保 険 数 学 １（問題）

1．次の（１）から（９）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔(A) から (E) のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。(10) については解答用紙に○または×を記入せよ。　(50点)

（１）$\bar{s}_{\overline{20|}} = 3\,\bar{s}_{\overline{10|}}$のとき、利力$\delta$（$\delta \fallingdotseq 0$）の値に最も近いのは次のうちどれか。

但し、必要ならば $\log_e 2 \fallingdotseq 0.693$、$\log_e 3 \fallingdotseq 1.099$を用いよ。

（A）0.0347　（B）0.0406　（C）0.0550　（D）0.0693　（E）0.1099

（２）死亡率が${}_tq_x = \dfrac{t}{\omega - x}$（$0 \leqq t \leqq \omega - x$）で与えられている。

$\mathring{e}_{50} = 30$のとき、${}_{40|}\mathring{e}_{10}$の値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）17　（B）18　（C）19　（D）20　（E）21

（３）$\mathring{e}_x = a - bx$（a、bは$0 < b < 1 < a$を満たす定数、$0 \leqq x \leqq \frac{a}{b}$）のとき、$\ell_x = \ell_0\left(1 - \dfrac{b}{a}x\right)^k$と表される。このときkは次のうちどれか。

（A）$\dfrac{1}{1+b}$　（B）$\dfrac{1-b}{1+b}$　（C）$\dfrac{1-b}{b}$　（D）$\dfrac{1}{b}$　（E）-1

（４）$A_x = 0.18615$、$A_{x+1} = 0.19411$、$P_x = 0.01089$のとき、q_xの値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）0.00155　（B）0.00158　（C）0.00161　（D）0.00164　（E）0.00167

（５）加入年齢40歳で、以下の終身保険（死亡保険金即時払）を考える。

一時払純保険料100万円が払い込まれ、20年後に被保険者が生存していれば、その時点で生存保険金100万円を支払い、それ以降の死亡保険金を100万円だけ減じるものとする。

当初の20年間の死亡保険金の値に最も近いのは次のうちどれか。但し、必要ならば次の計算基数を用いよ。

$D_{40} = 13{,}757$、$D_{60} = 4{,}716$、$N_{40} = 235{,}121$、$N_{60} = 59{,}384$、$\overline{M}_{40} = 2{,}624$、$\overline{M}_{60} = 1{,}935$

（A）400万円　（B）420万円　（C）440万円　（D）460万円　（E）480万円

（６）$D_{30} = 15{,}865$、$D_{35} = 11{,}661$、$\ddot{a}_{30:\overline{10|}} = 7.6975$、$\ddot{a}_{35:\overline{5|}} = 4.4347$、${}_5V^{\,1}_{30:\overline{10|}} = 0.0010$のとき、$P_{30:\overline{10|}}^{\,1}$の値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）0.0700　（B）0.0702　（C）0.0704　（D）0.0706　（E）0.0708

（７）30歳加入で死亡保険金１を保険年度末に支払う終身保険において、年払平準純保険料P_{30}は被保険者が生存する限り、各保険年度始に払い込まれるものとする。以下の関係があるときP_{30}の値に最も近いのは次のうちどれか。

${}_{11}V_{30}=0.8\times{}_{12}V_{30}$、$v=0.9$、$\ell_x=50-x$　　（$40\leqq x\leqq 50$）

（A）0.02　（B）0.05　（C）0.10　（D）0.15　（E）0.18

（８）人口が男女ともに定常状態の２国家X、Yについて、出生数および平均寿命が次のような状況にある。

国家X：〔男子　$\ell_0=3{,}200$人、$\mathring{e}_0=72$歳〕〔女子　$\ell_0=1{,}500$人、$\mathring{e}_0=80$歳〕

国家Y：〔男子　$\ell_0=4{,}000$人、$\mathring{e}_0=45$歳〕〔女子　$\ell_0=4{,}500$人、$\mathring{e}_0=48$歳〕

この２国家が新たな１国家に統合される場合、出生率・死亡率が統合前のままとすると、統合後の国家の男女間の平均寿命の関係について正しく述べているのは次のうちどれか。

（A）男が１歳長い　（B）男女同じ　（C）女が２歳長い　（D）女が4.5歳長い　（E）女が５歳長い

（９）定常状態に達したある団体の構成員数は100,000人であり、加入者はすべて20歳で入会し、60歳になればすべて退会するものとする。但し、60歳未満では死亡以外の中途脱退はないものとする。毎年の死亡者数が400人で、死亡時の平均年齢が50歳のとき、毎年の60歳の退会者数に最も近いのは次のうちどれか。

（A）2,100人　（B）2,200人　（C）2,300人　（D）2,400人　（E）2,500人

（10）x歳加入の終身保険（死亡保険金１を保険年度末に支払う。保険料は年払で終身払込）の第t保険年度末純保険料式責任準備金${}_tV_x$を表す算式（ア）、（イ）、（ウ）について、正しいものは○、誤っているものは×をそれぞれの解答欄に記入せよ。

（ア）${}_tV_x=1-\dfrac{1+a_{x+t}}{1+a_x}$　（イ）${}_tV_x=A_{x+t}\left(1-\dfrac{P_{x+t}}{P_x}\right)$　（ウ）${}_tV_x=\dfrac{P_{x+t}-P_x}{P_x+d}$

２．x歳加入の終身保険（死亡保険金１を保険年度末に支払う。）において、保険料の払込期間を２n年とする。${}_{2n}P_x$、${}^{2n}_{\ t}V_x$はそれぞれ年払平準純保険料、第t保険年度末純保険料式責任準備金とする。一方、年払純保険料を第n保険年度までP、第n＋１保険年度から第２n保険年度まで２P払い込むとした場合の第t保険年度末純保険料式責任準備金を${}_tV$とする。このとき、次の（１）および（２）を証明せよ。（解答用紙に記入せよ。）　（25点）

（１）$P<{}_{2n}P_x<1.5P$

（２）${}_tV<{}^{2n}_{\ t}V_x$（$0<t<2n$）

３．ｘ歳加入、保険期間ｎ年、保険料年払（全期払）の次の給付を行う保険を考える。

（ｉ）満期まで生存したとき、Ｓ（$S>1$）を支払う。

（ii）第ｔ保険年度に死亡したときの死亡保険金は、max（１、${}_{t}V$）とし、第ｔ保険年度末に支払う。

但し、${}_{t}V$は、第ｔ保険年度末純保険料式責任準備金とし、${}_{t}V<{}_{t+1}V$（$t=0$、……、$n-1$）とする。

今、ある整数ｒ（$0\leqq r\leqq n-1$）について、${}_{r}V\leqq 1<{}_{r+1}V$が成り立っているとすると

$(S-1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}\leqq\ddot{s}_{\overline{n-r|}}$が成り立つことの証明を、以下の問の手順で行う。（25点）

（１）次の（Ａ）～（Ｅ）について、適当な算式を入れよ。（解答用紙に算式を記入せよ。）但し、（Ｃ）、（Ｅ）については、計算基数（D_x、C_x、N_x、M_x等）を用いず、必要ならば$P^{1}_{x:\overline{n|}}$、$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$を用いて解答せよ。

この保険の年払平準純保険料をＰとすると、次の①、②の再帰式が成立する。

${}_{t}V+P=$ $\boxed{(A)\qquad}$ （$t=0$、１、……、$r-1$）……①

${}_{t}V+P=$ $\boxed{(B)\qquad}$ （$t=r$、$r+1$、……、$n-1$）……②

①式により${}_{r}V$を求めると、${}_{r}V=$ $\boxed{(C)\qquad}$ ……③

②式により${}_{r}V$を求めると、${}_{r}V=$ $\boxed{(D)\qquad}$ ……④

③式、④式よりＰを消去して${}_{r}V$について解けば、${}_{r}V=$ $\boxed{(E)\qquad}$ ……⑤

${}_{r}V=$（Ｅ）$\leqq 1$より、次の式が得られる。

$v^{n-r}\cdot S-1\leqq\ddot{a}_{\overline{n-r|}}\cdot P_{x:\overline{n|}}$ ……⑥

（２）⑥式より$(S-1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}\leqq\ddot{s}_{\overline{n-r|}}$が成り立つことを示せ。（解答用紙に記入せよ。）

保険数学１（解答例）

１．

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)		
										(ｱ)	(ｲ)	(ｳ)
解答欄	(D)	(B)	(C)	(E)	(B)	(A)	(C)	(A)	(B)	○	×	×

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解法を略記する。

（1）… (D)

$\bar{S}_{\overline{n}|}=\dfrac{e^{n\delta}-1}{\delta}$ より　$e^{20\delta}-1=3(e^{10\delta}-1)$　$\therefore\ (e^{10\delta})^2-3e^{10\delta}+2=0$

$\therefore\ (e^{10\delta}-2)(e^{10\delta}-1)=0$　　$e^{10\delta}=1$　(即ち　$\delta=0$)は不適ゆえ　　$e^{10\delta}=2$

$\therefore\ \delta=\dfrac{1}{10}\ell og_e 2 \fallingdotseq 0.0693$

（2）… (B)

$${}_tp_x=1-{}_tq_x=\frac{\omega-x-t}{\omega-x}$$

$$\mathring{e}_x=\int_0^{\omega-x}{}_tp_x\,dt=\frac{1}{\omega-x}\int_0^{\omega-x}(\omega-x-t)dt=\frac{1}{\omega-x}\left[-\frac{1}{2}(\omega-x-t)^2\right]_0^{\omega-x}=\frac{\omega-x}{2}$$

$\mathring{e}_{50}=30$　より　$\dfrac{\omega-50}{2}=30$　　$\therefore\ \omega=110$

${}_{n|}\mathring{e}_x={}_np_x\cdot\mathring{e}_{x+n}$　より

$${}_{40|}\mathring{e}_{10}={}_{40}P_{10}\cdot\mathring{e}_{50}=\frac{110-10-40}{110-10}\times30=18$$

（3）…(C)

$$\frac{d}{dx}\mathring{e}_x=\int_0^{\frac{a}{b}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\right)dt=\int_0^{\frac{a}{b}}\frac{1}{\ell_x^2}\cdot\left(\ell_x\cdot\frac{d\ell_{x+t}}{dx}-\ell_{x+t}\cdot\frac{d\ell_x}{dx}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{b}}\frac{1}{\ell_x^2}\left[\ell_x\cdot\frac{d\ell_{x+t}}{d(x+t)}\cdot\frac{d(x+t)}{dx}-\ell_{x+t}\cdot\frac{d\ell_x}{dx}\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{b}}\frac{1}{\ell_x^2}\left[\ell_x\cdot(-\ell_{x+t}\cdot\mu_{x+t})-\ell_{x+t}\cdot(-\ell_x\cdot\mu_x)\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{b}}\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\cdot\mu_x dt-\int_0^{\frac{a}{b}}\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\cdot\mu_{x+t}\,dt$$

$$=\mu_x\cdot\mathring{e}_x-1$$

この両辺に $\mathring{e}_x = a - bx$を代入して　$-b = \mu_x \cdot (a - bx) - 1$　$\therefore\ \mu_x = \dfrac{1-b}{a-bx}$

$$\ell_x = \ell_0 \cdot \exp\left\{-\int_0^x \mu_t dt\right\} = \ell_0 \cdot \exp\left\{-\int_0^x \frac{1-b}{a-bt}\, dt\right\}$$

$$= \ell_0 \cdot \exp\left\{\frac{1-b}{b}\left[\ell og\,(a-bt)\right]_0^x\right\} = \ell_0 \cdot \exp\left\{\frac{1-b}{b}\ell og\,\frac{a-bx}{a}\right\}$$

$$= \ell_0 \cdot \left(1 - \frac{b}{a}x\right)^{\frac{1-b}{b}}$$

〔別解〕

$$\ell_0 \cdot \mathring{e}_0 = \int_0^{\frac{a}{b}} \ell_x d_x = \int_0^{\frac{a}{b}} \ell_0 \cdot \left(1 - \frac{b}{a}x\right)^k dx = \ell_0 \cdot \int_1^0 y^k \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) dy$$

$$\left(y = 1 - \frac{b}{a}x \quad \text{とおけば} \quad dy = -\frac{b}{a}dx\right)$$

$= \ell_0 \cdot \left[\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{y^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \dfrac{\ell_0 \cdot a}{b \cdot (k+1)}$　一方　$\mathring{e}_x = a - bx$　より　$\mathring{e}_0 = a$　ゆえ

$\ell_0 \cdot a = \dfrac{\ell_0 \cdot a}{b \cdot (k+1)}$　これをといて　$k = \dfrac{1-b}{b}$

(4) … (E)

$A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x,\ P_x = \dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d$　より　$d = \dfrac{P_x}{A_x}(1 - A_x)$　　$i = \dfrac{d}{1-d}$　より

$$i = \frac{P_x(1-A_x)}{A_x - P_x(1-A_x)} = \frac{0.01089\,(1 - 0.18615)}{0.18615 - 0.01089\,(1 - 0.18615)} \fallingdotseq 0.04999$$

また　$(1+i)\,A_x = q_x + p_x \cdot A_{x+1} = q_x(1 - A_{x+1}) + A_{x+1}$　　($\because\ q_x = 1 - p_x$)　より

$$q_x = \frac{(1+i)\,A_x - A_{x+1}}{1 - A_{x+1}} = \frac{1.04999 \times 0.18615 - 0.19411}{1 - 0.19411} \fallingdotseq 0.00167$$

(5) … (B)

一時払純保険料をA、当初20年間の死亡保険金をS、加入年齢をx歳とすると、

$$A = A \cdot \frac{D_{x+20}}{D_x} + S \cdot \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+20}}{D_x} + (S - A) \cdot \frac{\overline{M}_{x+20}}{D_x}$$

$\therefore\ S = \dfrac{A \cdot (D_x - D_{x+20} + \overline{M}_{x+20})}{\overline{M}_x}$　　$x = 40$　　$A = 1{,}000{,}000$　と与えられた基数を代入すると

$$S = \frac{1{,}000{,}000\,(13{,}757 - 4{,}716 + 1{,}935)}{2{,}624} \fallingdotseq 418\text{万円}$$

(6) … (A)

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = {}_tV^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|} + {}_tV_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ \frac{1}{}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$${}_tV_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ \frac{1}{}} = P_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ \frac{1}{}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} = P_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ \frac{1}{}} \cdot \left(\frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right)$$

$$\therefore\ 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - {}_tV^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ \frac{1}{}} \cdot \left(\frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right)$$ $x = 30,\ n = 10,\ t = 5$ を代入して

$$1 - \frac{\ddot{a}_{35:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{10}|}} - {}_5V^{\ \ 1}_{30:\overline{10}|} = P_{30:\overline{10}|}^{\ \ \ \frac{1}{}} \cdot \left(\frac{D_{30}}{D_{35}} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{10}|} - \ddot{a}_{35:\overline{5}|}\right)$$

$$P_{30:\overline{10}|}^{\ \ \ \frac{1}{}} = \frac{1 - \frac{4.4347}{7.6975} - 0.0010}{\frac{15{,}865}{11{,}661} \times 7.6975 - 4.4347} \fallingdotseq 0.0700$$

(7) … (C)

再帰式より　${}_{11}V_{30} + P_{30} = v \cdot q_{41} + v \cdot p_{41} \cdot {}_{12}V_{30}$

ここで　$\ell_x = 50 - x$　より　$p_{41} = \frac{8}{9}$　$q_{41} = \frac{1}{9}$

これと ${}_{11}V_{30} = 0.8 \times {}_{12}V_{30}$, $v = 0.9$　を上式に代入して

$$0.8 \times {}_{12}V_{30} + P_{30} = 0.9 \times \frac{1}{9} + 0.9 \times \frac{8}{9} \times {}_{12}V_{30}$$

$\therefore\ P_{30} = 0.1$

(8) … (A)

総人口　$T_0 = \ell_0 \cdot \mathring{e}_0$　より統合後の平均寿命は

男子：$\frac{3{,}200 \times 72 + 4{,}000 \times 45}{3{,}200 + 4{,}000} = 57$　　女子：$\frac{1{,}500 \times 80 + 4{,}500 \times 48}{1{,}500 + 4{,}500} = 56$

よって（A）が正しい。

(9) … (B)

この団体の x 歳の構成員数を ℓ_x 人とし $T_x = \int_0^{\omega - x} \ell_{x+t}dt$ とすると

①総構成員数は $T_{20} - T_{60} = 100{,}000$

②毎年の死亡者数は　$\ell_{20} - \ell_{60} = 400$

③死亡時の平均年齢は　$20+\dfrac{T_{20}-T_{60}-40\cdot\ell_{60}}{\ell_{20}-\ell_{60}}=50$

毎年の退会者数はℓ_{60}であるが①、②を③に代入して　$20+\dfrac{100{,}000-40\cdot\ell_{60}}{400}=50$

これより　$\ell_{60}=2{,}200$

(10) … (ア) ○　(イ) ×　(ウ) ×

(ア)　$_tV_x=A_{x+t}-P_x\cdot\ddot{a}_{x+t}=(1-d\cdot\ddot{a}_{x+t})-P_x\cdot\ddot{a}_{x+t}=1-(P_x+d)\ddot{a}_{x+t}=1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$

$=1-\dfrac{1+a_{x+t}}{1+a_x}$　より正しい。

(イ)　$_tV_x=A_{x+t}-P_x\cdot\ddot{a}_{x+t}=A_{x+t}\left(1-\dfrac{P_x\cdot\ddot{a}_{x+t}}{A_{x+t}}\right)=A_{x+t}\left(1-\dfrac{P_x}{P_{x+t}}\right)$　より誤り。

(ウ)　$_tV_x=A_{x+t}-P_x\cdot\ddot{a}_{x+t}=(P_{x+t}-P_x)\cdot\ddot{a}_{x+t}=\dfrac{(P_{x+t}-P_x)}{P_{x+t}+d}$　より誤り。

2. 収支相等の原則より

(1) $P\cdot\dfrac{N_x-N_{x+n}}{D_x}+2P\cdot\dfrac{N_{x+n}-N_{x+2n}}{D_x}=\dfrac{M_x}{D_x}$

$\therefore P=\dfrac{M_x}{N_x+N_{x+n}-2N_{x+2n}}$　　また　　${}_{2n}P_x=\dfrac{M_x}{N_x-N_{x+2n}}$

$\dfrac{{}_{2n}P_x}{P}=\dfrac{N_x+N_{x+n}-2N_{x+2n}}{N_x-N_{x+2n}}=1+\dfrac{N_{x+n}-N_{x+2n}}{N_x-N_{x+2n}}$

ここで

$$0<\frac{N_{x+n}-N_{x+2n}}{N_x-N_{x+2n}}=\frac{D_{x+n}+D_{x+n+1}+\cdots+D_{x+2n-1}}{D_x+D_{x+1}+\cdots+D_{x+2n-1}}<\frac{D_{x+n}+D_{x+n+1}+\cdots+D_{x+2n-1}}{2\,(D_{x+n}+D_{x+n+1}+\cdots+D_{x+2n-1})}=0.5$$

$$\left[\because\ D_{x+i}>D_{x+n+i}\quad(i=0,\ \cdots,\ n-1)\right]$$

よって　$1<\dfrac{{}_{2n}P_x}{P}<1.5$　　$\therefore\ P<{}_{2n}P_x<1.5P$

(2) ① 0 < t < n のとき、過去法によりそれぞれの責任準備金を求めると

${}^{2n}_{t}V_x={}_{2n}P_x\cdot\dfrac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}-\dfrac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}$

$_tV=P\cdot\dfrac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}-\dfrac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}$

$\therefore\ {}^{2n}_{t}V_x-{}_tV=({}_{2n}P_x-P)\cdot\dfrac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}>0$　(∵ (1)より　${}_{2n}P_x>P,\ N_x-N_{x+t}>0,\ D_{x+t}>0$)

②$n \leqq t < 2n$ のとき、将来法により、それぞれの責任準備金を求めると

$${}^{2n}_{t}V_x = A_{x+t} - {}_{2n}P_x \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+2n}}{D_{x+t}}$$

$${}_{t}V = A_{x+t} - 2P \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+2n}}{D_{x+t}}$$

$${}^{2n}_{t}V_x - {}_{t}V = (2P - {}_{2n}P_x) \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+2n}}{D_{x+t}} \quad > 0$$

(∵ (1)より ${}_{2n}P_x < 1.5P < 2P$, $N_{x+t} - N_{x+2n} > 0$, $D_{x+t} > 0$)

3.

(1)

(A)	$\frac{1}{D_{x+t}} \cdot (C_{x+t} + D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V)$
(B)	$v \cdot {}_{t+1}V$
(C)	$\frac{1}{P_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1}}(P - P^{1}_{x:\overline{r}|})$
(D)	$v^{n-r} \cdot S - \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P$
(E)	$\frac{1}{1 + \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1}} \cdot (v^{n-r} \cdot S - \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P^{1}_{x:\overline{r}|})$

正解は上表のとおりであるが以下解法を略記する。

${}_{t}V + P = v \cdot q_{x+t} + v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V \qquad (t = 0, 1, \cdots, r-1)$より

$${}_{t}V + P = v \cdot q_{x+t} \cdot \frac{D_{x+t}}{D_{x+t}} + v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V \cdot \frac{D_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$${}_{t}V + P = \frac{1}{D_{x+t}}(C_{x+t} + D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V) \quad \cdots\cdots ①$$

${}_{t}V + P = v \cdot q_{x+t} \cdot {}_{t+1}V + v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V \qquad (t = r, r+1, \cdots, n-1)$より

$${}_{t}V + P = v \cdot {}_{t+1}V \quad \cdots\cdots ②$$

①より $D_{x+t} \cdot {}_{t}V - D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V + D_{x+t} \cdot P = C_{x+t}$

$t = 0, 1, \cdots, r-1$ について加えると

$D_x \cdot {}_{0}V - D_{x+r} \cdot {}_{r}V + P \cdot \sum_{t=0}^{r-1} D_{x+t} = \sum_{t=0}^{r-1} C_{x+t} \qquad {}_{0}V = 0$ より

$${}_rV = P \cdot \frac{N_x - N_{x+r}}{D_{x+r}} - \frac{M_x - M_{x+r}}{D_{x+r}}$$

$$= P \cdot \frac{1}{\dfrac{D_{x+r}}{N_x - N_{x+r}}} - \frac{M_x - M_{x+r}}{N_x - N_{x+r}} \cdot \frac{1}{\dfrac{D_{x+r}}{N_x - N_{x+r}}} = \frac{1}{P_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1}}\left(P - P^1_{x:\overline{r}|}\right) \quad \cdots\cdots ③$$

②の両辺に v^{t-r} を乗じて

$$v^{t-r} \cdot {}_tV + v^{t-r} \cdot P = v^{t-r+1} \cdot {}_{t+1}V \qquad \therefore \quad v^{t-r} \cdot {}_tV - v^{t-r+1} \cdot {}_{t+1}V + v^{t-r} \cdot P = 0$$

$t = r,\ r+1,\ \cdots,\ n-1$について加えると　$v^0 \cdot {}_rV - v^{n-r} \cdot {}_nV + \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P = 0$、${}_nV = S$より

$${}_rV = v^{n-r} \cdot S - \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P \quad \cdots\cdots ④$$

③より　$P = P^1_{x:\overline{r}|} + P_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1} \cdot {}_rV$ これを④に代入し整理すれば

$${}_rV = \frac{1}{1 + \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1}} \cdot \left(v^{n-r} \cdot S - \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P^1_{x:\overline{r}|}\right) \quad \cdots\cdots ⑤$$

$\dfrac{1}{1 + \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1}} \cdot \left(v^{n-r} \cdot S - \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P^1_{x:\overline{r}|}\right) \leqq 1$　　$P^1_{x:\overline{r}|} + P_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1} = P_{x:\overline{r}|}$ を用いて整理すれば

$$v^{n-r} \cdot S - 1 \leqq \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot P_{x:\overline{r}|} \quad \cdots\cdots ⑥$$

（2） $P_{x:\overline{r}|} = \dfrac{A_{x:\overline{r}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{r}|}} = \dfrac{1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{r}|}}$ を⑥式に代入して

$$v^{n-r} \cdot S - 1 \leqq \frac{\ddot{a}_{\overline{n-r}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{r}|}} \cdot \left(1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r}|}\right)$$

$$\therefore \ v^{n-r} \cdot S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r}|} - \ddot{a}_{x:\overline{r}|} \leqq \ddot{a}_{\overline{n-r}|} - d \cdot \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r}|}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{r}|} \cdot \left\{v^{n-r} \cdot S - \left(1 - d \cdot \ddot{a}_{\overline{n-r}|}\right)\right\} \leqq \ddot{a}_{\overline{n-r}|}$$

$1 - d\ \ddot{a}_{\overline{n-r}|} = v^{n-r}$ を代入して

$$\ddot{a}_{x:\overline{r}|} \cdot (S - 1) \cdot v^{n-r} \leqq \ddot{a}_{\overline{n-r}|}$$

$$\therefore \ (S - 1) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r}|} \leqq (1 + i)^{n-r} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-r}|}$$

$(1 + i)^{n-r} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-r}|} = \ddot{s}_{\overline{n-r}|}$　より

$$(S - 1) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r}|} \leqq \ddot{s}_{\overline{n-r}|}$$