 2\ddot{a}_{70}$　(B) $3\ddot{a}_{70} - 2\ddot{a}_{60}$　(C) $2\ddot{a}_{60} - \ddot{a}_{70}$　(D) $2\ddot{a}_{70} - \ddot{a}_{60}$　(E) $\ddot{a}_{60} - \ddot{a}_{70}$

(9) x歳加入、n年満期養老保険（保険料年払かつ全期払込、保険金額1、保険金期末払、$n > 1$）において、第t保険年度末の危険保険金を R_t（$= 1 - {}_tV_{x:\overline{n|}}$）とするとき、

$R_{t+1} = \boxed{} \times (R_t - P_{x:\overline{n|}} - d)$ となる。$\boxed{}$ は次のうちどれに等しいか。

(A) $\dfrac{C_{x+t}}{D_x}$　(B) $\dfrac{C_{x+t+1}}{D_{x+t}}$　(C) $\dfrac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$　(D) $\dfrac{D_x}{D_{x+t}}$　(E) $\dfrac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}$

(10) $A_{x:\overline{n|}} = 0.50$, $d = 0.05$ のとき、${}_{n-1}V_{x:\overline{n|}}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.85　(B) 0.88　(C) 0.90　(D) 0.93　(E) 0.95

2．一年を通じて死亡が一様に起こると仮定し、さらに $v^{\frac{t}{k}} \fallingdotseq 1 - \dfrac{t}{k} i\ (1 \leqq t \leqq k)$ と仮定する。このとき、まず $a^{(k)}_{x:\overline{1|}}$ を求め、その結果を用いて $a^{(k)}_x$ の近似式を求めたい。次の$\boxed{\text{A1}}$ ～ $\boxed{\text{J2}}$に適当な数値又は記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。（25点）

死亡に関する仮定より ${}_{\frac{t}{k}}p_x = 1 - \boxed{\text{A1}} \cdot q_x$ であるので

$$a^{(k)}_{x:\overline{1|}} = \boxed{\text{B1}} \left\{ v^{\frac{1}{k}}(1 - \boxed{\text{B2}}) + v^{\frac{2}{k}}(1 - \boxed{\text{B3}}) + \cdots\cdots + v(1 - \boxed{\text{B4}}) \right\}$$

$$= \boxed{\text{C1}} (v^{\frac{1}{k}} + v^{\frac{2}{k}} + \cdots\cdots + v) - \boxed{\text{C2}} (v^{\frac{1}{k}} + 2v^{\frac{2}{k}} + \cdots\cdots + kv)$$

ここで $v^{\frac{t}{k}}$ に関する仮定 $v^{\frac{t}{k}} \fallingdotseq 1 - \dfrac{t}{k} i$ を代入すると

$$= \boxed{\text{D1}} (k - \boxed{\text{D2}}\ i) - \boxed{\text{D3}} \left(\frac{k(k+1)}{2} - \boxed{\text{D4}}\ i\right)$$

$$= (\boxed{\text{E1}} - \boxed{\text{E2}}\ i) - q_x (\boxed{\text{E3}} - \boxed{\text{E4}}\ i)$$

したがって

$$a^{(k)}_x = a^{(k)}_{x:\overline{1|}} + \boxed{\text{F1}}\ a^{(k)}_{x+1:\overline{1|}} + \boxed{\text{F2}}\ a^{(k)}_{x+2:\overline{1|}} + \cdots\cdots$$

$$= (\boxed{\text{G1}} - \boxed{\text{G2}}\ i)\ddot{a}_x - \left(\frac{k+1}{2k} - \boxed{\text{G3}}\ i\right)(1+i)\boxed{\text{G4}}$$

上式の i^2 の項を省略して整理すると

$$= (\boxed{\text{H1}} - \boxed{\text{H2}}\ i)\ddot{a}_x - (\boxed{\text{H3}} + \boxed{\text{H4}}\ i)(\boxed{\text{H5}} - d\boxed{\text{H6}})$$

$d = 1 - v \fallingdotseq i$ とし、かつ i^2 の項を省略すると

$$a^{(k)}_x \fallingdotseq \ddot{a}_x - \boxed{\text{I1}} - \boxed{\text{I2}}\ i$$

$$= a_x + \boxed{\text{J1}} - \boxed{\text{J2}}\ i$$

3．予定利率をiとするとき、純保険料Pの金利感応度FをF $= -\dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{di}$により定義する。

x歳加入n年満期養老保険（保険金額1、保険金期末払）の一時払純保険料をP_1、年払純保険料（保険料全期払込）をP_2とし、それぞれの金利感応度をF_1、F_2とするとき、次の各問に答えよ。（25点）

（1）次式が成り立つことを証明し解答用紙に記せ。

$$F_1 = \frac{P_1}{P_2}\left\{(1-v)\cdot F_2 + v^2\right\}$$

（2）ある予定利率iの近傍でF_1、F_2がいずれもvの一次式で表わされるとするとき、次式が成り立つことを証明し、解答用紙に記せ。

$F_1 - F_2 = k\cdot q_x\cdot v$ （kは定数）

保 険 数 学 1（解答例）

1.

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
解答欄	(D)	(C)	(B)	(B)	(A)	(A)	(B)	(D)	(E)	(C)

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解法を略記する。

(1) …… (D)

① $$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}-\frac{1}{s_{\overline{n}|}}=\frac{i}{1-v^n}-\frac{i}{(1+i)^n-1}=\frac{i}{1-v^n}-\frac{v^n\cdot i}{1-v^n}=i$$

② $$(Ia)_{\overline{n}|}-a_{\overline{n}|}+n\cdot{}_{n|}a_{\infty}=\frac{a_{\overline{n}|}}{d}-\frac{n\cdot v^n}{i}-a_{\overline{n}|}+n\cdot v^n\cdot a_{\infty}=a_{\overline{n}|}\left(\frac{1}{d}-1\right)=\frac{a_{\overline{n}|}}{i}$$

$$\left(\because\quad a_{\infty}=\frac{v}{1-v}=\frac{1}{i}\right)$$

$$\therefore\ \frac{a_{\overline{n}|}}{(Ia)_{\overline{n}|}-a_{\overline{n}|}+n\cdot{}_{n|}a_{\infty}}=i$$

③ $$\frac{D_x}{D_{x+1}}p_x-1=\frac{v^x\cdot\ell_x}{v^{x+1}\cdot\ell_{x+1}}\cdot\frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}-1=\frac{1}{v}-1=i$$

④ $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=1+v\cdot p_x\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$ より $\dfrac{p_x\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-1}=\dfrac{1}{v}=1+i\fallingdotseq i$

⑤ $A_x=1-d\ddot{a}_x$, $a_x=\ddot{a}_x-1$ より

$$\frac{\ddot{a}_x-a_x-A_x}{A_x+a_x}=\frac{\ddot{a}_x-(\ddot{a}_x-1)-(1-d\cdot\ddot{a}_x)}{(1-d\cdot\ddot{a}_x)+(\ddot{a}_x-1)}=\frac{d\cdot\ddot{a}_x}{(1-d)\ddot{a}_x}=\frac{d}{1-d}=i$$

(2) …… (C)

$$\begin{aligned}
\text{期待値}&=q_{40}(1+i)+{}_{1|}q_{40}\{(1+i)+(1+i)^2\}+{}_{2|}q_{40}\{(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3\}+\cdots\\
&=(1+i)(q_{40}+{}_{1|}q_{40}+{}_{2|}q_{40}+\cdots)+(1+i)^2({}_{1|}q_{40}+{}_{2|}q_{40}+\cdots)+(1+i)^3({}_{2|}q_{40}+\cdots)+\cdots\\
&=(1+i)+(1+i)^2\cdot p_{40}+(1+i)^3\cdot{}_2p_{40}+\cdots\\
&=(1+i)+(1+i)^2\times 0.907+(1+i)^3\times(0.907)^2+\cdots\\
&=\frac{1+i}{1-0.907\times(1+i)}=22
\end{aligned}$$

これを解いて $i\fallingdotseq 0.0499$

(3) …… (B)

$$\mathring{e}_0 = \int_0^\infty {}_tp_0\,dt = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t \mu_s ds\right\}dt = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t \frac{b}{a}\cdot s^{b-1}ds\right\}dt$$

$$= \int_0^\infty \exp\left\{-\left[\frac{1}{a}\cdot s^b\right]_0^t\right\}dt = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{a}\cdot t^b\right\}dt$$

ここで、$t = a^{\frac{1}{b}}\cdot y^{\frac{1}{b}}$ と置換すれば $dt = \frac{1}{b}\cdot a^{\frac{1}{b}}\cdot y^{\frac{1}{b}-1}dy$ より

$$= \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{a}\left(a^{\frac{1}{b}}\cdot y^{\frac{1}{b}}\right)^b\right\}\cdot\frac{1}{b}\cdot a^{\frac{1}{b}}\cdot y^{\frac{1}{b}-1}dy$$

$$= \int_0^\infty \exp\{-y\}\cdot\frac{1}{b}\cdot a^{\frac{1}{b}}\cdot y^{\frac{1}{b}-1}dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-y}\cdot c\cdot a^c\cdot y^{c-1}dy \qquad \left(\because\ c = \frac{1}{b}\right)$$

$$= a^c\cdot c\cdot\Gamma(c)$$

$$= a^c\cdot\Gamma(1+c) \qquad (\because\ \Gamma(c+1) = c\cdot\Gamma(c))$$

(4) …… (B)

$$\frac{\ell_x}{\ell_0} = \exp\left\{-\int_0^x \frac{2}{120-t}dt\right\} = \exp\left\{-2\int_0^x \frac{1}{120-t}dt\right\}$$

$120-t=y$ とおくと $-dy=dt$ より

$$= \exp\left\{-2\int_{120}^{120-x}(-1)\frac{1}{y}dy\right\} = \exp\left\{2\left[\log y\right]_{120}^{120-x}\right\}$$

$$= \exp\left\{\log\left(1-\frac{x}{120}\right)^2\right\} = \left(1-\frac{x}{120}\right)^2$$

総人口は $T_0 = \int_0^{120}\ell_x dx = \left[-\frac{120}{3}\cdot\ell_0\cdot\left(1-\frac{x}{120}\right)^3\right]_0^{120} = 40\ell_0$

総人口の年齢の合計は $\int_0^{120} x\cdot\ell_x dx = \ell_0\int_0^{120} x\cdot\left(1-\frac{x}{120}\right)^2 dx$

$$= \ell_0\left\{\left[-\frac{120}{3}\cdot x\ \left(1-\frac{x}{120}\right)^3\right]_0^{120} + \frac{120}{3}\int_0^{120}\left(1-\frac{x}{120}\right)^3 dx\right\}$$

$$= 40\ell_0\left[-\frac{120}{4}\left(1-\frac{x}{120}\right)^4\right]_0^{120}$$

$$= 40\cdot 30\ell_0$$

よって平均年齢は $\dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{120} x\cdot\ell_x dx = \dfrac{40\cdot 30\ell_0}{40\ell_0} = 30$

(5) …… (A)

$$P_x = \frac{M_x}{N_x} = \frac{d\cdot M_x}{D_x - M_x} \quad (\because \ M_x = D_x - d\cdot N_x)$$

ここで $D_x = v^x\cdot\ell_x = v^x(100-x)$ また、

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1} = (100-x) - \{100-(x+1)\} = 1 \text{ より}$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{99-x} v^{x+t+1} d_{x+t} = \sum_{t=0}^{99-x} v^{x+t+1} = v^{x+1}\cdot\frac{1-v^{100-x}}{1-v} = v^x\frac{1-v^{100-x}}{i}$$

$$\therefore \quad P_{50} = \frac{d\cdot M_{50}}{D_{50}-M_{50}} = \frac{d\cdot v^{50}\dfrac{1-v^{50}}{i}}{v^{50}(100-50) - v^{50}\dfrac{1-v^{50}}{i}} = \frac{d(1-v^{50})}{50i-(1-v^{50})}$$

$i = 0.04$ $\quad d = \dfrac{0.04}{1.04}$ $\quad v^{50} = 0.1407126$ を代入して $P_{50} \fallingdotseq 0.02897$

(6) …… (A)

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{1-d\cdot\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d = \frac{1}{\ddot{a}_x} - (1-v) \quad \cdots\cdots①$$

$\ddot{a}_x = 1 + v\cdot p_x\cdot\ddot{a}_{x+1}$ ……② $\qquad$ ①、②より $\ddot{a}_x$ を消去すると

$$P_x\cdot\ddot{a}_{x+1}\cdot v^2 - \left\{p_x\cdot\ddot{a}_{x+1}(p_x+1)-1\right\}v - p_x = 0$$

$P_x = \dfrac{1}{20}$, $p_x\cdot\ddot{a}_{x+1} = 12$ を代入して

$12v^2 - \dfrac{232}{20}\ v\ -\ \dfrac{1}{20} = 0$ $\qquad$ これを解いて $v \fallingdotseq 0.970957$ $\qquad \therefore\ i \fallingdotseq 0.0299$

(7) …… (B)

アより　$P_{x:\overline{n}|}=P^{1}_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}=0.0156$

イより　$P^{1}_{x:\overline{n}|}+2\cdot P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}=0.0288$　下式－上式より　$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}=\dfrac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=0.0132$

ウより　$\dfrac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}}=0.0138$　$\therefore$　$\dfrac{0.0132\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}}=0.0138$

$\therefore (IA)^{1}_{x:\overline{n}|}=\dfrac{0.0006}{0.0138}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

求める保険料は　$\dfrac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-2\cdot(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}}=\dfrac{0.0132\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-2\times\dfrac{0.0006}{0.0138}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\fallingdotseq 0.014457$

(8) …… (D)

${}_{t}V_{x}=1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x}}$　より　${}_{10}V_{60}=1-\dfrac{\ddot{a}_{70}}{\ddot{a}_{60}}$,　${}_{20}V_{60}=1-\dfrac{\ddot{a}_{80}}{\ddot{a}_{60}}$

これらを与えられた関係式に代入して

$2\left(1-\dfrac{\ddot{a}_{70}}{\ddot{a}_{60}}\right)=1-\dfrac{\ddot{a}_{80}}{\ddot{a}_{60}}$　$\therefore$　$2\ddot{a}_{60}-2\ddot{a}_{70}=\ddot{a}_{60}-\ddot{a}_{80}$　$\therefore$　$\ddot{a}_{80}=2\ddot{a}_{70}-\ddot{a}_{60}$

(9) …… (E)

責任準備金の再帰式より　${}_{t}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}-v\cdot q_{x+t}=v\cdot p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}$

両辺より $v\cdot P_{x+t}$ を差引くと　${}_{t}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}-v=-v\cdot p_{x+t}(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})$

$R_{t}=1-{}_{t}V_{x:\overline{n}|}$　　$v=1-d$ より

$(1-R_{t})+P_{x:\overline{n}|}-(1-d)=-v\cdot p_{x+t}\cdot R_{t+1}$

$R_{t+1}=\dfrac{1}{v\cdot p_{x+t}}\left\{R_{t}-(P_{x:\overline{n}|}+d)\right\}$

$\dfrac{1}{v\cdot p_{x+t}}=\dfrac{\ell_{x+t}}{v\cdot \ell_{x+t+1}}=\dfrac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}$

(10) …… (C)

$$ {}_{n-1}V_{x:\overline{n|}} = A_{x+n-1:\overline{1|}} - P_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+n-1:\overline{1|}} = v - P_{x:\overline{n|}} = (1-d) - P_{x:\overline{n|}} $$

一方　$P_{x:\overline{n|}} = \dfrac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \dfrac{A_{x:\overline{n|}} \cdot d}{1-A_{x:\overline{n|}}} = \dfrac{0.5 \times 0.05}{1-0.5} = 0.05$

$$ \therefore \ {}_{n-1}V_{x:\overline{n|}} = (1-0.05) - 0.05 = 0.9 $$

2．正解は以下のとおりである。

A1 $\frac{t}{k}$					
B1 $\frac{1}{k}$	B2 $\frac{1}{k} \cdot q_x$	B3 $\frac{2}{k} \cdot q_x$	B4 q_x		
C1 $\frac{1}{k}$	C2 $\frac{q_x}{k^2}$				
D1 $\frac{1}{k}$	D2 $\frac{k+1}{2}$	D3 $\frac{q_x}{k^2}$	D4 $\frac{(k+1)(2k+1)}{6}$		
E1 1	E2 $\frac{k+1}{2k}$	E3 $\frac{k+1}{2k}$	E4 $\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}$		
F1 $v \cdot p_x$	F2 $v^2 \cdot {}_2p_x$				
G1 1	G2 $\frac{k+1}{2k}$	G3 $\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}$	G4 A_x		
H1 1	H2 $\frac{k+1}{2k}$	H3 $\frac{k+1}{2k}$	H4 $\frac{k^2-1}{6k^2}$	H5 1	H6 $\ddot{a}_x$
I1 $\frac{k+1}{2k}$	I2 $\frac{k^2-1}{6k^2}$				
J1 $\frac{k-1}{2k}$	J2 $\frac{k^2-1}{6k^2}$				

3. (1)　$P_1 = A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, $P_2\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P_1$ より、 $P_1P_2 + (1-v)P_1 - P_2 = 0$……①

①の両辺を i で微分すると、 $\dfrac{dv}{di} = -v^2$ より、

$$P_2\frac{dP_1}{di} + P_1\frac{dP_2}{di} + v^2P_1 + (1-v)\frac{dP_1}{di} - \frac{dP_2}{di} = 0$$

ここで、 $F_1 = -\dfrac{1}{P_1}\dfrac{dP_1}{di}$, $F_2 = -\dfrac{1}{P_2}\dfrac{dP_2}{di}$ だから

$-P_1P_2F_1 - P_1P_2F_2 + v^2P_1 - (1-v)P_1F_1 + P_2F_2 = 0$

$\therefore$　$(F_1+F_2)P_1P_2 + \{(1-v)F_1 - v^2\}P_1 - F_2P_2 = 0$ ……②

①、②より P_1P_2 の項を消去すると、

$(F_1+F_2)(1-v)P_1 - (F_1+F_2)P_2 = \{(1-v)F_1 - v^2\}P_1 - F_2P_2$

整理して、$\{F_2(1-v) + v^2\}P_1 = F_1P_2$　　$\therefore$　$F_1 = \dfrac{P_1}{P_2}\{(1-v)F_2 + v_2\}$

（証明終）

(2)　(1) の結果より、　$F_1 = \{(1-v)F_2 + v^2\}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　……③

題意より、ある i の近傍で

$F_1 = \alpha_1 + \beta_1 v$, $F_2 = \alpha_2 + \beta_2 v$ ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は定数、$\beta_1, \beta_2 \fallingdotseq 0$) が成り立つ。

これらを③式に代入すると、

$$\alpha_1 + \beta_1 v = \{(1-v)(\alpha_2 + \beta_2 v) + v^2\}\{1 + p_x v + {}_2p_x v^2 + \cdots + {}_{n-1}p_x v^{n-1}\}$$
$$= \alpha_2 + \{\alpha_2 p_x + (\beta_2 - \alpha_2)\}v + \{(1-\beta_2) + p_x(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2\,{}_2p_x\}v^2 + \cdots \text{（vの多項式）}$$

これは i の近傍で任意の v に対して成立することから、両辺の定数項および v の1次の項の係数は等しく、右辺の2次以上の項の係数は0でなければならない。

$\therefore$　$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \alpha_2 p_x + \beta_2 - \alpha_2$

よって、$F_1 - F_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)v = \alpha_2(p_x - 1)v = -\alpha_2 q_x v$

$-\alpha_2$ を k とおくと、　$F_1 - F_2 = kq_x v$ となる。　（証明終）

（追記）

本問について、出題時に意図していた解答は上の解答例のとおりであるが、(2) については別解も存在する。最も強力な結果を導く解法を次に示しておくので、参考とされたい。

$A_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　を辺々 i で微分して、

$$\frac{d}{di}A_{x:\overline{n|}}=\left(\frac{d}{di}P_{x:\overline{n|}}\right)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}+P_{x:\overline{n|}}\cdot\left(\frac{d}{di}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}\right)$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{A_{x:\overline{n|}}}\cdot\frac{dA_{x:\overline{n|}}}{di}=-\frac{1}{P_{x:\overline{n|}}}\cdot\frac{dP_{x:\overline{n|}}}{di}-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\frac{d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{di}$$

$$\therefore\quad F_1-F_2=-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\frac{d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{di}$$

ある i の近傍で F_1,F_2 がともに v の一次式であることから、この式を v の一次式として、

$$-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\frac{d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{di}=\alpha+\beta v$$ （α,β は定数）と表すことができる。

$$-\frac{d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{di}=(\alpha+\beta v)\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

ここで、 $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\cdot{}_tp_x$ および $\frac{d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{di}=-\sum_{t=1}^{n-1}t\cdot v^{t+1}\cdot{}_tp_x$ を用いて、

$$\sum_{t=1}^{n-1}t\cdot v^{t+1}\cdot{}_tp_x=(\alpha+\beta v)\sum_{t=0}^{n-1}v^t\cdot{}_tp_x$$

$\therefore\quad v^2\cdot p_x+2v^3\cdot{}_2p_x+\cdots=\alpha+(\alpha p_x+\beta)v+(\alpha\,{}_2p_x+\beta p_x)v^2+\cdots$

v についての0次、1次の項の係数を辺々比較すれば、$\alpha=0$, $\alpha p_x+\beta=0$

$\therefore\quad \alpha=0,\beta=0$ これより $F_1-F_2=0$ 　　これは題意の $k=0$ の場合の結果に等しい。

（注）この解法によれば、さらに次の結果を導くことができる。

$\sum_{t=1}^{n-1}t\cdot v^{t+1}\cdot{}_tp_x=0$ より ${}_tp_x=0(t=1,\cdots,n-1)$ 　$\therefore\quad q_x=1$

このとき、$A_{x:\overline{n|}}=P_{x:\overline{n|}}=v,\ \frac{d}{di}A_{x:\overline{n|}}=\frac{d}{di}P_{x:\overline{n|}}=-v^2$

よって、$F_1=F_2=v$