数 学 2 （問題）

1．　次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを，所定の解答用紙に記入せよ。必要ならば，末尾に示す数値を用いよ。
（各問５点，計50点）

(1) 次のデータはある試験片の硬度 x と引張り強さ y の測定値である。このデータを回帰分析により解析して，y の x に対する回帰式を求めると　$y = \boxed{}\, x + \boxed{}$　である。

硬　度	55	55	55	65	65	70	70	80	80	85	85	85
引張り強さ	29	32	31	31	34	36	35	36	33	37	35	36

(2) 大きさnの有限母集団から非復元抽出で選んだ大きさ $n-1$ の標本変量の平均を $\overline{X}$ とするとき，$\overline{X}$ の分散　$V(\overline{X}) = \boxed{} \times \sigma^2$　である。

(3) 確率密度関数　$f(x) = \begin{cases} (k+1)\,x^k & (0 \leqq x \leqq 1,\ k > -1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

をもつ母集団からn個の標本　$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ が得られたとき，kの最尤推定量は $\boxed{}$ である。

(4) 確率密度関数　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & (b - \frac{1}{2}a \leqq x \leqq b + \frac{1}{2}a\ ,\ a > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

をもつ母集団からn個の標本　$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ が得られたとき，a の最尤推定量は $\boxed{}$ である。

(5) ある町での候補者Aの支持率を信頼度99%で誤差は１％以内になるように推定するには，およそ $\boxed{}$ 人以上の標本をとればよい。

(6) 29人の子どもを任意抽出し，１日あたりのテレビの視聴時間を調査した結果，視聴時間の平均は 4.6時間，標準偏差は 2.7時間であった。このとき，１日あたりの平均視聴時間の信頼係数95%の信頼区間は，$\boxed{}$ である。ただし，母集団は，正規分布に従っているものとする。

(7) 一様分布　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & (0 \leqq x \leqq \theta\ ,\ \theta > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

に従う母集団において，統計量　$T = \alpha \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ が母数 θ の不偏推定量であるためには，$\alpha = \boxed{}$ でなければならない。

(8) 正規分布　$N(\mu_1, \sigma_1^2)$　に従う母集団からの標本変量を X_i　$(i = 1, 2, \cdots, n_1)$，
正規分布　$N(\mu_2, \sigma_2^2)$　に従う母集団からの標本変量を Y_i　$(i = 1, 2, \cdots, n_2)$ とし，
X_i　$(i = 1, 2, \cdots, n_1)$ と Y_i　$(i = 1, 2, \cdots, n_2)$ がたがいに独立とするとき，

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{X_i}{n_1}\ ,\quad S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n_1}\ ,$$

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{Y_i}{n_2}\ ,\quad S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(Y_i - \overline{Y})^2}{n_2}$$　とすると，

統計量 $\dfrac{\dfrac{n_1 S_1^2}{(n_1 - 1)\sigma_1^2}}{\dfrac{n_2 S_2^2}{(n_2 - 1)\sigma_2^2}}$ は，自由度 $\boxed{}$ の $\boxed{}$ 分布に従う。

(9) 正規分布　$N(\mu, 25)$　に従う母集団から大きさ　$n=9$　の標本を抽出し，
仮説　$H_0: \mu=10$，対立仮説　$H_1: \mu=12$　を有意水準５％で検定したい。その際，検出力が最大になるように棄却域を定めるとすれば，棄却域は $\boxed{}$ である。

(10) 上記（9）で定めた検定における（最大の）検出力は $\boxed{}$ である。

２．　ある電気部品の寿命の分布が，確率密度関数

$$f(x;\mu)=\begin{cases}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}} & (x>0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

の指数分布に従う母集団から，Ｎ個のサンプルを取り出して同時に試験をはじめ，その寿命時間が小さいものから順にｎ個（$n \leqq N$）測定して，測定値　$X_1, X_2, \cdots, X_n$　（$X_1 \leqq X_2 \leqq \cdots \leqq X_n$）を得たとする。

(1) μの最尤推定量　$\hat{\mu}$　を求めよ。

(2) $\hat{\mu}$はμの不偏推定量であることを示せ。　　（２５点）

３．　母集団が，確率密度関数

$$f(x;\mu)=\begin{cases}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}} & (x>0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

の指数分布に従うとき，ｎ個の標本　$x_1, x_2, \cdots, x_n$　を用いて仮説　$\mu=\mu_0$　を，対立仮説　$\mu \neq \mu_0$　に対して検定する。

(1) μ_0が標本平均　$\bar{x}$　に等しくないとき，尤度比　λ　を求めよ。

(2) 有意水準εの棄却域を求めよ。

ただし，平均値２の指数分布を母集団とするｎ個の標本の和は，自由度２ｎのχ^2分布に従うことは証明なしに用いてよい。　　（２５点）

数表：

標準正規分布　$N(0,1)$　の上側ε点$u(\varepsilon)$

$u(0.005)=2.58$	$u(0.498)=0.005$
$u(0.010)=2.33$	$u(0.496)=0.010$
$u(0.025)=1.96$	$u(0.490)=0.025$
$u(0.050)=1.64$	$u(0.480)=0.050$
$u(0.35)=0.39$	$u(0.363)=0.35$
$u(0.36)=0.36$	$u(0.359)=0.36$
$u(0.37)=0.33$	$u(0.356)=0.37$
$u(0.38)=0.31$	$u(0.352)=0.38$
$u(0.39)=0.28$	$u(0.348)=0.39$
$u(0.40)=0.25$	$u(0.345)=0.40$

自由度ｎのt分布の上側ε点$t_n(\varepsilon)$

$t_8(0.005)=3.355$	$t_8(0.025)=2.306$
$t_9(0.005)=3.250$	$t_9(0.025)=2.262$
$t_{10}(0.005)=3.169$	$t_{10}(0.025)=2.228$
$t_{28}(0.005)=2.763$	$t_{28}(0.025)=2.048$
$t_{29}(0.005)=2.756$	$t_{29}(0.025)=2.045$
$t_{30}(0.005)=2.750$	$t_{30}(0.025)=2.042$
$t_8(0.01)=2.896$	$t_8(0.05)=1.860$
$t_9(0.01)=2.821$	$t_9(0.05)=1.833$
$t_{10}(0.01)=2.764$	$t_{10}(0.05)=1.812$
$t_{28}(0.01)=2.467$	$t_{28}(0.05)=1.701$
$t_{29}(0.01)=2.462$	$t_{29}(0.05)=1.699$
$t_{30}(0.01)=2.457$	$t_{30}(0.05)=1.697$

数学２　（解答例）

1．

（１）$u=\dfrac{x-70}{5}$ ，　$v=y-33$ とすると，

x	y	u	v	u^2	v^2	uv
55	29	-3	-4	9	16	12
55	32	-3	-1	9	1	3
55	31	-3	-2	9	4	6
65	31	-1	-2	1	4	2
65	34	-1	1	1	1	-1
70	36	0	3	0	9	0
70	35	0	2	0	4	0
80	36	2	3	4	9	6
80	33	2	0	4	0	0
85	37	3	4	9	16	12
85	35	3	2	9	4	6
85	36	3	3	9	9	9
合　計		2	9	64	77	55

$\bar{x}=5\bar{u}+70$
$\quad=5\times\dfrac{2}{12}+70=70.833$

$\bar{y}=\bar{v}+33$
$\quad=\dfrac{9}{12}+33\quad=33.75$

求める回帰式を，
$(y-\bar{y})=\beta\ (x-\bar{x})$
とすると，

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i} x_i y_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i} x_i^2-n\bar{x}^2}$$

$$=\frac{\sum_{i} u_i v_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i} u_i^2-n\bar{u}^2}\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{55-\frac{2\times 9}{12}}{64-\frac{2^2}{12}}\times\frac{1}{5}=0.168$$

$$y=\boxed{0.168}\ x+\boxed{21.85}$$

（２）母平均を０としても一般性を失わない。母集団からx_k以外の$N-1$個が選ばれたとする。

そのとき，$\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i-x_k}{N-1}=-\dfrac{x_k}{N-1}$

$$\mathrm{Var}\ (\bar{X})=\mathrm{Var}\ \left(-\frac{x_k}{N-1}\right)=\frac{1}{(N-1)^2}\mathrm{Var}\ (X)=\boxed{\frac{1}{(N-1)^2}}\times\sigma^2$$

（３）尤度方程式は $\dfrac{d}{dk}\log\prod_{i=1}^{n}(k+1)\,x_i^{k}=0$ である。

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dk}\log\ (k+1)\ x_i^{k}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dk}\log\ (k+1)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dk}k\ \log x_i=0$$

$$\frac{n}{k+1}+\sum_{i=1}^{n}\log x_i=0$$

$$k=\boxed{-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log X_i}}$$

(4)　$a \geqq \max(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \min(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　だから，

尤度関数 $l(a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; a) = \frac{1}{a^n} \leqq \frac{1}{\{\max(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \min(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}^n}$

$\boxed{\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) - \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)}$ が最尤推定量。

(5) 母集団の支持率をp，標本の支持率を$\hat{p}$とする。標本数nが大きい場合，信頼度99%でpの信頼区間は，

$$\left(\hat{p} - u(0.005)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} ,\ \hat{p} + u(0.005)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

ここで，u(0.005) は 標準正規分布の上方 0.005点。

$u(0.005) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.01$ となるようにnを定めればよい。

$\hat{p}(1-\hat{p})$ は，$\hat{p} = 0.5$ のとき最大値をとるので，

$n = (2.58 \times 100)^2 \times 0.5 \times (1-0.5) = \boxed{16,641}$

(6) 標本の大きさをn（=29），標本変量平均を$\overline{X}$，標本変量分散を　$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ とおく。また母平均をμとする。

統計量　$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}}$　は，自由度$\phi = n-1$　の　t−分布に従う。

$t_\phi(\frac{\varepsilon}{2})$ を，自由度ϕの t−分布の上側$\frac{\varepsilon}{2}$点とすれば，

$$P\left\{ -t_\phi(\tfrac{\varepsilon}{2}) < T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} < t_\phi(\tfrac{\varepsilon}{2}) \right\} = 1 - \varepsilon$$

変形すると，

$$P\left\{ \overline{X} - t_\phi(\tfrac{\varepsilon}{2}) \frac{S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \overline{X} + t_\phi(\tfrac{\varepsilon}{2}) \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right\} = 1 - \varepsilon$$

$\overline{X} = 4.6$ ，$S = 2.7$ ，$n = 29$ ，$t_{28}(0.025) = 2.048$ を代入して，

μの信頼区間　$\boxed{(3.6, 5.6)}$　を得る。

(7) Tがθの不偏推定量となるためには，

$$E(T) = \theta$$

となるように　αを定めればよい。

$\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の確率密度関数は，

$$n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}$$

であるから，

$$E(T) = \int_0^\theta x \cdot \alpha n \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} dx$$

$$= \alpha \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \theta$$

したがって，

$$\alpha = \boxed{\frac{n+1}{n}}$$

(８)

自由度 $\boxed{(n_1-1,\ n_2-1)}$ の $\boxed{F}$ 分布に従う。

(９) H_0 ：$\mu=10$ ，H_1 ：$\mu=12$ において，$10<12$ であるから，検出力を最大にするためには右側検定を行うことになる。このとき，H_0 の棄却域を（C，∞） （Cは定数）としたとき，題意より，

$$P(\bar{X}>C \mid \mu=10)=0.05$$

H_0 ：$\mu=10$ が正しいという条件のもとでは，$\bar{X}$は 正規分布 $N(10,\ \frac{5^2}{9})$ に従うことから，上式を変形して，

$$P\left(\frac{\bar{X}-10}{5/\sqrt{9}}>\frac{C-10}{5/\sqrt{9}} \,\middle|\, \mu=10\right)=0.05$$

これを満たすためには，

$$\frac{C-10}{5/\sqrt{9}}=u(0.05)$$ （＝標準正規分布の上側５％点＝1.64）

でなければならない。これをCについて解いて，

$C=12.733\cdots$ を得る。 $\boxed{\bar{X}>12.74}$

(10) 一方，検出力は，

$$P(\bar{X}\leqq C \mid \mu=12)$$

で表される。H_1 ：$\mu=12$ が正しいという条件のもとでは，$\bar{X}$は$N\left(12,\ \frac{5^2}{9}\right)$に従うから，上式を変形して，検出力は，

$$P\left(\frac{\bar{X}-12}{5/\sqrt{9}}>\frac{C-12}{5/\sqrt{9}} \,\middle|\, \mu=12\right)$$

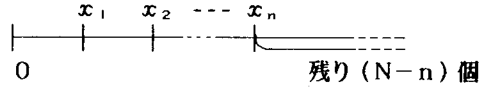
$C=12.74$ を代入すると，

$$P\left(\frac{\bar{X}-12}{5/\sqrt{9}}>0.444 \,\middle|\, \mu=12\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{0.444}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-u(0.444)=1-0.330=\boxed{0.670}$$

$u(0.444)$ は，数表から補外で求める。

2.



（1）N個のサンプルのうち，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ がそれぞれ1つ。（N−n）個は x_n 以上。

F（x，θ）を分布関数とするとき，尤度関数

$$L(\theta)=\frac{N!}{1!\,1!\cdots1!\,(N-n)!}\,f(x_1;\theta)\,f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\,\{1-F(x_n;\theta)\}^{N-n}$$

$$=\frac{N!}{(N-n)!}\frac{1}{\theta^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+(N-n)x_n\right)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+(N-n)x_n\right)$$

尤度方程式 $\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=0$ を解いて，

$$\theta=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+(N-n)x_n\right)$$

μの最尤推定量 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+(N-n)X_n\right)$

（2）$0\leqq x_1\leqq x_2$，$0\leqq x_2\leqq x_3$，----，$0\leqq x_{n-1}\leqq x_n$，$0\leqq x_n<\infty$ だから，

$$E(\hat{\mu})=\int_0^{\infty}dx_n\int_0^{x_n}dx_{n-1}\cdots\int_0^{x_3}dx_2\int_0^{x_2}dx_1\,\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+(N-n)x_n\right)$$

$$\times\frac{N!}{(N-n)!}\frac{1}{\mu^n}\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+(N-n)x_n\right)\right\}$$

$y_1=\ x_1+(N-1)x_1$

$y_k=\sum_{i=1}^{k}x_i+(N-k)x_k$

$y_n=\sum_{i=1}^{n}x_i+(N-n)x_n$ とおく。

$$y_{k+1}-y_k=\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i+(N-k-1)x_{k+1}\right)-\left(\sum_{i=1}^{k}x_i+(N-k)x_k\right)$$
$$=x_{k+1}+(N-k-1)x_{k+1}-(N-k)x_k$$
$$=(N-k)(x_{k+1}-x_k)$$

$y_{k+1}\geqq y_k \Leftrightarrow x_{k+1}\geqq x_k$ だから， $y_1\leqq y_2\leqq\cdots\leqq y_{n+1}\leqq y_n$

$$\frac{\partial y_1\,\partial y_2\cdots\partial y_n}{\partial x_1\,\partial x_2\cdots\partial x_n}=\begin{vmatrix}N&0&0&0&\cdots&0\\1&N-1&0&0&\cdots&0\\1&1&N-2&0&\cdots&0\\\cdots&&&&&\\1&1&1&\cdots&1&N-n+1\end{vmatrix}=\frac{N!}{(N-n)!}$$

$$E(\hat{\mu})=\int_0^{\infty}dy_n\int_0^{y_n}dy_{n-1}\cdots\int_0^{y_3}dy_2\int_0^{y_2}dy_1\,\frac{y_n}{n\mu^n}\exp\left(-\frac{y_n}{\mu}\right)$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{y_n}{n\mu^n}\exp\left(-\frac{y_n}{\mu}\right)\frac{y_n^{\,n-1}}{(n-1)!}\,dy_n$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{y_n^{\,n}}{n!\,\mu^n}\exp\left(-\frac{y_n}{\mu}\right)dy_n \qquad\text{--------}\quad(A)$$

$$=\left[-\frac{y_n^{\,n}}{n!\,\mu^{n-1}}\exp\left(-\frac{y_n}{\mu}\right)\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{y_n^{\,n-1}}{(n-1)!\,\mu^{n-1}}\exp\left(-\frac{y_n}{\mu}\right)dy_n$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{y_n^{\,n-1}}{(n-1)!\,\mu^{n-1}}\exp\left(-\frac{y_n}{\mu}\right)dy_n \qquad\text{--------}\quad(B)$$

$$=\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{y_n}{\mu}\right)dy_n=\mu \qquad（(A)\Rightarrow(B)\text{ を繰り返す}）$$

-------- $\hat{\mu}$ は μ の不偏推定量である。

3．帰無仮説　$H_0 : \mu=\mu_0$　，　対立仮説　$H_1 : \mu \neq \mu_0$　として検定する。尤度比λは，

$$\lambda=\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_0)}{\max_{\mu\neq\mu_0}\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu)}=\frac{\mu_0^{-n}\exp\left(-\frac{1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{\max_{\mu\neq\mu_0}\mu^{-n}\exp\left(-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}=\frac{\mu_0^{-n}\exp\left(-\frac{n}{\mu_0}\bar{x}\right)}{\max_{\mu\neq\mu_0}\mu^{-n}\exp\left(-\frac{n}{\mu}\bar{x}\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log\left\{\mu^{-n}\exp\left(-\frac{n}{\mu}\bar{x}\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-n\log\mu-\frac{n}{\mu}\bar{x}\right)=-\frac{n}{\mu}+\frac{n}{\mu^2}\bar{x}$$

これが0となるのは，$\mu=\bar{x}$　，　$\mu^{-n}\exp\left(-\frac{n}{\mu}\bar{x}\right)$ が最大になるのは　$\mu=\bar{x}$　のとき。

$\mu_0\neq\bar{x}$　ならば，$\lambda=\dfrac{\mu_0^{-n}\exp\left(-\frac{n}{\mu_0}\bar{x}\right)}{\bar{x}^{-n}e^{-n}}=e^n\left(\dfrac{\bar{x}}{\mu_0}\right)^n\exp\left(-n\dfrac{\bar{x}}{\mu_0}\right)$

$0\leqq\lambda\leqq1$　だから，尤度比検定の棄却域は片側で $0\leqq\lambda<e^n K^n$　となる。
（$K<e^{-1}$、有意水準をεとする）

棄却域は　$0\leqq\dfrac{\bar{x}}{\mu_0}\exp\left(-\dfrac{\bar{x}}{\mu_0}\right)<K$

ここで，$y=xe^{-x}$　（$x\geqq0$）　は，

x	0		1		∞
y	0	↗	e^{-1}	↘	0

だから，棄却域は　$0\leqq\dfrac{\bar{x}}{\mu_0}<K_1<1$　，　$1<K_2<\dfrac{\bar{x}}{\mu_0}$

xは　平均μ_0の指数分布に従うとするとき，$x\dfrac{2}{\mu_0}$ は平均2の指数分布をする。

問題文より，$\dfrac{2n\bar{X}}{\mu_0}$　は自由度$2n$のχ^2分布に従う。

$K_1=\dfrac{1}{2n}\chi^2_{2n}(1-\varepsilon_1)$　　　$K_2=\dfrac{1}{2n}\chi^2_{2n}(\varepsilon_2)$　　　$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$

を満たす　ε_1、ε_2 について

$\bar{x}<\dfrac{\mu_0\chi^2_{2n}(1-\varepsilon_1)}{2n}$　と　$\bar{x}>\dfrac{\mu_0\chi^2_{2n}(\varepsilon_2)}{2n}$　のときH_0を棄却すればよい。

ただし，ここでは　$\dfrac{2n\bar{X}}{\mu_0}$　の両側から$\dfrac{\varepsilon}{2}$ずつ棄却域を取るとして

棄却域を　$\bar{x}<\dfrac{\mu_0\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2n}$　と　$\bar{x}>\dfrac{\mu_0\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2n}$　としてもよい。