数学（問題）

問題１から問題５を通じ、必要であれば「付表」に記載された数値を用いなさい。

「付表」には、以下の付表が掲載されている。

・付表Ⅰ.「標準正規分布表（上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ から確率 ε を求める表）」
　　　　「標準正規分布表（確率 ε から上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ を求める表）」
・付表Ⅱ.「自由度 φ の χ^2 分布の上側 ε 点：$\chi^2_\varphi(\varepsilon)$」
・付表Ⅲ.「分母の自由度 n 、分子の自由度 m の F 分布の上側 ε 点：$F^m_n(\varepsilon)$」
・付表Ⅳ.「自由度 φ の t 分布の上側 ε 点：$t_\varphi(\varepsilon)$」
・付表Ⅴ.「自然対数表」
・付表Ⅵ.「指数関数表」

問題１． 次の（１）～（５）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。　各５点（計２５点）

（１）あるセキュリティソフトに搭載されているメールフィルタリング機能は、迷惑メールを 0.95 の確率で「迷惑メール」と判定し、迷惑メールでない通常メールを 0.98 の確率で「通常メール」と判定することが分かっている。受信メールのうち迷惑メールである確率が 0.2 であるとき、メールフィルタリング機能が「迷惑メール」と判定したメールが、通常メールである確率に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

[①の選択肢]

（Ａ） 0.005　（Ｂ） 0.008　（Ｃ） 0.016　（Ｄ） 0.018　（Ｅ） 0.020

（Ｆ） 0.078　（Ｇ） 0.082　（Ｈ） 0.169　（Ｉ） 0.189　（Ｊ） 0.209

（２）以下の（ア）～（オ）の各事象について、選択肢の中で最も適切と考えられる確率分布を選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（ア）確率 $p\,(0 < p < 1)$ でシュートを成功させるバスケットボール選手がシュートを 100 回成功させるまでにシュートを外す回数を V とする。このとき、V が従う確率分布は $\boxed{\text{②}}$ である。なお、各シュートは互いに独立であるとする。

（イ）確率 p $(0 < p < 1)$ でシュートを成功させるバスケットボール選手が 100 回シュートしたときのシュート成功回数を W とする。このとき、W が従う確率分布は $\boxed{\text{③}}$ である。なお、各シュートは互いに独立であるとする。

（ウ）任意の実数から無作為に 1 つ選び、その小数部分のみを取り出すという操作 S を 100 回繰り返す。取り出した小数を小さい順に並べたとき、小さい方から i 番目の数を X とする。このとき、X が従う確率分布は $\boxed{\text{④}}$ である。なお、各操作 S は互いに独立であるとする。

（エ）ある地域における自動車事故の発生間隔が指数分布に従うとき、期間 $(0,1]$ 内に起こる事故の件数 Y が従う確率分布は $\boxed{\text{⑤}}$ である。なお、各自動車事故は互いに独立であるとする。

（オ）日本の全世帯の中から無作為に抽出した世帯の年間所得 Z が従うと考えられる確率分布は $\boxed{\text{⑥}}$ である。なお、Z は正規分布に従う確率変数 T を用いて $Z = e^T$ と書けるとする。

[②～⑥の選択肢]

（A） ベルヌーイ分布	**（B）** 幾何分布	**（C）** 二項分布
（D） 負の二項分布	**（E）** 離散一様分布	**（F）** ポアソン分布
（G） 指数分布	**（H）** ベータ分布	**（I）** ガンマ分布
（J） コーシー分布	**（K）** 正規分布	**（L）** 対数正規分布
（M） パレート分布	**（N）** 一様分布（連続型）	

（３）確率変数 X 、Y は互いに独立で、ともに区間 $(-1,1)$ 上の一様分布 $U(-1,1)$ に従うとき、確率変数 $Z=X-Y$ の確率密度関数 $f(z)$ は

$$f(z)=\begin{cases} \boxed{\quad ⑦ \quad} & \left(\boxed{\quad ⑧ \quad} < z < \boxed{\quad ⑨ \quad}\right) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

[⑦の選択肢]

（A） $\frac{1}{4}(1-z)$　（B） $\frac{1}{4}(2-z)$　（C） $\frac{1}{2}(1-z)$　（D） $\frac{1}{2}(2-z)$

（E） $1-z$　（F） $2-z$　（G） $\frac{1}{4}(1-|z|)$　（H） $\frac{1}{4}(2-|z|)$

（I） $\frac{1}{2}(1-|z|)$　（J） $\frac{1}{2}(2-|z|)$　（K） $1-|z|$　（L） $2-|z|$

[⑧、⑨の選択肢]

（A） -2　（B） $-\frac{3}{2}$　（C） -1　（D） $-\frac{1}{2}$　（E） 0

（F） $\frac{1}{2}$　（G） 1　（H） $\frac{3}{2}$　（I） 2

（４）ある機械は 10 個の部品から構成されており、どの部品が壊れても機械全体の動作が停止してしまうものとする。各部品の寿命を表す確率変数 X_i $(i = 1,2,\cdots,10)$ 時間は互いに独立で、すべて平均 1 時間の指数分布に従うとき、この機械の寿命を表す確率変数 Y 時間の積率母関数 $M_Y(\theta)$ は

$\boxed{\quad ⑩ \quad}$ $\left(\theta < \boxed{\quad ⑪ \quad}\right)$ であり、Y の分散 $V[Y]$ は $\boxed{\quad ⑫ \quad}$ である。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

[⑩の選択肢]

（A） $\dfrac{1}{1-10\theta}$	（B） $\dfrac{1}{1-5\theta}$	（C） $\dfrac{1}{1-\theta}$
（D） $\dfrac{5}{5-\theta}$	（E） $\dfrac{10}{10-\theta}$	（F） $\left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^{10}$
（G） $\left(\dfrac{1}{1-5\theta}\right)^{10}$	（H） $\left(\dfrac{1}{1-10\theta}\right)^{10}$	（I） $\left(\dfrac{5}{5-\theta}\right)^{10}$
（J） $\left(\dfrac{10}{10-\theta}\right)^{10}$		

[⑪、⑫の選択肢]

（A） $\dfrac{1}{100}$	（B） $\dfrac{1}{50}$	（C） $\dfrac{1}{25}$	（D） $\dfrac{2}{25}$	（E） $\dfrac{1}{10}$
（F） $\dfrac{1}{5}$	（G） $\dfrac{2}{5}$	（H） 1	（I） $\dfrac{11}{10}$	（J） 2
（K） $\dfrac{22}{5}$	（L） 5	（M） 10	（N） 25	（O） 50
（P） 100	（Q） 110	（R） 200	（S） 250	（T） 1,000
（U） 2,750	（V） 11,000	（W） $+\infty$		

（５）ある疾患が一度治癒してから再発するまでの期間（以下、再発期間という）X は、次の確率密度関数を持つ確率分布に従うと考えられている。

$$f(x) = \frac{1}{7}\left(\frac{x}{14}\right)e^{-(x/14)^2} \qquad (x > 0)$$

このとき、この疾患の再発期間 X の期待値 $E[X]$ に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑬ \quad}$ である。ただし、ガンマ関数 $\Gamma(x)$ について $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となることを用いてよい。
いま、この疾患の患者 100 名について、各患者の再発期間 X は互いに独立で同じ分布に従うとする。100 名の患者の各再発期間の標本平均が $1.1E[X]$ を超える確率を、中心極限定理を利用した近似により計算すると、最も近い数値は $\boxed{\quad ⑭ \quad}$ である。
なお、⑭ の計算にあたり、計算過程の中で小数を扱う場合には、小数点以下第 3 位を四捨五入して小数点以下第 2 位までの小数を用いることとする。また、$\pi = 3.14$ を用いてよい。

[⑬の選択肢]

（A） $\frac{1}{28}\sqrt{\pi}$	（B） $\frac{1}{14}\sqrt{\pi}$	（C） $\frac{3}{28}\sqrt{\pi}$	（D） $\frac{1}{7}\sqrt{\pi}$	（E） $\frac{2}{7}\sqrt{\pi}$
（F） $\frac{7}{2}\sqrt{\pi}$	（G） $7\sqrt{\pi}$	（H） $\frac{21}{2}\sqrt{\pi}$	（I） $14\sqrt{\pi}$	（J） $21\sqrt{\pi}$

[⑭の選択肢]

（A） 0.020	（B） 0.022	（C） 0.024	（D） 0.026	（E） 0.028
（F） 0.298	（G） 0.319	（H） 0.341	（I） 0.363	（J） 0.385

問題２． 次の（１）～（６）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　　　　　　各５点（計３０点）

（１）ある学校の生徒 91 人の身長を測定して度数分布表にしたところ、下表の通りとなった。

（a）各階級の代表値を使って計算する場合、平均身長に最も近い数値は［　①　］、モードに最も近い数値は［　②　］、四分位偏差に最も近い数値は［　③　］である。ここで、「各階級の代表値」とは、階級の上限値と下限値の中間値のことを指すものとする。

（b）階級「146 cm 以上 150 cm 未満」の累積相対度数に最も近い数値は［　④　］である。

（c）各階級の中で観測値は一様に分布すると仮定すると、メディアン（中央値）に最も近い数値は［　⑤　］である。なお、計算過程の中で小数を扱う場合には、小数点以下第 5 位を四捨五入して小数点以下第 4 位までの小数を用いることとする。

階級	度数
134cm以上 138cm未満	6
138cm以上 142cm未満	9
142cm以上 146cm未満	22
146cm以上 150cm未満	20
150cm以上 154cm未満	11
154cm以上 158cm未満	10
158cm以上 162cm未満	7
162cm以上 166cm未満	4
166cm以上 170cm未満	2
合計	91

[①、②の選択肢]

（A）143　（B）144　（C）145　（D）146　（E）147

（F）148　（G）149　（H）150　（I）151　（J）152

[③の選択肢]

（A）2.0　（B）2.7　（C）3.0　（D）4.0　（E）4.3

（F）5.4　（G）6.0　（H）6.5　（I）8.0　（J）10.8

[④の選択肢]

（Ａ） 0.20	（Ｂ） 0.2198	（Ｃ） 0.370	（Ｄ） 0.4066	（Ｅ） 0.5160
（Ｆ） 0.570	（Ｇ） 0.6264	（Ｈ） 0.680	（Ｉ） 0.710	（Ｊ） 0.7473

[⑤の選択肢]

（Ａ） 147.5	（Ｂ） 147.6	（Ｃ） 147.7	（Ｄ） 147.8	（Ｅ） 147.9
（Ｆ） 148.0	（Ｇ） 148.1	（Ｈ） 148.2	（Ｉ） 148.3	（Ｊ） 148.4

（2）ある都市である政党の支持率を調査した。男性 60人、女性 180人をそれぞれ無作為に抽出してアンケートをとったところ、男性は 35人、女性は 75人が政党を支持すると回答した。
この都市の男性と女性の人口の比は 2：3 であるとし、この都市全体の支持率を近似法により信頼係数 95%で区間推定すると、信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ であり、信頼区間の上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ である。
なお、男性の支持率と女性の支持率は互いに独立であるとし、この都市全体の支持率の推定量には男性の支持率の推定量と女性の支持率の推定量を人口の比で加重平均したものを用いることとする。

[⑥の選択肢]

（A） 0.3393　（B） 0.3630　（C） 0.3867　（D） 0.3953　（E） 0.4013

（F） 0.4088　（G） 0.4173　（H） 0.4279　（I） 0.4365　（J） 0.4583

[⑦の選択肢]

（A） 0.5084　（B） 0.5140　（C） 0.5214　（D） 0.5387　（E） 0.5493

（F） 0.5654　（G） 0.580　（H） 0.5969　（I） 0.6037　（J） 0.6274

（３）指数分布の母平均 $\mu\,(\mu > 0)$ の片側検定において、真の平均が帰無仮説において仮定された平均の 5 倍であったとき、帰無仮説が 99% 以上の確率で棄却されるために必要な最小の標本数 n（n は正の整数）を求めたい。標本平均を $\bar{X}$ とし、統計量 ⑧ が自由度 $2n$ の χ^2 分布に従うことを利用すれば、必要な最小の標本数は ⑨ 個である。ただし、有意水準は 5% とする。

［⑧の選択肢］

（A） $n\bar{X}$　（B） $2n\bar{X}$　（C） $n\mu\bar{X}$　（D） $2n\mu\bar{X}$

（E） $\dfrac{n\mu\bar{X}}{2}$　（F） $\dfrac{n\bar{X}}{\mu}$　（G） $\dfrac{2n\bar{X}}{\mu}$　（H） $\dfrac{n\mu}{\bar{X}}$

［⑨の選択肢］

（A） 6　（B） 7　（C） 8　（D） 9　（E） 10

（F） 11　（G） 12　（H） 13　（I） 14　（J） 15

（K） 16　（L） 17　（M） 18　（N） 19　（O） 20

（4）メンデルの法則に適合しているか確かめるために、無作為に選んだエンドウ豆について調べたところ、下表のデータを得た。

（単位：個）

	丸い豆	しわのある豆	合計
黄色の豆	280	x	$280+x$
緑色の豆	80	$120-x$	$200-x$
合計	360	120	480

ただし、x は $0 \leq x \leq 120$ の範囲の整数

メンデルの法則が正しいならば、エンドウ豆の数の比は、

丸くて黄色：丸くて緑色：しわがあって黄色：しわがあって緑色 = 9：3：3：1

になるはずである。

いま、観測度数がメンデルの法則に適合しているという仮説を有意水準5%で検定したところ、仮説が採択されたとする。このとき、しわがあって黄色のエンドウ豆の個数 x がとりうる値のうち最小値は $\boxed{\text{⑩}}$ であり、最大値は $\boxed{\text{⑪}}$ である。

なお、計算過程の中で小数を扱う場合には、小数点以下第 6 位を四捨五入して小数点以下第 5 位までの小数を用いることとする。

［⑩の選択肢］

（A） 76　（B） 77　（C） 78　（D） 79　（E） 80

（F） 81　（G） 82　（H） 83　（I） 84　（J） 85

［⑪の選択肢］

（A） 95　（B） 96　（C） 97　（D） 98　（E） 99

（F） 100　（G） 101　（H） 102　（I） 103　（J） 104

（５）ある保険法人代理店Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄの収入保険料、資本金および従業員数はそれぞれ下表の通りであった。

保険法人代理店 i	Ａ$(i=1)$	Ｂ$(i=2)$	Ｃ$(i=3)$	Ｄ$(i=4)$	合計
収入保険料（百万円）　y_i	200	400	200	100	900
資本金（百万円）　x_{1i}	20	100	80	40	240
従業員数（人）　x_{2i}	2	10	6	2	20

ここで、

$$\sum_{i=1}^{4} {x_{1i}}^2 = 18{,}400 \text{、} \sum_{i=1}^{4} {x_{2i}}^2 = 144 \text{、} \sum_{i=1}^{4} x_{1i}x_{2i} = 1{,}600 \text{、} \sum_{i=1}^{4} x_{1i}y_i = 64{,}000 \text{、} \sum_{i=1}^{4} x_{2i}y_i = 5{,}800$$

である。

収入保険料を資本金で説明する単回帰式

収入保険料（百万円）$=\alpha+\beta\times$資本金（百万円）…（ａ）

で回帰係数 $\alpha,\ \beta$ を最小二乗法によって推定する場合と、
収入保険料を資本金と従業員数で説明する重回帰式

収入保険料（百万円）$=\alpha_1+\beta_1\times$資本金（百万円）$+\beta_2\times$従業員数（人）…（ｂ）

で回帰係数 $\alpha_1,\ \beta_1,\ \beta_2$ を最小二乗法によって推定する場合を考える。

いま、（ａ）の単回帰式と（ｂ）の重回帰式を用いて、下表の保険法人代理店Ｅ、Ｆの収入保険料をそれぞれ推定する。

保険法人代理店	Ｅ	Ｆ
資本金（百万円）	32	38
従業員数（人）	3	3

（ａ）の単回帰式の場合、保険法人代理店Ｅ、Ｆの収入保険料の推定値はそれぞれ $\boxed{⑫}$、$\boxed{⑬}$ である。
（ｂ）の重回帰式の場合、保険法人代理店Ｅ、Ｆの収入保険料の推定値はそれぞれ $\boxed{⑭}$、$\boxed{⑮}$ である。
一般に、重回帰式では説明変数間の相関が極めて強いとき、推定の精度が低下することがある。
このような状態を、説明変数間に $\boxed{⑯}$ があるという。

[⑫～⑮の選択肢]

（A） 100	（B） 105	（C） 110	（D） 115	（E） 120
（F） 125	（G） 130	（H） 135	（I） 140	（J） 145
（K） 150	（L） 155	（M） 160	（N） 165	（O） 170
（P） 175	（Q） 180	（R） 185	（S） 190	（T） 195
（U） 200	（V） 205	（W） 210	（X） 215	（Y） 220

[⑯の選択肢]

（A） 一次独立の関係	（B） 多重共線性	（C） 再生性
（D） 非線形性	（E） 一致性	（F） 定常性
（G） 自己相関	（H） 独立性	

（６）確率過程 $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ が定常な 2 次の自己回帰モデル $AR(2)$ に従い、Y_t は

$$Y_t = \frac{1}{2} + \frac{7}{10}Y_{t-1} - \frac{3}{10}Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

で与えられているとする。ここで、誤差項である ε_t は、$Y_{t-1}, Y_{t-2}, \cdots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ と互いに独立であり、平均 $E[\varepsilon_t] = 0$ 、分散 $V[\varepsilon_t] = 1$ の t に依存しない同一分布に従う確率変数である。このとき、$\{Y_t\}$ の分散 γ_0 は ⑰ であり、時差 2 の自己共分散 γ_2 は ⑱ である。

［⑰、⑱の選択肢］

（Ａ） 0	（Ｂ） $\frac{5}{42}$	（Ｃ） $\frac{5}{21}$	（Ｄ） $\frac{5}{14}$
（Ｅ） $\frac{10}{21}$	（Ｆ） $\frac{25}{42}$	（Ｇ） $\frac{5}{7}$	（Ｈ） $\frac{5}{6}$
（Ｉ） $\frac{20}{21}$	（Ｊ） $\frac{15}{14}$	（Ｋ） $\frac{25}{21}$	（Ｌ） $\frac{55}{42}$
（Ｍ） $\frac{10}{7}$	（Ｎ） $\frac{65}{42}$	（Ｏ） $\frac{5}{3}$	（Ｐ） $\frac{25}{14}$

問題３． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１５点）

（１）あるサッカーチームは、A リーグか B リーグのいずれかに属しており、毎年一定の確率で昇格降格する。このサッカーチームが、ある年に B リーグに属していたが、その n 年後に A リーグに属している確率を求めたい。

A リーグを状態１、B リーグを状態 2 として、状態 i が次の年に状態 j となる推移確率を p_{ij} 、状態 i が n 年後に状態 j となる推移確率を ${}_{n}p_{ij}$ とする。

このとき、推移確率 p_{ij} を行列の (i,j) 成分とする推移確率行列 P を、

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

で表すと、状態 i が $n+m$ 年後に状態 j となる推移確率 ${}_{n+m}p_{ij}$ に対し、

$${}_{n+m}p_{ij} = \sum_{k=1,2} \boxed{\quad ① \quad}$$

が成り立つから、${}_{n}p_{ij}$ を求めるためには P^n を求めればよい。

いま、A リーグに属していてその翌年に A リーグに属している確率を 0.7、B リーグに属していてその翌年に A リーグに属している確率を 0.2 とする。

固有多項式

$$\varphi_P(\lambda) = \det(\lambda I - P) = 0$$

より λ について解くと、

$$\lambda_1 = \boxed{\quad ② \quad}、\ \lambda_2 = \boxed{\quad ③ \quad} \qquad (\lambda_1 > \lambda_2 \text{ とする})$$

である。ここで、$\det(\cdot)$ は行列式、I は 2 次の単位行列である。

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (x_1 \neq 0、x_2 \neq 0)$$

を解くと、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\quad ④ \quad} c_1 \qquad (c_1 \text{ は } 0 \text{ でない任意の実数})$$

また、

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (x_1 \neq 0、x_2 \neq 0)$$

を解くと、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\quad ⑤ \quad} c_2 \qquad (c_2 \text{ は } 0 \text{ でない任意の実数})$$

よって、2 次の正方行列 X を

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \left(ただし、\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \boxed{\quad ④ \quad}、\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \boxed{\quad ⑤ \quad} \right)$$

とするとき、

$$X^{-1}PX=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

は対角行列となる。ここで、X^{-1} は X の逆行列である。

したがって、

$$P^n=\begin{pmatrix} \boxed{\quad ⑥ \quad} & \boxed{\quad ⑦ \quad} \\ \boxed{\quad ⑧ \quad} & \boxed{\quad ⑨ \quad} \end{pmatrix}$$

となる。

よって、ある年に B リーグに属していたが、その 5 年後に A リーグに属している確率は $\boxed{\quad ⑩ \quad}$ である。

[①の選択肢]

（A）$_{n}p_{ik} \times {}_{m}p_{ij}$　（B）$_{n}p_{ij} \times {}_{m}p_{kj}$　（C）$_{n}p_{ik} \times {}_{m}p_{kj}$　（D）$_{n}p_{jk} \times {}_{m}p_{ki}$

（E）$_{n+k}p_{ik} \times {}_{m-k}p_{ij}$　（F）$_{n+k}p_{ij} \times {}_{m-k}p_{kj}$　（G）$_{n+k}p_{ik} \times {}_{m-k}p_{kj}$　（H）$_{n+k}p_{jk} \times {}_{m-k}p_{ki}$

[②、③の選択肢]

（A）-1　（B）-0.8　（C）-0.7　（D）-0.5　（E）-0.1

（F）0.1　（G）0.5　（H）0.7　（I）0.8　（J）1

[④、⑤の選択肢]

（A）$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$　（E）$\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

（F）$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$　（G）$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$　（H）$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$　（I）$\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$　（J）$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

［⑥～⑨の選択肢］

（A） $\frac{1}{5}(2-3\cdot 0.5^n)$　（B） $\frac{1}{5}(2-2\cdot 0.5^n)$　（C） $\frac{1}{5}(2+2\cdot 0.5^n)$

（D） $\frac{1}{5}(2+3\cdot 0.5^n)$　（E） $\frac{1}{5}(3-3\cdot 0.5^n)$　（F） $\frac{1}{5}(3-2\cdot 0.5^n)$

（G） $\frac{1}{5}(3+2\cdot 0.5^n)$　（H） $\frac{1}{5}(3+3\cdot 0.5^n)$　（I） $\frac{1}{5}(0.8^n+0.7^n)$

（J） $\frac{1}{5}(0.8^n-0.7^n)$　（K） $\frac{1}{5}(-2\cdot 0.8^n+8\cdot 0.7^n)$　（L） $\frac{1}{5}(2\cdot 0.8^n+8\cdot 0.7^n)$

（M） $\frac{1}{5}(3\cdot 0.8^n-2\cdot 0.7^n)$　（N） $\frac{1}{5}(3\cdot 0.8^n+2\cdot 0.7^n)$　（O） $\frac{1}{5}(3.5\cdot 0.8^n+0.7^n)$

（P） $\frac{1}{5}(3.5\cdot 0.8^n-0.7^n)$

［⑩の選択肢］

（A） 0.381　（B） 0.388　（C） 0.40　（D） 0.413　（E） 0.419

（F） 0.581　（G） 0.588　（H） 0.60　（I） 0.613　（J） 0.619

（２）ある検定試験の受験者は「レベル１」「レベル２」「レベル３」「レベル４」「レベル５」のいずれかに該当し、毎年受験を行ってその結果により各レベルに振り分けられるとする。また、「レベル３」「レベル４」「レベル５」のいずれかのレベルに到達すると試験合格となり、翌年以降の受験は免除になるとする。「レベル１」および「レベル２」であった受験者数は均一であるものとする。「レベル k $(k=1,2,3,4,5)$」を状態 k $(k=1,2,3,4,5)$ として、状態 i が翌年の受験結果によって状態 j となる推移確率を行列の (i,j) 成分とする推移確率行列 P は、次で表されるとする。

$$P=\begin{pmatrix} \frac{8}{16} & \frac{4}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{2}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

いま、「ある年」に受験した結果が「レベル１」「レベル２」であった受験者を対象に、翌年以降十分な時間が経過し、これらの受験者が「レベル３」「レベル４」「レベル５」のいずれかのレベルになった状態を考える。

ここで、2 次または 3 次の単位行列 I 、ゼロ行列 O 、2 次の正方行列 Q 、2×3 行列 R を用いて、

$$P=\begin{pmatrix}Q & R\\ O & I\end{pmatrix}$$

としてこの行列 P を表すと、P^2 は

$$P^2=\begin{pmatrix}Q & R\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & R\\ O & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q^2 & (I+Q)R\\ O & I\end{pmatrix}$$

と表せる。よって、行列 P を繰り返し掛け合わせていくと、P^n は

$$P^n=\begin{pmatrix}\boxed{⑪} & \boxed{⑫}\\ \boxed{⑬} & \boxed{⑭}\end{pmatrix}$$

と表せる。よって、十分な時間が経つと、

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}\boxed{⑮} & \boxed{⑯}\\ \boxed{⑰} & \boxed{⑱}\end{pmatrix}$$

となる。

したがって、「ある年」に受験した結果が「レベル 2 」であった受験者が十分な時間が経過したのち「レベル 5 」となる確率は $\boxed{⑲}$ であり、十分な時間が経過したのち「レベル 4 」となっている受験者のうち元々「ある年」に受験した結果が「レベル 1 」であった確率は $\boxed{⑳}$ である。

[⑪～⑱の選択肢]

(A) O　(B) I　(C) Q

(D) R　(E) Q^n　(F) R^n

(G) QR　(H) $(QR)^n$　(I) $I-Q$

(J) $(I-Q)^n$　(K) $(I-Q)^{-1}$　(L) $(I-Q)R$

(M) $(I-Q)^nR$　(N) $(I-Q)^{-1}R$　(O) $(I+Q)R$

(P) $(I+Q)^nR$　(Q) $(I+Q)^{-1}R$　(R) $(I-QR)^{-1}$

(S) $(I-Q)^{-1}(I-Q^n)R$　(T) $(I-QR)^{-1}\{I-(QR)^n\}$　(U) $(I+QR)^{-1}$

(V) $(I+Q)^{-1}(I+Q^n)R$　(W) $(I+QR)^{-1}\{I+(QR)^n\}$

[⑲の選択肢]

（Ａ）	$\frac{1}{32}$	（Ｂ）	$\frac{3}{32}$	（Ｃ）	$\frac{1}{8}$	（Ｄ）	$\frac{5}{36}$	（Ｅ）	$\frac{5}{32}$
（Ｆ）	$\frac{7}{36}$	（Ｇ）	$\frac{1}{4}$	（Ｈ）	$\frac{11}{36}$	（Ｉ）	$\frac{13}{36}$	（Ｊ）	$\frac{1}{2}$

[⑳の選択肢]

（Ａ）	$\frac{3}{32}$	（Ｂ）	$\frac{5}{32}$	（Ｃ）	$\frac{11}{60}$	（Ｄ）	$\frac{13}{60}$	（Ｅ）	$\frac{11}{36}$
（Ｆ）	$\frac{13}{36}$	（Ｇ）	$\frac{11}{24}$	（Ｈ）	$\frac{11}{23}$	（Ｉ）	$\frac{12}{23}$	（Ｊ）	$\frac{13}{24}$

問題４． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１５点）

トランプのクラブ、ハート、スペード、ダイヤの 4 つのマークそれぞれについて、10、Ｊ（11）、Ｑ（12）、K（13）、Ａ（1）の 5 つの数字のカードが各 1 枚ずつ合計 20 枚ある。この 20 枚のカードから無作為に 5 枚のカードを引き、次の役のうちどの役が出来るかを確認する。

役	役の内容
フラッシュ	同じマークが 5 枚揃う
フォーカード	同じ数字が 4 枚揃う（残りの 1 枚は何でもよい）
フルハウス	同じ数字が 3 枚揃い、残りの 2 枚のカードは 3 枚揃った数字と別の数字が 2 枚揃う（以下、同じ数字が 2 枚だけ揃うことをペアとよぶ）
ストレート	10、Ｊ（11）、Ｑ（12）、K（13）、Ａ（1）の数字が揃う
スリーカード	同じ数字が 3 枚揃い、残りの 2 枚のカードはそれぞれ別の数字
ツーペア	ペアが 2 組でき、残り 1 枚は別の数字
ワンペア	ペアが 1 組でき、残りの 3 枚のカードはそれぞれ別の数字

上位の役
⇕
下位の役

なお、役は上位のものから、「フラッシュ」、「フォーカード」、「フルハウス」、「ストレート」、「スリーカード」、「ツーペア」、「ワンペア」の順とし、上位の役と下位の役が両方成立した場合には上位の役を優先して下位の役は成立しないものとする。

（１）この試行を 1 回行うとき、5 枚のカードの組合せは $\boxed{①}$ 通りである。

「ワンペア」が出来る確率を考える。まず、ペアになる 2 枚のカードを決め、その後残りの 3 枚のカードを決めるとすると、ペアになる 2 枚のカードの組合せは $\boxed{②}$ 通りであり、ペアにならない残りの 3 枚のカードの組合せは $\boxed{③}$ 通りである。よって、「ワンペア」が出来る確率に最も近い数値は $\boxed{④}$ である。

「ワンペア」の場合と同様に考えると、「ツーペア」が出来る確率に最も近い数値は $\boxed{⑤}$ である。したがって、「スリーカード以上の役」が出来る確率に最も近い数値は $\boxed{⑥}$ である。

[①～③の選択肢]

（Ａ） 4	（Ｂ） 5	（Ｃ） 16	（Ｄ） 20	（Ｅ） 25
（Ｆ） 30	（Ｇ） 60	（Ｈ） 125	（Ｉ） 256	（Ｊ） 625
（Ｋ） 3,125	（Ｌ） 3,876	（Ｍ） 15,504	（Ｎ） 77,520	（Ｏ） 1,860,480

[④～⑥の選択肢]

（A） 0.023	（B） 0.031	（C） 0.033	（D） 0.124	（E） 0.139
（F） 0.226	（G） 0.232	（H） 0.263	（I） 0.279	（J） 0.348
（K） 0.366	（L） 0.495	（M） 0.505	（N） 0.619	（O） 0.737

（2）この試行を繰り返し、「ストレート」が初めて出来たときに試行を終了する場合を考える。「ストレート」が出来る確率を p とし、総試行回数 X の期待値を $E[X]$ とすると、$E[X]$ は ⑦ という式で表される。これを変形して計算すると、$E[X]$ に最も近い数値は ⑧ である。次に、この試行を繰り返し、「スリーカード以上の役」と「ツーペア以下の役」がともに 1 回以上出来た時点で試行を終了する場合を考える。例えば、「スリーカード」、「ストレート」、「ワンペア」の順に役が出来たとき、総試行回数は 3 回である。総試行回数 Y の期待値を $E[Y]$ とすると、$E[Y]$ に最も近い数値は ⑨ である。

[⑦の選択肢]

（A） $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}$　（B） $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i}$　（C） $\displaystyle p\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1}$

（D） $\displaystyle p\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i}$　（E） $\displaystyle p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}$　（F） $\displaystyle p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i}$

（G） $\displaystyle p\sum_{i=1}^{\infty} (i+1)(1-p)^{i-1}$　（H） $\displaystyle p\sum_{i=1}^{\infty} (i+1)(1-p)^{i}$

[⑧、⑨の選択肢]

（A） 1.4	（B） 4.4	（C） 4.6	（D） 4.7	（E） 5.6
（F） 5.7	（G） 8.1	（H） 8.2	（I） 15.1	（J） 15.2
（K） 19.6	（L） 22.2	（M） 32	（N） 231	（O） 3,876

（３）この試行を n 回繰り返したとき、「スリーカード以上の役」の連が k 回出来る確率を求める。
ここで、『「スリーカード以上の役」の連』とは『「スリーカード以上の役」が 1 回以上連続した一区切りとなっている部分』として定義する。例えば、●を「スリーカード以上の役」、○を「ツーペア以下の役」とし、この試行を 10 回行った結果、「○●○●●○●●●●」であった場合、「スリーカード以上の役」の連は「○$\boxed{●}$○$\boxed{●●}$○$\boxed{●●●●}$」の $\boxed{}$ で囲った 3 回である。

まず、試行回数 n 回のうち「スリーカード以上の役」が x 回出来た場合に「スリーカード以上の役」の連が k 回出来る確率を考える。ここで、$1 \leq k \leq \min\{x, n-x+1\}$ である。

これは次のように考えれば良い。

区別のない黒玉 x 個、区別のない白玉 $n-x$ 個がある。まず、直線上に k 箇所を指定して黒玉を 1 個ずつおく。残り $x-k$ 個の黒玉をこの k 箇所に重複を許容し、また配らない場所があることも許容して追加で配るとき、分配する方法は $\boxed{⑩}$ 通りである。さらに、黒玉をおいた k 箇所の間の $k-1$ 箇所に白玉を 1 個ずつおき、残り $n-x-k+1$ 個の白玉をこの $k-1$ 箇所および両端の 2 箇所に重複を許容し、また配らない場所があることも許容して追加で配るとき、分配する方法は $\boxed{⑪}$ 通りである。

以上より、試行回数 n 回のうち「スリーカード以上の役」が x 回出来た場合に「スリーカード以上の役」の連が k 回出来る確率を求めることが出来る。

よって、「スリーカード以上の役」が出来る確率を q とすると、この試行を n 回繰り返したときに「スリーカード以上の役」の連が k 回出来る確率は

$$\sum_{x=\boxed{⑫}}^{\boxed{⑬}} \boxed{⑩} \times \boxed{⑪} \times \boxed{⑭}$$

である。この試行を 4 回繰り返したとき、「スリーカード以上の役」の連が 2 回出来る確率に最も近い数値は、$q = \boxed{⑥}$ であるから、$\boxed{⑮}$ である。

［⑩、⑪の選択肢］

（A） $\binom{x-k}{k}$　（B） $\binom{x-1}{k}$　（C） $\binom{x}{k}$　（D） $\binom{x-1}{k-1}$

（E） $\binom{x}{k-1}$　（F） $\binom{n-x-k+1}{k-1}$　（G） $\binom{n-x-k+1}{k}$　（H） $\binom{n-x}{k}$

（I） $\binom{n-x+1}{k-1}$　（J） $\binom{n-x+1}{k}$

［⑫、⑬の選択肢］

（A） $k-1$　（B） k　（C） $k+1$　（D） $n-k-1$　（E） $n-k$

（F） $n-k+1$　（G） $n-1$　（H） n

[⑭の選択肢]

（A） $q^x(1-q)^{n-x}/\binom{n}{x}$ （B） $q^k(1-q)^{n-k}/\binom{n}{x}$ （C） $q(1-q)^{n-1}/\binom{n}{x}$

（D） $q^x(1-q)^{n-x}/\binom{n}{k}$ （E） $q^k(1-q)^{n-k}/\binom{n}{k}$ （F） $q(1-q)^{n-1}/\binom{n}{k}$

（G） $q^x(1-q)^{n-x}$ （H） $q^k(1-q)^{n-k}$ （I） $q(1-q)^{n-1}$

（J） $\binom{n}{x}q^x(1-q)^{n-x}$ （K） $\binom{n}{x}q^k(1-q)^{n-k}$ （L） $\binom{n}{x}q(1-q)^{n-1}$

（M） $\binom{n}{k}q^x(1-q)^{n-x}$ （N） $\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}$ （O） $\binom{n}{k}q(1-q)^{n-1}$

[⑮の選択肢]

（A） 0.01 （B） 0.03 （C） 0.05 （D） 0.07 （E） 0.09

（F） 0.11 （G） 0.13 （H） 0.15 （I） 0.17 （J） 0.19

（K） 0.21 （L） 0.23 （M） 0.25 （N） 0.27 （O） 0.29

（P） 0.31 （Q） 0.33 （R） 0.35 （S） 0.37 （T） 0.39

（4）最後にこの試行を使ったゲームを考える。このゲームは、試行 1 回につき金貨を 1 枚支払い、「スリーカード以上の役」が出来た場合には金貨を 2 枚獲得して 1 回のゲームを終了し、「ツーペア以下の役」が出来た場合には金貨は戻ってこないまま 1 回のゲームを終了する。

いま、金貨が手元に m 枚あり、各ゲーム終了時に金貨が 0 枚になるか M 枚になるまでこのゲームを繰り返すとき、金貨が 0 枚になる確率 P_m を求めたい。ただし、$0<m<M$ であり、m, M は正の整数とする。

「スリーカード以上の役」が出来る確率を q とすると、P_m は $\boxed{⑯}$ である。$m=4$、$M=6$ とし、（1）の結果を用いて金貨が 0 枚になる確率 P_4 を計算すると、$q=$ $\boxed{⑥}$ であるから P_4 に最も近い数値は $\boxed{⑰}$ である。

[⑯の選択肢]

（A）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)^{m-1}-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M-1}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M-1}}$　（B）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)^{m-1}-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M}}$　（C）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)^{m-1}-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M+1}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M+1}}$

（D）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)^{m}-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M-1}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M-1}}$　（E）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)^{m}-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M}}$　（F）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)^{m}-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M+1}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M+1}}$

（G）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M-m-1}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M-1}}$　（H）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M-m}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M}}$　（I）$\dfrac{\left(\frac{q}{1-q}\right)-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M-m+1}}{1-\left(\frac{q}{1-q}\right)^{M+1}}$

（J）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^{m-1}-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M-1}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M-1}}$　（K）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^{m-1}-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M}}$　（L）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^{m-1}-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M+1}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M+1}}$

（M）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^{m}-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M-1}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M-1}}$　（N）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^{m}-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M}}$　（O）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^{m}-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M+1}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M+1}}$

（P）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M-m-1}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M-1}}$　（Q）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M-m}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M}}$　（R）$\dfrac{\left(\frac{1-q}{q}\right)-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M-m+1}}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^{M+1}}$

[⑰の選択肢]

（A）0.60　（B）0.62　（C）0.64　（D）0.66　（E）0.68

（F）0.70　（G）0.72　（H）0.74　（I）0.76　（J）0.78

（K）0.80　（L）0.82　（M）0.84　（N）0.86　（O）0.88

（P）0.90　（Q）0.92　（R）0.94　（S）0.96　（T）0.98

問題５． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１５点）

（１）あるロットから大きさ n の標本を抽出したところ、k 個の不良品が入っていたが、このロットの不良率は $r_0\ (0 < r_0 < 1)$ 未満であることが望ましいとされているとき、このロットは合格とするべきかどうかを有意水準 $\varepsilon\ (0 < \varepsilon < 1)$ で精密法を用いて片側検定する。

大きさ n の標本中の $i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 番目の標本が不良品のときに１、良品のときに０となる互いに独立な確率変数を X_i とおき、X_i はすべて不良率 $r\ (0 < r < 1)$ のベルヌーイ分布 $\mathrm{Bi}(1,r)$ に従うとし、この標本和を $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする。

帰無仮説を $H_0 : r = r_0$ 、対立仮説を $H_1 : r < r_0$ とし、S_n の分布の帰無仮説 H_0 の下での下側 ε 点を $P(S_n \le m) \le \varepsilon$ を満たす最大の m として定めると、棄却域 R は $S_n \le m$ となる。

S_n の実現値を k として、$k \le m$ とする。以下、$k \le m$ の必要十分条件を求める。

$$k \le m \iff P(S_n \le k) \le \varepsilon$$

であり、$P(S_n \le k)$ は、

$$P(S_n \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{\boxed{①}}{\boxed{②}} r_0^{\boxed{②}} (1 - r_0)^{\boxed{③}}$$

と表せる。a、b が正の整数のとき、ベータ関数 $B(a,b) = \dfrac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}$ であることを踏まえ、

$\dfrac{1}{B(k+1,n-k)} \displaystyle\int_0^{1-r_0} t^{n-k-1}(1-t)^k dt$ の部分積分を考えると、

$$\frac{1}{B(k+1,n-k)} \int_0^{1-r_0} t^{n-k-1}(1-t)^k dt$$
$$= \binom{\boxed{④}}{\boxed{⑤}} r_0^{\boxed{⑤}} (1-r_0)^{\boxed{⑥}} + \frac{1}{\boxed{⑦}} \int_0^{1-r_0} t^{n-k}(1-t)^{k-1} dt$$

となることから、これを帰納的に用いて、

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{\boxed{①}}{\boxed{②}} r_0^{\boxed{②}} (1-r_0)^{\boxed{③}} = \frac{1}{B(k+1,n-k)} \int_0^{1-r_0} t^{n-k-1}(1-t)^k dt$$

と表せる。ここで、$\phi_1 = 2(k+1)$、$\phi_2 = 2(n-k)$ とおけば、

$$t^{n-k-1}(1-t)^k = \left(\frac{1}{t}\right)^{\boxed{⑧}} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\boxed{⑨}}$$

であり、$t = \dfrac{\phi_2}{\phi_1 x + \phi_2}$ とおくと、

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{\boxed{①}}{\boxed{②}} r_0^{\boxed{②}} (1-r_0)^{\boxed{③}}$$
$$= \int_{\boxed{⑩}}^{\infty} \frac{1}{B\left(\frac{\phi_1}{2}, \frac{\phi_2}{2}\right)} \left(\boxed{⑪}\right)^{\boxed{⑫}} x^{\boxed{⑬}} \left(1 + \boxed{⑪}\, x\right)^{-\left(\boxed{⑭}\right)} dx$$

となり、右辺の被積分関数は自由度 (ϕ_1, ϕ_2) の F 分布の確率密度関数である。

したがって、自由度 (ϕ_1,ϕ_2) の F 分布に従う確率変数を $F_{\phi_2}^{\phi_1}$、$\boxed{\quad ⑩ \quad}$ を $h(r_0,\phi_1,\phi_2)$ とおくと、

$$P(S_n \leq k) = P\left(h(r_0,\phi_1,\phi_2) \leq F_{\phi_2}^{\phi_1}\right) \leq \varepsilon$$

となるので、棄却域 R は S_n の実現値 k を用いて表すことができる。
いま、$n=6$、$\varepsilon=5\%$、$k=3$、$r_0=70\%$ とするとき、$h(r_0,\phi_1,\phi_2)=\boxed{\quad ⑮ \quad}$ となることから、H_0 は $\boxed{\quad ⑯ \quad}$ される。

[①～⑥の選択肢]

(A) $n-1$	**(B)** n	**(C)** $n+1$	**(D)** $k-1$	**(E)** k
(F) $k+1$	**(G)** $i-1$	**(H)** i	**(I)** $i+1$	**(J)** $n-k-1$
(K) $n-k$	**(L)** $n-k+1$	**(M)** $n-i-1$	**(N)** $n-i$	**(O)** $n-i+1$
(P) $k-i-1$	**(Q)** $k-i$	**(R)** $k-i+1$	**(S)** nk	**(T)** ni
(U) ki	**(V)** $n(1-k)$	**(W)** $n(1-i)$	**(X)** $k(1-i)$	

[⑦の選択肢]

(A) $B(k-1,n-k-1)$	**(B)** $B(k-1,n-k)$	**(C)** $B(k-1,n-k+1)$
(D) $B(k,n-k-1)$	**(E)** $B(k,n-k)$	**(F)** $B(k,n-k+1)$
(G) $B(k+1,n-k-1)$	**(H)** $B(k+1,n-k)$	**(I)** $B(k+1,n-k+1)$

[⑧、⑨の選択肢]

（A） $\frac{\phi_1}{2} - 1$　（B） $\frac{\phi_2}{2} - 1$　（C） $\frac{\phi_1}{2}$

（D） $\frac{\phi_2}{2}$　（E） $\frac{\phi_1}{2} + 1$　（F） $\frac{\phi_2}{2} + 1$

（G） $-\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$　（H） $\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$　（I） $1 - \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$

（J） $1 + \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$　（K） $2 - \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$　（L） $2 + \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$

[⑩の選択肢]

（A） $\frac{\phi_2}{\phi_1 r_0}$　（B） $\frac{\phi_2}{\phi_1 (1 - r_0)}$　（C） $\frac{\phi_2 r_0}{\phi_1 (1 - r_0)}$　（D） $\frac{\phi_2 (1 - r_0)}{\phi_1 r_0}$

（E） $\frac{\phi_1}{\phi_2 r_0}$　（F） $\frac{\phi_1}{\phi_2 (1 - r_0)}$　（G） $\frac{\phi_1 r_0}{\phi_2 (1 - r_0)}$　（H） $\frac{\phi_1 (1 - r_0)}{\phi_2 r_0}$

[⑪～⑭の選択肢]

（A） ϕ_1　（B） ϕ_2　（C） $\phi_1\phi_2$　（D） $\frac{\phi_1}{\phi_2}$

（E） $\frac{\phi_2}{\phi_1}$　（F） $\phi_1 - 1$　（G） $\phi_2 - 1$　（H） $\phi_1 + \phi_2$

（I） $\phi_1 - \phi_2$　（J） $\phi_1 - \phi_2 - 1$　（K） $\frac{\phi_1}{2}$　（L） $\frac{\phi_2}{2}$

（M） $\frac{\phi_1}{2} - 1$　（N） $\frac{\phi_2}{2} - 1$　（O） $\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$　（P） $\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$

[⑮の選択肢]

（A） 0.32　（B） 0.57　（C） 1.07　（D） 1.75

（E） 1.90　（F） 2.50　（G） 3.11　（H） 4.44

［⑯の選択肢］

（A） 棄却　　　　**（B）** 採択

（２）次に、（１）における不良率 r が確率変数であるときにロットを合格とすべきかどうかを考える。i $(i = 1,2,\cdots,n)$ 番目の標本を表す確率変数 Y_i は不良率 R のベルヌーイ試行で互いに独立であるとし、不良率 R はある連続な確率分布に従う確率変数であるとする。

Y_i の標本和を $T_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ とし、その実現値 $t\,(t = 0,1,\cdots,n)$ が判明しているという条件の下での不良率の条件付き確率を $P(R \in I \mid T_n = t)$ とする。ここで、I は任意の 1 次元区間である。

不良率 R の確率密度関数を f_R とすると、$P(R \in I \mid T_n = t)$ は形式的に、

$$P(R \in I \mid T_n = t) = \int_I \frac{P(T_n = t \mid R = r)\, f_R(r)}{P(T_n = t)}\, dr \qquad (t = 0,1,\cdots,n)$$

と表現できる。

R が区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $U(0,1)$ に従うとすると、$t = 0,1,\cdots,n$ に対し、

$$\int_0^1 \frac{P(T_n = t \mid R = r)\, f_R(r)}{P(T_n = t)}\, dr = \boxed{⑰}$$

となることから、

$$P(T_n = t) = \boxed{⑱} \qquad (t = 0,1,\cdots,n)$$

であり、

$$P(R \in I \mid T_n = t) = \int_I \boxed{⑲}\, dr \qquad (t = 0,1,\cdots,n)$$

となることがわかる。

いま、R が区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $U(0,1)$ に従うとき、R が $r_0\,(0 < r_0 < 1)$ 以下である条件付き確率 $P(R \le r_0 \mid T_n = t)$ が 95% 以上であれば、ロットを合格とし、そうでない場合は不合格とする。

$n = 6$、$t = 3$、$r_0 = 70\%$ とすると、$P(R \le r_0 \mid T_n = t)$ は $\boxed{⑳}$ となり、不合格となる。

［⑰～⑲の選択肢］

（A） 0	（B） 0.5	（C） 1
（D） r	（E） $1-r$	（F） $r(1-r)$
（G） $r^{t-1}(1-r)^{n-t+1}$	（H） $r^{t}(1-r)^{n-t}$	（I） $r^{t+1}(1-r)^{n-t-1}$
（J） $\binom{n}{t} r^{t-1}(1-r)^{n-t+1}$	（K） $\binom{n}{t} r^{t}(1-r)^{n-t}$	（L） $\binom{n}{t} r^{t+1}(1-r)^{n-t-1}$
（M） $B(t-1, n-t-1)$	（N） $B(t, n-t)$	（O） $B(t+1, n-t+1)$
（P） $\binom{n}{t} B(t-1, n-t-1)$	（Q） $\binom{n}{t} B(t, n-t)$	（R） $\binom{n}{t} B(t+1, n-t+1)$
（S） $\dfrac{r^{t}(1-r)^{n-t}}{B(t-1, n-t-1)}$	（T） $\dfrac{r^{t}(1-r)^{n-t}}{B(t, n-t)}$	（U） $\dfrac{r^{t}(1-r)^{n-t}}{B(t+1, n-t+1)}$
（V） $\dfrac{\binom{n}{t} r^{t}(1-r)^{n-t}}{B(t-1, n-t-1)}$	（W） $\dfrac{\binom{n}{t} r^{t}(1-r)^{n-t}}{B(t, n)}$	（X） $\dfrac{\binom{n}{t} r^{t}(1-r)^{n-t}}{B(t+1, n-t+1)}$

［⑳の選択肢］

（A） 0.65	（B） 0.67	（C） 0.69	（D） 0.71	（E） 0.73
（F） 0.75	（G） 0.77	（H） 0.79	（I） 0.81	（J） 0.83
（K） 0.85	（L） 0.87	（M） 0.89	（N） 0.91	（O） 0.93

以　上

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

II. 自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n 、分子の自由度m のF 分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon =$ 0.050

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$\exp(x)$
-2.00	0.1353
-1.50	0.2231
-1.00	0.3679
-0.50	0.6065
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052
0.50	1.6487
1.00	2.7183
1.50	4.4817
2.00	7.3891

以上

数学（解答例）

問題１.

（１）通常メールを受信するという事象を A とおく。また、メールフィルタリング機能が、受信メールを「迷惑メール」と判定する事象を E とおく。

問題文より、

・迷惑メールを受信したという条件下で、メールフィルタリング機能が「迷惑メール」と判定する確率は

$$P(E|A^c) = 0.95$$

・通常メールを受信したという条件下で、メールフィルタリング機能が「通常メール」と判定する確率は

$$P(E^c|A) = 0.98$$

・通常メールを受信する確率は

$$P(A) = 0.8$$

したがって求める確率は、ベイズの定理より、

$$\begin{aligned} P(A|E) &= \frac{P(E|A) \cdot P(A)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|A) \cdot P(A)}{P(E|A) \cdot P(A) + P(E|A^c) \cdot P(A^c)} \\ &= \frac{(1 - P(E^c|A)) \cdot P(A)}{(1 - P(E^c|A)) \cdot P(A) + P(E|A^c) \cdot (1 - P(A))} \\ &= \frac{(1 - 0.98) \cdot 0.8}{(1 - 0.98) \cdot 0.8 + 0.95 \cdot (1 - 0.8)} \\ &= 0.07766 \cdots \end{aligned}$$

よって、<u>解答は　①　**（F）**</u>

（2）

（ア）シュートを 100 回成功させるまでにシュートを外す回数 V の従う確率分布は

$$P(V=v)=\binom{99+v}{v}p^{100}(1-p)^{v} \qquad (v=0,1,\cdots)$$

と表せる。これは負の二項分布である。

（イ）シュートの成功回数 W の従う確率分布は

$$P(W=w)=\binom{100}{w}p^{w}(1-p)^{100-w} \qquad (w=0,1,\cdots,100)$$

と表せる。これは二項分布である。

（ウ）操作 S により取り出される小数部分を U とおくと、確率変数 U は区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $U(0,1)$ に従う。操作 S を独立に 100 回繰り返し、取り出した小数を小さい順に並べたときに i 番目の大きさとなる数を表す確率変数を X とし、X の確率密度関数を f 、微小量を dx とする。$x_i \leq X \leq x_i+dx_i$ である事象の確率は、$U_1,U_2,\cdots,U_{100}$ のうち、$i-1$ 個が x_i より小、1 個が区間 (x_i,x_i+dx_i) に入り、残りの $100-i$ 個が x_i+dx_i より大、である事象の確率となる。U の確率密度関数を g とすると、1 個が区間 (x_i,x_i+dx_i) に入る確率は $g(x_i)\,dx_i$ であるから、事象の確率は、

$$P(x_i \leq X \leq x_i+dx_i)=\frac{100!}{(i-1)!\,(100-i)!}\left\{\int_0^{x_i} g(x)\,dx\right\}^{i-1}\left\{\int_{x_i+dx_i}^{\infty} g(x)\,dx\right\}^{100-i} g(x_i)\,dx_i$$

と書ける。したがって $dx_i \to 0$ のとき、

$$f(x_i)=\frac{100!}{(i-1)!\,(100-i)!}\left\{\int_0^{x_i} g(x)\,dx\right\}^{i-1}\left\{\int_{x_i}^{\infty} g(x)\,dx\right\}^{100-i} g(x_i)$$

となる。確率変数 U は一様分布 $U(0,1)$ に従うので、$x_i \in (0,1)$ に対し、

$$f(x_i)=\frac{100!}{(i-1)!\,(100-i)!}\,{x_i}^{i-1}(1-x_i)^{100-i}=\frac{1}{B(i,100-i+1)}\,{x_i}^{i-1}(1-x_i)^{100-i}$$

よって、X はベータ分布に従う。

（エ）自動車事故の発生間隔が平均 $\sigma\ (\sigma>0)$ の指数分布に従うとする。各自動車事故は互いに独立であるため、ガンマ分布の再生性より、自動車事故が $k\ (k>0)$ 回起こるまでの時間間隔を X_k とおくと、確率変数 X_k はガンマ分布に従い、確率密度関数 g_{X_k} は

$$g_{X_k}(x)=\frac{1}{\Gamma(k)\sigma^k}x^{k-1}e^{-x/\sigma} \qquad (x>0)$$

と表される。

期間 $(0,1]$ 内に起こる事故の件数 Y に関して、

$$P(Y \geq k)=P(X_k \leq 1)$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=P(Y\geq k)-P(Y\geq k+1)\\&=P(X_k\leq 1)-P(X_{k+1}\leq 1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(k)\sigma^k} x^{k-1} e^{-x/\sigma}\, dx - \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(k+1)\sigma^{k+1}} x^k e^{-x/\sigma}\, dx \\
&= \left\{ \left[\frac{1}{\Gamma(k)\sigma^k} \frac{1}{k} x^k e^{-x/\sigma} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(k)\sigma^k} \frac{1}{k} x^k \left(\frac{-1}{\sigma} \right) e^{-x/\sigma}\, dx \right\} - \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(k+1)\sigma^{k+1}} x^k e^{-x/\sigma}\, dx \\
&= \left\{ \left[\frac{1}{\Gamma(k+1)\sigma^k} x^k e^{-x/\sigma} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(k+1)\sigma^{k+1}} x^k e^{-x/\sigma}\, dx \right\} - \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(k+1)\sigma^{k+1}} x^k e^{-x/\sigma}\, dx \\
&= \frac{1}{k!\,\sigma^k} e^{-1/\sigma} \\
&= \frac{(1/\sigma)^k}{k!} e^{-1/\sigma}
\end{aligned}
$$

となる。これはポアソン分布である。

（オ）問題文より、$T = \log Z$ が正規分布に従うことから、Z の従う確率分布は対数正規分布である。

よって、解答は　②（**D**）　③（**C**）　④（**H**）　⑤（**F**）　⑥（**L**）

（3）$Z=X-Y,\ W=Y$ とおくと、$X=Z+W,\ Y=W$ となり、ヤコビアン J を求めると、

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

である。

よって、Z,W の同時確率密度関数を $f_{Z,W}(z,w)$ とすると、

$$f_{Z,W}(z,w)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times|J|=\frac{1}{4}$$

$-1<x<1,-1<y<1$ であるから、$-2<z<2,-1<w<1$ となり、Z の確率密度関数 $f(z)$ を求めると、

$$f(z)=\int_{-1}^{1}f_{Z,W}(z,w)dw$$

ここで、$f_{Z,W}(z,w)=\dfrac{1}{4}$ となるのは、$-1<z+w<1,-1-z<w<1-z$ であるから、

$0\leq z<2$ のとき、

$$f(z)=\int_{-1}^{1}f_{Z,W}(z,w)dw=\int_{-1}^{1-z}\frac{1}{4}dw=\frac{1}{4}(2-z)$$

$-2<z<0$ のとき、

$$f(z)=\int_{-1}^{1}f_{Z,W}(z,w)dw=\int_{-1-z}^{1}\frac{1}{4}dw=\frac{1}{4}(2+z)$$

したがって、

$$f(z)=\frac{1}{4}(2-|z|)\qquad(-2<z<2)$$

よって、解答は　⑦（Ｈ）　⑧（Ａ）　⑨（Ｉ）

（４）部品の個数を n とおく。各部品の寿命を表す確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ が平均 $\sigma\ (\sigma>0)$ の指数分布に従うとすると、X_i の確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}\qquad (x>0)$$

となる。この機械の寿命は、各部品の中で最も早く寿命を迎える部品と同じとなることから、確率変数 Y は

$$Y=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

と表される。Y の分布関数を $G(y)$ とおくと、$y>0$ に対し、

$$\begin{aligned}G(y)=P(Y\le y)=1-P(Y>y)&=1-P(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>y)\\&=1-P(X_1>y,X_2>y,\cdots,X_n>y)\\&=1-P(X_1>y)P(X_2>y)\cdots P(X_n>y)\quad (\because\text{各部品は互いに独立})\\&=1-(1-P(X_1\le y))(1-P(X_2\le y))\cdots(1-P(X_n\le y))\\&=1-\left(1-F(y)\right)^n\end{aligned}$$

よって、両辺を y で微分すれば、Y の確率密度関数 $g(y)$ は

$$\begin{aligned}g(y)=G'(y)&=nf(y)\left(1-\int_0^y f(x)dx\right)^{n-1}\\&=nf(y)\left(\int_y^\infty f(x)dx\right)^{n-1}\\&=n\cdot\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}y}\left(\int_y^\infty\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}x}dx\right)^{n-1}\\&=\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}y}\left(\left[-e^{-\frac{1}{\sigma}x}\right]_y^\infty\right)^{n-1}\\&=\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}y}\left(e^{-\frac{1}{\sigma}y}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\therefore g(y)=\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}y}\qquad (y>0)$$

積率母関数 $M_Y(\theta)$ は、

$$M_Y(\theta)=E\left[e^{\theta Y}\right]=\int_0^\infty e^{\theta y}\cdot g(y)dy=\int_0^\infty e^{\theta y}\cdot\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}y}dy=\int_0^\infty\frac{n}{\sigma}e^{-\left(\frac{n}{\sigma}-\theta\right)y}dy$$

$$=\left[\frac{n}{\sigma}\cdot\frac{-\sigma}{n-\sigma\theta}e^{-\left(\frac{n}{\sigma}-\theta\right)y}\right]_0^\infty$$

$$\therefore M_Y(\theta)=\frac{n}{n-\sigma\theta}\qquad\left(\theta<\frac{n}{\sigma}\right)$$

また、$M'_Y(\theta)=\dfrac{n\sigma}{(n-\sigma\theta)^2}$，$M''_Y(\theta)=\dfrac{2n\sigma^2}{(n-\sigma\theta)^3}$ であるから、分散 $V[Y]$ は、

$$V[Y]=M''_Y(0)-\{M'_Y(0)\}^2=\frac{2\sigma^2}{n^2}-\left(\frac{\sigma}{n}\right)^2=\frac{\sigma^2}{n^2}$$

問題文より、$n=10$、$\sigma=1$ とすれば、求める答えは、

$$M_Y(\theta) = \frac{10}{10-\theta} \quad (\theta < 10), \qquad V[Y] = \frac{1}{100}$$

となる。

よって、<u>解答は　⑩　（Ｅ）　⑪　（Ｍ）　⑫　（Ａ）</u>

（５）問題文より、期待値 $E[X]$ は

$$E[X]=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty x\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{x}{14}\right)e^{-(x/14)^2}dx=2\int_0^\infty\left(\frac{x}{14}\right)^2e^{-(x/14)^2}dx$$

ここで、$y=(x/14)^2$ とおくと、$x=14y^{1/2}$ であり、

$$\frac{dx}{dy}=7y^{-\frac{1}{2}}$$

となることを用いると、

$$E[X]=2\int_0^\infty ye^{-y}\cdot 7y^{-\frac{1}{2}}dy=14\int_0^\infty y^{\frac{3}{2}-1}e^{-y}dy=14\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=14\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=7\sqrt{\pi}\cong 12.404\cdots\cong 12.40$$

また、

$$E[X^2]=\int_0^\infty x^2\cdot f(x)dx=\int_0^\infty x^2\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{x}{14}\right)e^{-(x/14)^2}dx=28\int_0^\infty\left(\frac{x}{14}\right)^3e^{-(x/14)^2}dx$$

$$=28\int_0^\infty y^{3/2}\cdot e^{-y}\cdot 7y^{-\frac{1}{2}}dy=196\int_0^\infty y^{2-1}e^{-y}dx=196\cdot\Gamma(2)$$

$$=196$$

以上より、

$$V[X]=E[X^2]-\{E[X]\}^2=196-49\pi\cong 42.14$$

さて、ある疾患の患者数 n が十分大きいとき、n 名の患者の各再発期間の標本平均を $\bar{X}$ とすると、中心極限定理より確率変数 $\dfrac{\bar{X}-7\sqrt{\pi}}{\sqrt{196-49\pi}/\sqrt{n}}$ の確率分布は、近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。$n=100$ のとき、求める確率は、標準正規分布表より

$$P\left(\bar{X}>1.1\cdot 7\sqrt{\pi}\right)=P\left(\frac{\bar{X}-7\sqrt{\pi}}{\sqrt{196-49\pi}/\sqrt{n}}>\frac{0.7\sqrt{\pi}}{\sqrt{196-49\pi}/\sqrt{n}}\right)$$

$$\cong P\left(\frac{\bar{X}-7\sqrt{\pi}}{\sqrt{196-49\pi}/\sqrt{n}}>\frac{12.40}{\sqrt{42.14}}\right)$$

$$\cong P\left(\frac{\bar{X}-7\sqrt{\pi}}{\sqrt{196-49\pi}/\sqrt{n}}>1.910\cdots\right)$$

$$\cong u(1.91)$$

$$=0.0281$$

よって、<u>解答は　⑬　**（G）**　⑭　**（E）**</u>

問題２.

（１）度数分布表を作成する。標本数を $N\ (N=91)$ とおく。

番号 i	階級	代表値 ξ_i	度数 f_i	相対度数 f_i/N	累積相対度数 $\sum_{k=1}^{i} f_k/N$
1	134cm以上 138cm未満	136	6	0.0659	0.0659
2	138cm以上 142cm未満	140	9	0.0989	0.1648
3	142cm以上 146cm未満	144	22	0.2418	0.4066
4	146cm以上 150cm未満	148	20	0.2198	0.6264
5	150cm以上 154cm未満	152	11	0.1209	0.7473
6	154cm以上 158cm未満	156	10	0.1099	0.8571
7	158cm以上 162cm未満	160	7	0.0769	0.9241
8	162cm以上 166cm未満	164	4	0.0440	0.9780
9	166cm以上 170cm未満	168	2	0.0220	1.0000
合計	—	—	91	1.0000	—

（ａ）代表値を使って計算した身長の平均は、

$$\frac{1}{91}\sum_{i=1}^{10}\xi_i f_i = 148.879\cdots$$

また、度数の最も大きい階級は142cm以上 146cm未満なので、代表値を使って計算した身長のモードは144cm。

さらに、累積相対度数が初めて 0.25 を超えるのは 3 番目の階級であるから、第 1 四分位点 Q_1 は 3 番目の階級に属する。また、累積相対度数が初めて 0.75 を超えるのは 6 番目の階級であるから、第 3 四分位点 Q_3 は 6 番目の階級に属する。
対応する階級の代表値により、

$$Q_1 = \xi_3 = 144 \qquad Q_3 = \xi_6 = 156$$

となるから、代表値を使って計算した四分位偏差は

$$\frac{Q_3 - Q_1}{2} = 6$$

（ｂ）階級「146 cm 以上 150 cm 未満」の相対度数は表から 0.6264 である。

（ｃ）度数分布表の階級の境界値を $a_0, a_1, \cdots, a_k$ とし、N 個の測定値は各階級で一様に分布するとし、i 番目の階級の度数を f_i 、各階級の幅を h とする。

$\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} f_i < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_i > \dfrac{1}{2}$ なる m に対し、中央値を x_e とすると、

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m-1} f_i + \frac{f_m}{N} \times \frac{x_e - a_{m-1}}{h} = \frac{1}{2}$$

を満たす。したがって、

$$x_e = a_{m-1} + \frac{h}{f_m}\left(\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} f_i\right)$$

となる。

本問において累積相対度数が初めて 0.5 を超えるのは 4 番目の階級であるから、

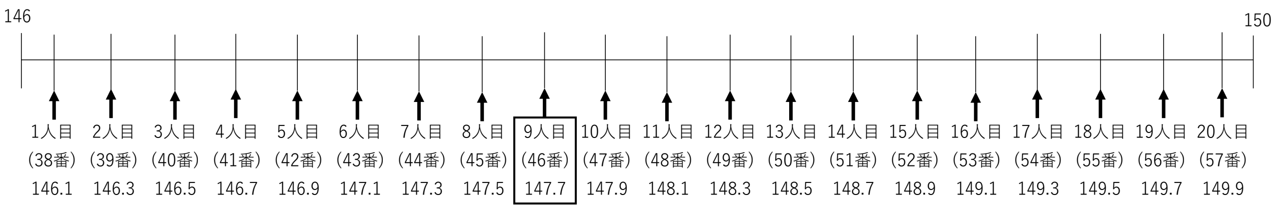
$$x_e = a_3 + \frac{4}{f_4}\left(\frac{91}{2} - \sum_{i=1}^{3} f_i\right) = 146 + \frac{4}{20}\left(\frac{91}{2} - 6 - 9 - 22\right) = 147.7$$

（補足）

この問題は、離散型として感覚的に捉えることもできる。

各階級の中で観測値は一様に分布することから、146cm 以上 150cm 未満の身長である 20 人を均等に配置するには、下図のように 146.1cm から 0.2cm 刻みで人を配置することになる。

メディアンとなるのは 46 番目の人の身長であるから、この階級の 9 人目の身長を求めればよく、147.7cm となる。



よって、解答は　①（G）　②（B）　③（G）　④（G）　⑤（C）

（２）男性の支持率がパラメータ p_m $(0 < p_m < 1)$ のベルヌーイ分布 $\mathrm{Bi}(1, p_m)$ に従い、女性の支持率がパラメータ p_f $(0 < p_f < 1)$ のベルヌーイ分布 $\mathrm{Bi}(1, p_f)$ に従うとする。このとき、この都市の人口全体の支持率は

$$\frac{2}{5}p_m + \frac{3}{5}p_f$$

で表される。

ここで、男性の標本数を m 、女性の標本数を n 、男性の標本変量を $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 、女性の標本変量を $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ とおく。

このとき、男性の支持率の推定量

$$\hat{p}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$$

の期待値と分散はそれぞれ

$$p_m、\ \frac{p_m(1-p_m)}{m}$$

であり、女性の支持率の推定量

$$\hat{p}_f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

の期待値と分散はそれぞれ

$$p_f、\ \frac{p_f(1-p_f)}{n}$$

である。ここで統計量 T を

$$T = \frac{2}{5}\hat{p}_m + \frac{3}{5}\hat{p}_f$$

とおくと、$\hat{p}_m$ と $\hat{p}_f$ は互いに独立であるから、統計量 T の期待値と分散はそれぞれ

$$\frac{2}{5}p_m + \frac{3}{5}p_f、\ \left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{p_m(1-p_m)}{m} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{p_f(1-p_f)}{n}$$

である。

したがって、標準正規分布 $N(0,1)$ の上側 ε 点を $u(\varepsilon)$ として信頼係数 95%で区間推定すると、正規近似により、

$$P\left(\left(\frac{2}{5}\hat{p}_m + \frac{3}{5}\hat{p}_f\right) - u(0.025)\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{p_m(1-p_m)}{m} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{p_f(1-p_f)}{n}} \leq \frac{2}{5}p_m + \frac{3}{5}p_f \right.$$

$$\left. \leq \left(\frac{2}{5}\hat{p}_m + \frac{3}{5}\hat{p}_f\right) + u(0.025)\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{p_m(1-p_m)}{m} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{p_f(1-p_f)}{n}}\right) = 0.95$$

である。

ここで、大数の弱法則より $\hat{p}_m$ と $\hat{p}_f$ はそれぞれ p_m と p_f の一致推定量となるので、m と n が十分大きいとき、$\hat{p}_m$ と $\hat{p}_f$ はそれぞれ p_m と p_f にほとんど等しくなる。

よって、近似的に左辺及び右辺の p_m を $\hat{p}_m$ に、p_f を $\hat{p}_f$ に置き換えると、この都市の人口全体の支持率の信頼区間の下限は

$$\left(\frac{2}{5}\hat{p}_m+\frac{3}{5}\hat{p}_f\right)-u(0.025)\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{\hat{p}_m(1-\hat{p}_m)}{m}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\frac{\hat{p}_f(1-\hat{p}_f)}{n}}$$

$$=\left(\frac{2}{5}\times\frac{35}{60}+\frac{3}{5}\times\frac{75}{180}\right)-1.960\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{\frac{35}{60}\times\frac{25}{60}}{60}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\frac{\frac{75}{180}\times\frac{105}{180}}{180}}$$

$$=0.4173\cdots$$

同様にこの都市の人口全体の支持率の信頼区間の上限は

$$\left(\frac{2}{5}\hat{p}_m+\frac{3}{5}\hat{p}_f\right)+u(0.025)\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{\hat{p}_m(1-\hat{p}_m)}{m}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\frac{\hat{p}_f(1-\hat{p}_f)}{n}}$$

$$=0.5493\cdots$$

よって、解答は　⑥（**G**）　⑦（**E**）

（３）確率変数 X が平均 μ（$\mu > 0$）の指数分布に従うとする。標本数 n の X の標本平均を $\bar{X}$、統計量 χ^2 を

$$\chi^2 = \frac{2n\bar{X}}{\mu}$$

として定めると、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ において χ^2 は自由度 $2n$ のカイ二乗分布に従う。

実際、平均 μ（$\mu > 0$）の指数分布に従う独立同分布な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対し、ガンマ分布の再生性から、$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ はガンマ分布 $\Gamma(n, 1/\mu)$ に従うので、$x > 0$ のとき、

$$P\left(\frac{2n\bar{X}}{\mu} \leq x\right) = P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq \frac{\mu x}{2}\right) = \int_0^{\frac{\mu x}{2}} \frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right)^n z^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu}z}\, dz$$

と表せる。この両辺を x で微分すると、χ^2 の確率密度関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n-1} e^{-\frac{1}{2}x} \quad (x > 0)$$

となる。よって、χ^2 は自由度 $2n$ のカイ二乗分布に従うことが分かる。

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ に対し、対立仮説 $H_1: \mu = 5\mu_0$ を有意水準 5% で片側検定すると、棄却域は、

$$\chi^2 > \chi^2_{2n}(0.05)$$

である。

対立仮説 H_1 において帰無仮説が 99% 以上の確率で棄却されるためには、

$$P(\chi^2 > \chi^2_{2n}(0.05) \mid \mu = 5\mu_0) \geq 0.99$$

が成り立てばよい。

対立仮説 H_1 において

$$P\left(\frac{2n\bar{X}}{\mu} > \chi^2_{2n}(0.99) \mid \mu = 5\mu_0\right) = 0.99$$

$$P\left(\frac{2n\bar{X}}{5\mu_0} > \chi^2_{2n}(0.99) \mid \mu = 5\mu_0\right) = 0.99$$

$$P(\chi^2 > 5\chi^2_{2n}(0.99) \mid \mu = 5\mu_0) = 0.99$$

が成り立つから、

$$\chi^2_{2n}(0.05) \leq 5\chi^2_{2n}(0.99)$$

であれば、帰無仮説は 99% 以上の確率で棄却される。

このような関係が成り立つのは、付表から $2n \geq 15$ のときであるから、最小の整数 n は 8 となる。

よって、<u>解答は　⑧（**G**）　⑨（**C**）</u>

（４）丸くて黄色、丸くて緑色、しわがあって黄色、しわがあって緑色、であることをそれぞれ E_1、E_2、E_3、E_4 とする。いま、帰無仮説 $H_0: P(E_i) = p_i$ $(i = 1,2,3,4)$ を有意水準5% で検定する。

	E_1	E_2	E_3	E_4	合計
観測度数 f_i	280	x	80	$120 - x$	480
理論確率 p_i	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1
理論度数 np_i	270	90	90	30	480

ここで、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$$

とおくと、統計量 χ^2 は近似的に自由度3の χ^2 分布に従い、その棄却域は、

$$\chi \geq \chi_3^2(0.05) = 7.8147$$

である。χ^2 の実現値は

$$\chi^2 = \frac{(280-270)^2}{270} + \frac{(80-90)^2}{90} + \frac{(x-90)^2}{90} + \frac{(120-x-30)^2}{30}$$

であり、$\chi^2 \leq 7.8147$ となるのは $78.06249 \leq x \leq 101.9375$ のときであるから、帰無仮説を採択できる x のとりうる最小値は79、最大値は101である。

よって、解答は　⑩　**（D）**　⑪　**（G）**

今回、適合度の検定の代表例であるメンデルの法則について出題したが、統計量 χ^2 が自由度3の χ^2 分布ではなく自由度1の χ^2 分布に従うとして解く誤答が散見された。2×2 の表から独立性の検定の自由度と混同したと推測される。適合度の検定と独立性の検定では、問われる仮説が異なり、統計量や近似できる χ^2 分布の自由度も異なる。

以下、適合度の検定と独立性の検定について整理する。詳しい解説や証明は、教科書（「統計学入門（12.3）や入門数理統計学（第9章および付録4）」）や市販の参考書等をあわせて参照してほしい。

結果（公式）の暗記により表面的な理解に頼って問題を解くのではなく、本質的な理解をすることを心がけて勉強してほしい。

■適合度の検定（本問で使用できる検定）
適合度の検定は、「経験的に観察された分布がある特定の分布によく一致しているといえるか」を仮説検定するものである。本問では、エンドウ豆がメンデルの法則（エンドウ豆の数の比が9：3：3：1）

に適合しているかを問うているから、「母集団分布が多項分布であり仮定した p_i が正しいか」を仮説検定する問題である。以下では、この一般的な場合について述べる。

いま、k 個のマスがあって各マスの確率を $p_1, p_2, \cdots, p_k\ \left(\sum_{i=1}^{k} p_i = 1\right)$ とし、n 回のくり返し試行で各マスに入った観測度数を $f_1, f_2, \cdots, f_k\ \left(\sum_{i=1}^{k} f_i = n\right)$ とする。

帰無仮説　H_0 ： $p_i = p_{i0} \quad (i = 1,2,\cdots,k)$

の尤度比検定を考える。p_i の最尤推定値は、

$$\hat{p}_i = \frac{f_i}{n} \qquad (i = 1,2,\cdots,k)$$

であるから、尤度比 λ は、

$$\lambda = \frac{(p_{10})^{f_1}(p_{20})^{f_2}\cdots(p_{k0})^{f_k}}{\left(\frac{f_1}{n}\right)^{f_1}\left(\frac{f_2}{n}\right)^{f_2}\cdots\left(\frac{f_k}{n}\right)^{f_k}} = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{np_{i0}}{f_i}\right)^{f_i}$$

となる。両辺の log をとると、

$$-2\log\lambda = 2\sum_{i=1}^{k} f_i \log\left(\frac{f_i}{np_{i0}}\right)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{f_i}{np_{i0}}\right) &= \log\left(\frac{f_i - np_{i0} + np_{i0}}{np_{i0}}\right) \\
&= \log\left(1 + \frac{f_i - np_{i0}}{np_{i0}}\right) \\
&= \frac{f_i - np_{i0}}{np_{i0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{f_i - np_{i0}}{np_{i0}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{f_i - np_{i0}}{np_{i0}}\right)^3 - \cdots
\end{aligned}$$

と級数展開できるから、

$$\begin{aligned}
-2\log\lambda &= 2\sum_{i=1}^{k} f_i \log\left(\frac{f_i}{np_{i0}}\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{k}(f_i - np_{i0} + np_{i0})\left[\frac{f_i - np_{i0}}{np_{i0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{f_i - np_{i0}}{np_{i0}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{f_i - np_{i0}}{np_{i0}}\right)^3 - \cdots\right] \\
&= 2\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{(f_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} - \frac{1}{2}\frac{(f_i - np_{i0})^3}{(np_{i0})^2} + \frac{1}{3}\frac{(f_i - np_{i0})^4}{(np_{i0})^3} - \cdots\right] \\
&\qquad + 2\sum_{i=1}^{k}\left[(f_i - np_{i0}) - \frac{1}{2}\frac{(f_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} + \frac{1}{3}\frac{(f_i - np_{i0})^3}{(np_{i0})^2} - \cdots\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i - np_{i0})^3}{(np_{i0})^2} + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i - np_{i0})^4}{(np_{i0})^3} - \cdots
\end{aligned}$$

よって、n が十分大きいとき、

$$-2\log\lambda \backsim \sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$$

として近似できる。

ここで、多項分布の制約条件 $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ より $k-1$ 個の母数を含み、$-2\log\lambda$ は次の定理より、n が十分大きいとき、自由度 $k-1$ の χ^2 分布で近似できることが分かる。
＜定理＞

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$$

とおく。n が十分大きいとき、χ^2 は自由度 $k-1$ の χ^2 分布で近似することができる。
＜定理の証明＞
以下、$k=2$ のときについて示す。一般の自然数 k の証明は、市販の参考書等で確認してほしい。
$k=2$ のとき、$f_2 = n - f_1$、$p_{20} = 1 - p_{10}$ であるから、

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} = \frac{(f_1 - np_{10})^2}{np_{10}} + \frac{\left(n - f_1 - n(1-p_{10})\right)^2}{n(1-p_{10})} \\ &= \frac{(f_1 - np_{10})^2}{np_{10}(1-p_{10})} \\ &= \left(\frac{f_1 - np_{10}}{\sqrt{np_{10}(1-p_{10})}}\right)^2 = \left({Z_1}^2 \text{とおく}\right)\end{aligned}$$

とおく。
ここで、f_1 は二項分布 $\mathrm{Bi}(n, p_{10})$ に従うから、n が十分大きいとき、中心極限定理より Z_1 の確率分布は標準正規分布 $N(0,1)$ で近似することができる。$z > 0$ に対し、

$$P\left({Z_1}^2 \le z\right) = 2P\left(Z_1 \le \sqrt{z}\right) = 2\int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

であるから、${Z_1}^2$ の確率密度関数 $g(z)$ は、

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} \qquad (z > 0)$$

したがって、${Z_1}^2$ は自由度 1 の χ^2 分布に従うことが分かる。

（定理の証明終わり）

■独立性の検定（本問で使用できない検定）
独立性の検定は、2 つの変数が独立であるという仮説の検定である。例えば、「エンドウ豆の形と色は独立に分布しているか」、「エンドウ豆の形と色に何らかの関係があるか」を知りたいときに独立性の検定を用いることで、形と色に関係はないという仮説を検定することができる。

いま、r 行と c 列からなる分割表を考え、母集団から無作為に抽出された 1 つの個体が分割表の第 i 行と第 j 列とが作るマスに入る確率を p_{ij}、個体が第 i 行に入る確率を $p_{i\cdot}$、個体が第 j 列に入る確率を $p_{\cdot j}$ とするとき、2 つの変数が独立であるという仮説は、

$$\text{帰無仮説} \quad H_0: \ p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \left(i = 1,2,\cdots,r、\ j = 1,2,\cdots,c\right)$$

となる。大きさ n の標本を考え、その中の f_{ij} $\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} f_{ij} = n\right)$ 個の観測度数が第 i 行第 j 列のマスに入ったとすると、H_0 の下で統計量 χ^2 は、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(f_{ij}-np_{ij}\right)^2}{np_{ij}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(f_{ij}-np_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}\right)^2}{np_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}}$$

となる。f_{ij} は $(r\times c)$ 個あるが、$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}f_{ij}=n$ という制約条件より、必要な母数は $rc-1$ 個である。また、$p_{i\cdot}$ と $p_{\cdot j}$ は未知であり、$\sum_{i=1}^{r}p_{i\cdot}=1$、$\sum_{j=1}^{c}p_{\cdot j}=1$ という制約条件より、$p_{i\cdot}$ と $p_{\cdot j}$ を推定するために必要な母数は、$r-1+c-1=r+c-2$ である。

したがって、自由度は、

$$rc-1-(r+c-2)=(r-1)(c-1)$$

となる。

$p_{i\cdot}$ と $p_{\cdot j}$ の最尤推定値はそれぞれ、

$$\hat{p}_{i\cdot}=\frac{f_{i\cdot}}{n},\ \ \hat{p}_{\cdot j}=\frac{f_{\cdot j}}{n}$$

となるので、統計量 χ^2 は、

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(f_{ij}-\dfrac{f_{i\cdot}\cdot f_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\dfrac{f_{i\cdot}\cdot f_{\cdot j}}{n}}$$

よって、n が十分大きいとき、χ^2 は自由度 $(r-1)(c-1)$ の χ^2 分布で近似できることが分かる。

（5）

単回帰の場合、

$$Q=\sum_{i=1}^{4}\{y_i-(\alpha+\beta x_{1i})\}^2$$

を最小にする係数 $\alpha,\ \beta$ の推定値 $\hat{\alpha},\ \hat{\beta}$ を求めればよい。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\{y_i-(\alpha+\beta x_{1i})\}=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\{y_i-(\alpha+\beta x_{1i})\}x_{1i}=0\end{cases}$$

を解くと、

$$\begin{pmatrix}1 & \overline{x_1}\\ \overline{x_1} & \overline{x_1{}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{y}\\ \overline{x_1 y}\end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$\overline{x_1}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_{1i}=60,\ \ \overline{x_1{}^2}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_{1i}{}^2=4{,}600,\ \ \bar{y}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}y_i=225,\ \ \overline{x_1 y}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_{1i}y_i=16{,}000$$

であるから、

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75\\ 2.5\end{pmatrix}$$

となる。

このとき、保険法人代理店Ｅの収入保険料の推定値は、

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\times 32=155$$

であり、保険法人代理店Ｆの収入保険料の推定値は、

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\times 38=170$$

である。

重回帰の場合、

$$Q=\sum_{i=1}^{4}\{y_i-(\alpha_1+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i})\}^2$$

を最小にする係数 $\alpha_1,\ \beta_1,\ \beta_2$ の推定値 $\hat{\alpha}_1,\ \hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2$ を求めればよい。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha_1}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\{y_i-(\alpha_1+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i})\}=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\{y_i-(\alpha_1+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i})\}x_{1i}=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_2}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\{y_i-(\alpha_1+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i})\}x_{2i}=0\end{cases}$$

を解くと、

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{x_1} & \overline{x_2} \\ \overline{x_1} & \overline{x_1{}^2} & \overline{x_1 x_2} \\ \overline{x_2} & \overline{x_1 x_2} & \overline{x_2{}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{x_1 y} \\ \overline{x_2 y} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$\overline{x_1} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{1i} = 60,\ \overline{x_1{}^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{1i}{}^2 = 4{,}600,\ \bar{y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i = 225,\ \overline{x_1 y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{1i} y_i = 16{,}000$$

$$\overline{x_2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{2i} = 5,\ \overline{x_2{}^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{2i}{}^2 = 36,\ \ \overline{x_1 x_2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{1i} x_{2i} = 400,\ \overline{x_2 y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{2i} y_i = 1{,}450$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ -5 \\ 75 \end{pmatrix}$$

となる。

このとき、保険法人代理店Ｅの収入保険料の推定値は、

$$\hat{y} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \times 32 + \hat{\beta}_2 \times 3 = 215$$

であり、保険法人代理店Ｆの収入保険料の推定値は、

$$\hat{y} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \times 38 + \hat{\beta}_2 \times 3 = 185$$

である。

したがって、この重回帰式では「資本金が増えると収入保険料が減る」という結果が導かれる。このような状態は「説明変数間に多重共線性がある状態」として知られており、重回帰分析において説明変数間の相関が高い場合にこのような結果となる。

よって、解答は　⑫（Ｌ）　⑬（Ｏ）　⑭（Ｘ）　⑮（Ｒ）　⑯（Ｂ）

（参考）

資本金と従業員数の相関係数は、

$$\rho_{x_1 x_2} = \frac{s_{x_1 x_2}}{s_{x_1} s_{x_2}} = \frac{\overline{x_1 x_2} - \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}{\sqrt{\overline{x_1{}^2} - (\overline{x_1})^2}\sqrt{\overline{x_2{}^2} - (\overline{x_2})^2}} = 0.95346\cdots$$

であり、極めて相関が高い。重回帰分析においては、なるべく多重共線性がないと考えられる説明変数を選ぶことが重要である。

（６）$\{Y_t\}$ の分散、時差 1、2 の自己共分散をそれぞれ γ_0、γ_1、γ_2 とおく。
$\gamma_0 = V[Y_t],\ \gamma_1 = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}),\ \gamma_2 = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2})$ であるため、

$$\gamma_0 = V[Y_t] = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_t) = \mathrm{Cov}\left(Y_t, \frac{1}{2} + \frac{7}{10}Y_{t-1} - \frac{3}{10}Y_{t-2} + \varepsilon_t\right) = \frac{7}{10}\gamma_1 - \frac{3}{10}\gamma_2 + 1$$

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{10}Y_{t-1} - \frac{3}{10}Y_{t-2} + \varepsilon_t, Y_{t-1}\right) = \frac{7}{10}\gamma_0 - \frac{3}{10}\gamma_1$$

$$\gamma_2 = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{10}Y_{t-1} - \frac{3}{10}Y_{t-2} + \varepsilon_t, Y_{t-2}\right) = \frac{7}{10}\gamma_1 - \frac{3}{10}\gamma_0$$

これらを解くと、求める答えは、

$$\gamma_0 = \frac{65}{42},\ \gamma_1 = \frac{5}{6},\ \gamma_2 = \frac{5}{42}$$

である。

よって、解答は　⑰　**（N）**　⑱　**（B）**

問題３.

（１）あるサッカーチームは、A リーグか B リーグのいずれかに属しており、毎年一定の確率で昇格降格する。このサッカーチームが、ある年に B リーグに属していたが、その n 年後に A リーグに属している確率を求めたい。

A リーグを状態１、B リーグを状態 2 として、状態 i が次の年に状態 j となる推移確率を p_{ij} 、状態 i が n 年後に状態 j となる推移確率を ${}_np_{ij}$ とする。

このとき、推移確率 p_{ij} を行列の (i,j) 成分とする推移確率行列 P を、

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

で表す。状態 i が $n+m$ 年後に状態 j となる推移確率 ${}_{n+m}p_{ij}$ に対し、

$${}_{n+m}p_{ij} = {}_np_{i1}\times {}_mp_{1j} + {}_np_{i2}\times {}_mp_{2j} = \sum_{k=1,2} {}_np_{ik}\times {}_mp_{kj}$$

が成り立つから、${}_np_{ij}$ を求めるためには P^n を求めればよい。

いま、A リーグに属していてその翌年に A リーグに属している確率を 0.7、B リーグに属していてその翌年に A リーグに属している確率を 0.2 とする。

固有多項式 φ_P は、

$$\varphi_P(\lambda)=\det(\lambda I-P)=0$$

であるから、

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-0.7 & -0.3 \\ -0.2 & \lambda-0.8 \end{pmatrix}=(\lambda-0.7)(\lambda-0.8)-0.06=0$$

ここで、$\det(\cdot)$ は行列式、I は 2 次の単位行列である。

これを解くと、$\lambda=1, 0.5$ となるため、固有値 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0.5$ が得られる。

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (x_1\neq 0、x_2\neq 0)$$

を解くと、

$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}c_1 \qquad (c_1 \text{ は 0 でない任意の実数})$$

また、

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0.5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (x_1\neq 0、x_2\neq 0)$$

を解くと、

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} c_2 \quad (c_2 \text{ は 0 でない任意の実数})$$

よって、2 次の正方行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$X^{-1}PX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

は対角行列となる。ここで、X^{-1} は X の逆行列である。
両辺に左から X、右から X^{-1} を乗算することで、

$$P = X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}X^{-1}$$

となり、これを n 乗すれば、

$$P^n = \left\{X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}X^{-1}\right\}\left\{X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}X^{-1}\right\}\cdots\left\{X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}X^{-1}\right\} = X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}^n X^{-1} = X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^n \end{pmatrix}X^{-1}$$

となる。このとき、

$$P^n = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+3\cdot 0.5^n & 3-3\cdot 0.5^n \\ 2-2\cdot 0.5^n & 3+2\cdot 0.5^n \end{pmatrix}$$

となり、ある年に B リーグに属していたが、その 5 年後に A リーグに属している確率は、P^5 の $(2,1)$ 成分であるから、

$${}_5p_{21} \fallingdotseq 0.388$$

となる。

よって、解答は　①（C）　②（J）　③（G）　④（C）　⑤（F）　⑥（D）　⑦（E）　⑧（B）　⑨（G）　⑩（B）

（２）ある検定試験の受験者は「レベル 1」「レベル 2」「レベル 3」「レベル 4」「レベル 5」のいずれかに該当し、毎年受験を行ってその結果により各レベルに振り分けられるとする。また、「レベル 3」「レベル 4」「レベル 5」のいずれかのレベルに到達すると試験合格となり、翌年以降の受験は免除になるとする。

「レベル k $(k = 1,2,3,4,5)$」を状態 k $(k = 1,2,3,4,5)$ として、状態 i が翌年の受験結果によって状態 j となる推移確率を行列の (i,j) 成分とする推移確率行列 P は、次で表されるとする。

$$P = \begin{pmatrix} \frac{8}{16} & \frac{4}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{2}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

いま、ある年に受験した結果が「レベル１」「レベル２」であったすべての受験者が、十分な時間が経過し、「レベル３」「レベル４」「レベル５」のいずれかレベルになった状態を考える。
ここで、単位行列 I 、ゼロ行列 O 、２次の正方行列 Q 、2×3 行列 R を用いて、

$$P=\begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix}$$

としてこの行列 P を表すと、P^2 は

$$P^2=\begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q^2 & (I+Q)R \\ O & I \end{pmatrix}$$

と表せる。よって、行列 P を繰り返し掛け合わせていくと、P^n は

$$P^n=\begin{pmatrix} Q^n & (I+Q+Q^2+\cdots+Q^{n-1})R \\ O & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} Q^n & (I-Q^n)(I-Q)^{-1}R \\ O & I \end{pmatrix}$$

と表せる。
よって、十分な時間が経つと、

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix} O & (I-Q)^{-1}R \\ O & I \end{pmatrix}$$

となる。

$$(I-Q)=\begin{pmatrix} 1-\frac{8}{16} & -\frac{4}{16} \\ -\frac{2}{16} & 1-\frac{6}{16} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{8}{16} & -\frac{4}{16} \\ -\frac{2}{16} & \frac{10}{16} \end{pmatrix}$$

であるからその逆行列は、

$$(I-Q)^{-1}=\frac{1}{\frac{8}{16}\times\frac{10}{16}-\left(-\frac{4}{16}\right)\left(-\frac{2}{16}\right)}\begin{pmatrix} \frac{10}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{2}{16} & \frac{8}{16} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

である。

$$(I-Q)^{-1}R=\begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{4}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{11}{36} & \frac{7}{36} \\ \frac{1}{2} & \frac{13}{36} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$P^\infty=\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{36} & \frac{7}{36} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{13}{36} & \frac{5}{36} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、ある年に「レベル２」であった受験者が、十分時間が経過したのち「レベル５」となっている確率は、P^∞ の $(2,5)$ 成分であるから、$5/36$ となる。

十分時間が経過したのち「レベル４」となっている受験者のうち、元々ある年に受験した結果が「レ

ベル１」であった確率は、

$$\frac{\frac{11}{36}}{\frac{11}{36}+\frac{13}{36}}=\frac{11}{24}$$

となる。

よって、解答は　⑪（**E**）　⑫（**S**）　⑬（**A**）　⑭（**B**）　⑮（**A**）　⑯（**N**）　⑰（**A**）　⑱（**B**）　⑲（**D**）　⑳（**G**）

問題４.

（１）この試行を 1 回行うとき、「ワンペア」が出来る確率を考える。

・すべてのカードの組合せは $\binom{20}{5} = 15{,}504$ 通り

・ペアになる数字の選び方が 5 通りかつその数字の 2 枚のカードのマークの選び方が $\binom{4}{2}$ 通りであるため、2 枚の組合せは 30 通り

・ペアになる数字を決めた後のペアにならない数字の選び方が $\binom{4}{3}$ 通りであり、かつペアにならない数字に対してマークの選び方がそれぞれ 4^3 通りであるため、ペアにならない 3 枚のカードの組合せは 256 通りである。

よって、「ワンペア」が出来る確率は

$$5 \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{3} \times 4^3 \Big/ \binom{20}{5} = \frac{160}{323} \fallingdotseq 0.495$$

である。
同様に考えて、「ツーペア」が出来る確率は

$$\binom{5}{2} \times 6^2 \times 3 \times 4 \Big/ \binom{20}{5} = \frac{90}{323} \fallingdotseq 0.279$$

である。
役なしのケースは存在しないため、「スリーカード以上の役」が出来る確率は、余事象を考えて、

$$1 - \left(\frac{160}{323} + \frac{90}{323}\right) = \frac{73}{323} \fallingdotseq 0.226$$

である。

よって、解答は　① （M）　② （F）　③ （I）　④ （L）　⑤ （I）　⑥ （F）

（２）この試行を繰り返し、「ストレート」が初めて出来たときに試行を終了する場合を考える。「ストレート」が出来る確率を p としたときの総試行回数 X の期待値を $E[X]$ とする。
$X = i$ となる確率は

$$P(X = i) = p(1-p)^{i-1} \qquad (i = 1,2,\cdots)$$

である。したがって、

$$E[X] = p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}$$

という式で表される。
ここで、

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}$$

という式が成り立つ。

「ストレート」が出来る確率 p は、10 からA（1）まで 1 枚ずつ、フラッシュにならないように選ぶ場合を考えればよいので、p は

$$p = (4^5 - 4)/\binom{20}{5} = \frac{5}{76}$$

となる。

したがって、

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{76}{5} = 15.2$$

である。

次に、この試行を繰り返し、「スリーカード以上の役」と「ツーペア以下の役」がともに 1 回以上出来た時点で試行を終了する場合の総試行回数 Y の期待値を $E[Y]$ とする。

$k+1$ 回目で「スリーカード以上の役」と「ツーペア以下の役」がともに 1 回以上出来るのは、「スリーカード以上の役」が k 回連続で出来続けて $k+1$ 回目で「ツーペア以下の役」が出来る場合、もしくは「ツーペア以下の役」が k 回連続で出来続けて $k+1$ 回目で「スリーカード以上の役」が出来る場合なので、「スリーカード以上の役」が出来る確率を q とすると、

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\{q^k(1-q) + q(1-q)^k\}$$

となる。

$$\frac{1}{q^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-q)^{i-1}$$

を用いてこれを計算すると

$$E[Y] = \frac{q^2 - q + 1}{q(1-q)} = \frac{86{,}079}{18{,}250} = 4.7166\cdots$$

となる。

よって、解答は ⑦（E） ⑧（J） ⑨（D）

（3）この試行を n 回繰り返したとき、「スリーカード以上の役」の連が k 回出来る確率を求める。

まず、試行回数 n 回のうち「スリーカード以上の役」が x 回出来た場合に「スリーカード以上の役」の連が k 回出来る確率を考える。ここで、$1 \leq k \leq \min\{x, n-x+1\}$ である。

区別のない黒玉 x 個、区別のない白玉 $n-x$ 個がある。まず、直線上に k 箇所を指定して黒玉を 1 個ずつおく。残り $x-k$ 個の黒玉をこの k 箇所に重複を許容し、また配らない場所があることも許容して追加で配るとき、分配する方法は、k 個のものから重複を許して $x-k$ 個を選ぶ重複組合せの総数であるから、

$$\binom{x-1}{x-k} = \binom{x-1}{k-1} \text{通り}$$

である。

さらに黒玉をおいた k 箇所の間の $k-1$ 箇所に白玉を 1 個ずつおき、残り $n-x-k+1$ 個の白玉を、この $k-1$ 箇所および両端の 2 箇所の場所に重複を許容し、また配らない場所があることも許容して追加で配るとき、分配する方法は、$k+1$ 個のものから重複を許して $n-x-k+1$ 個を選ぶ重複組合せの総数であるから、

$$\binom{n-x+1}{n-x-k+1}=\binom{n-x+1}{k}\text{通り}$$

である。

したがって、試行回数 n 回のうち「スリーカード以上の役」が x 回出来た場合に「スリーカード以上の役」の連が k 回出来る確率は

$$\binom{x-1}{k-1}\binom{n-x+1}{k}\Big/\binom{n}{x}$$

である。

求める確率は、「スリーカード以上の役」が出来る確率を q とすると、試行回数 n 回のうち「スリーカード以上の役」が x 回出来る確率が

$$\binom{n}{x}q^x(1-q)^{n-x}$$

であるので、

$$\sum_{x=k}^{n-k+1}\binom{x-1}{k-1}\binom{n-x+1}{k}\Big/\binom{n}{x}\times\binom{n}{x}q^x(1-q)^{n-x}=\sum_{x=k}^{n-k+1}\binom{x-1}{k-1}\binom{n-x+1}{k}q^x(1-q)^{n-x}$$

となる。

この試行を 4 回繰り返したとき、「スリーカード以上の役」の連が 2 回出来る確率は、$q=73/323$ であるから、

$$\sum_{x=2}^{3}\binom{x-1}{1}\binom{5-x}{2}q^x(1-q)^{4-x}=q^4-4q^3+3q^2=0.1096\cdots$$

となる。

よって、解答は　⑩（**D**）　⑪（**J**）　⑫（**B**）　⑬（**F**）　⑭（**G**）　⑮（**F**）

（4）最後にこの試行を使ったゲームを考える。このゲームは、試行 1 回につき金貨を 1 枚支払い、「スリーカード以上の役」が出来た場合には金貨を 2 枚獲得して 1 回のゲームを終了し、「ツーペア以下の役」が出来た場合には金貨は戻ってこないまま 1 回のゲームを終了する。

いま、金貨が手元に m 枚あり、各ゲーム終了時に金貨が 0 枚になるか M 枚になるまでこのゲームを繰り返すとき、金貨が 0 枚になる確率 P_m を求めたい。ただし、$0<m<M$ であり、m,M は正の整数とする。

金貨が 0 枚になる場合は、1 回目の試行で金貨が $m+1$ 枚となりその後 0 枚となるパターンと、1 回目の試行で金貨が $m-1$ 枚となりその後 0 枚となるパターンがあるので、手元の金貨が m 枚のときに金貨が 0 枚になる確率を P_m 、「スリーカード以上の役」が出来る確率を q とすると、漸化

式を用いて

$$P_m = q \times P_{m+1} + (1-q) \times P_{m-1}$$

という式で表される。

（1）より、q は $1/2$ でないので、上記の漸化式を 2 通りで表して、

$$P_{m+1} - \alpha P_m = P_m - \alpha P_{m-1}$$

$$P_{m+1} - P_m = \alpha(P_m - P_{m-1})$$

ただし、$\alpha = \dfrac{1-q}{q}$、$P_0 = 1$、$P_M = 0$ である。

したがって

$$P_m - \alpha P_{m-1} = P_1 - \alpha$$

$$P_m - P_{m-1} = \alpha^{m-1}(P_1 - 1)$$

である。この式で $m = M$ とすると、

$$P_M - \alpha P_{M-1} = P_1 - \alpha$$

$$P_M - P_{M-1} = \alpha^{M-1}(P_1 - 1)$$

となる。

ここで $P_M = 0$ より、

$$P_1 = \frac{\alpha - \alpha^M}{1 - \alpha^M} = \frac{\frac{1-q}{q} - \left(\frac{1-q}{q}\right)^M}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^M}$$

となる。

元の漸化式に代入して変形すると、

$$P_m = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^m - \left(\frac{1-q}{q}\right)^M}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^M}$$

である。

$m = 4$、$M = 6$ とし、（1）の結果を用いて金貨が 0 枚になる P_4 を計算すると、

$$P_4 = \frac{\left(\frac{250}{73}\right)^4 - \left(\frac{250}{73}\right)^6}{1 - \left(\frac{250}{73}\right)^6} = 0.91530\cdots$$

となる。

よって、解答は ⑯ （**N**） ⑰ （**Q**）

問題５.

（１）あるロットから大きさ n の標本を抽出したところ、k 個の不良品が入っていたが、このロットの不良率は $r_0\,(0 < r_0 < 1)$ 未満であることが望ましいとされているとき、このロットは合格とするべきかどうかを有意水準 $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$ で精密法を用いて片側検定する。

大きさ n の標本中の i $(i = 1,2,\cdots,n)$ 番目の標本が不良品のときに１、良品のときに 0 となる互いに独立な確率変数を X_i とおき、X_i はすべて不良率 $r\,(0 < r < 1)$ のベルヌーイ分布 $\mathrm{Bi}(1, r)$ に従うとし、この標本和を $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする。

帰無仮説を $H_0 : r = r_0$ 、対立仮説を $H_1 : r < r_0$ とし、S_n の分布の帰無仮説 H_0 の下での下側 ε 点を $P(S_n \leq m) \leq \varepsilon$ を満たす最大の m として定めると、棄却域 R は $S_n \leq m$ となる。

S_n の実現値を k として、$k \leq m$ とする。以下、$k \leq m$ の必要十分条件を求める。

$$k \leq m \iff P(S_n \leq k) \leq \varepsilon$$

であり、$P(S_n \leq k)$ は、

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} r_0^i (1 - r_0)^{n-i}$$

と表せる。a、b が正の整数のとき、ベータ関数 $B(a,b) = \dfrac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}$ であることを踏まえ、

$\dfrac{1}{B(k+1,n-k)} \displaystyle\int_0^{1-r_0} t^{n-k-1}(1-t)^k dt$ の部分積分を考えると、

$$\frac{1}{B(k+1,n-k)} \int_0^{1-r_0} t^{n-k-1}(1-t)^k dt$$

$$= \frac{1}{B(k+1,n-k)} \left[\frac{1}{n-k} t^{n-k}(1-t)^k\right]_0^{1-r_0} + \frac{1}{B(k+1,n-k)} \int_0^{1-r_0} \frac{k}{n-k} t^{n-k}(1-t)^{k-1} dt$$

$$= \binom{n}{k} r_0^k (1-r_0)^{n-k} + \frac{1}{B(k,n-k+1)} \int_0^{1-r_0} t^{n-k}(1-t)^{k-1} dt$$

となることから、これを帰納的に用いて、

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} r_0^i (1-r_0)^{n-i} = \frac{1}{B(k+1,n-k)} \int_0^{1-r_0} t^{n-k-1}(1-t)^k dt$$

と表せる。ここで、$\phi_1 = 2(k+1)$、$\phi_2 = 2(n-k)$ とおけば、

$$t^{n-k-1}(1-t)^k = t^{\frac{\phi_2}{2}-1}(1-t)^{\frac{\phi_1}{2}-1} = t^{\frac{\phi_2}{2}-1+\frac{\phi_1}{2}-1}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{\phi_1}{2}-1} = \left(\frac{1}{t}\right)^{2-\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{\phi_1}{2}-1}$$

であり、$t = \dfrac{\phi_2}{\phi_1 x + \phi_2}$ とおくと、$dt = \left(-\dfrac{\phi_1}{\phi_2}\right) t^2 dx$ であるため、

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} r_0^i (1-r_0)^{n-i} = \int_{\phi_2 r_0/\phi_1(1-r_0)}^{\infty} \frac{1}{B\left(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2}\right)} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{\frac{\phi_1}{2}} x^{\frac{\phi_1}{2}-1} \left(1 + \frac{\phi_1}{\phi_2} x\right)^{-\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)} dx$$

となり、右辺の被積分関数は自由度 (ϕ_1, ϕ_2) の F 分布の確率密度関数である。

したがって、自由度 (ϕ_1, ϕ_2) の F 分布に従う確率変数を $F_{\phi_2}^{\phi_1}$、$\dfrac{\phi_2 r_0}{\phi_1(1-r_0)}$ を $h(r_0, \phi_1, \phi_2)$ とおくと、

$$P(S_n \le k) = P\left(h(r_0, \phi_1, \phi_2) \le F_{\phi_2}^{\phi_1}\right) \le \varepsilon$$

となるので、棄却域 R は S_n の実現値 k を用いて、$h(r_0, \phi_1, \phi_2) > F_{\phi_2}^{\phi_1}(\varepsilon)$ と表すことができる。よって、$h(r_0, \phi_1, \phi_2) > F_{\phi_2}^{\phi_1}(\varepsilon)$ なら H_0 を棄却してロットを合格とし、そうでない場合は、H_0 を採択してロットを不合格とする。

いま、$n = 6$、$\varepsilon = 5\%$、$k = 3$、$r_0 = 70\%$ とするとき、$\phi_1 = 8$、$\phi_2 = 6$ なので、

$$h(r_0, \phi_1, \phi_2) = \frac{\phi_2 r_0}{\phi_1 (1 - r_0)} = 1.75$$

であり、

$$1.75 = \frac{\phi_2 r_0}{\phi_1 (1 - r_0)} < F_{\phi_2}^{\phi_1}(\varepsilon) = 4.1468$$

となるため、H_0 は採択される。

よって、解答は ①（B） ②（H） ③（N） ④（B） ⑤（E） ⑥（K） ⑦（F） ⑧（K） ⑨（A） ⑩（C） ⑪（D） ⑫（K） ⑬（M） ⑭（O） ⑮（D） ⑯（B）

（２）次に、（１）における不良率 r が確率変数であるときにロットを合格とすべきかどうかを考える。i $(i = 1,2, \cdots, n)$ 番目の標本を表す確率変数 Y_i は不良率 R のベルヌーイ試行で互いに独立であるとし、不良率 R はある連続な確率分布に従う確率変数であるとする。

Y_i の標本和を $T_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ とし、その実現値 $t\,(t = 0,1, \cdots, n)$ が判明しているという条件の下での不良率の条件付き確率を $P(R \in I \,|\, T_n = t)$ とする。ここで、I は任意の 1 次元区間である。不良率 R の確率密度関数を f_R とすると、$P(R \in I \,|\, T_n = t)$ は形式的に、

$$P(R \in I \,|\, T_n = t) = \int_I \frac{P(T_n = t \,|\, R = r)\, f_R(r)}{P(T_n = t)}\, dr \qquad (t = 0,1, \cdots, n)$$

と表現できる。

R が区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $U(0,1)$ に従うとすると、$t = 0,1, \cdots, n$ に対し、

$$\int_0^1 \frac{P(T_n = t \,|\, R = r)\, f_R(r)}{P(T_n = t)}\, dr = 1$$

となる。$\{R = r\}$ の条件の下、$T_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ は二項分布 $\mathrm{Bi}(n, r)$ に従うので、

$$P(T_n = t) = \int_0^1 P(T_n = t \,|\, R = r)\, f_R(r)\, dr = \int_0^1 \binom{n}{t} r^t (1 - r)^{n-t}\, dr = \binom{n}{t} B(t + 1, n - t + 1)$$

であり、

$$P(R \in I \,|\, T_n = t) = \int_I \frac{r^t (1 - r)^{n-t}}{B(t + 1, n - t + 1)}\, dr \quad (t = 0,1, \cdots, n)$$

となり、ベータ分布となることが分かる。

いま、R が区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $U(0,1)$ に従うとき、R が $r_0\,(0 < r_0 < 1)$ 以下である条件付き確率 $P(R \leq r_0 | \, T_n = t)$ が 95% 以上であれば、ロットを合格とし、そうでない場合は不合格とする。

$n = 6$、$t = 3$、$r_0 = 70\%$ とすると、

$$P(R \leq 0.7 \,|\, T_6 = 3) = \int_0^{0.7} \frac{r^3(1-r)^{6-3}}{B(3+1, 6-3+1)} dr = \int_0^{0.7} \frac{r^3(1-r)^3}{B(4,4)} dr = 0.8739 \cdots$$

であるため、不合格となる。

よって、解答は　⑰（Ｃ）　⑱（Ｒ）　⑲（Ｕ）　⑳（Ｌ）

以上

問題１.

（１）	①	（Ｆ）	５点	（４）	⑩	（Ｅ）	完答で２点
（２）	②	（Ｄ）	１点		⑪	（Ｍ）	
	③	（Ｃ）	１点		⑫	（Ａ）	３点
	④	（Ｈ）	１点	（５）	⑬	（Ｇ）	３点
	⑤	（Ｆ）	１点		⑭	（Ｅ）	２点
	⑥	（Ｌ）	１点				
（３）	⑦	（Ｈ）	完答で５点				
	⑧	（Ａ）					
	⑨	（Ｉ）					

問題２.

（１）	①	（Ｇ）	１点	（４）	⑪	（Ｄ）	完答で５点
	②	（Ｂ）	１点		⑫	（Ｇ）	
	③	（Ｇ）	１点	（５）	⑫	（Ｌ）	１点
	④	（Ｇ）	１点		⑬	（Ｏ）	１点
	⑤	（Ｃ）	１点		⑭	（Ｘ）	１点
（２）	⑥	（Ｇ）	完答で５点		⑮	（Ｒ）	１点
	⑦	（Ｅ）			⑯	（Ｂ）	１点
（３）	⑧	（Ｇ）	３点	（６）	⑰	（Ｎ）	２点
	⑨	（Ｃ）	２点		⑱	（Ｂ）	３点

問題３.

（１）	①	（Ｃ）	１点	（２）	⑪	（Ｅ）	完答で２点
	②	（Ｊ）	完答で１点		⑫	（Ｓ）	
	③	（Ｇ）			⑬	（Ａ）	
	④	（Ｃ）	完答で１点		⑭	（Ｂ）	
	⑤	（Ｆ）			⑮	（Ａ）	完答で２点
	⑥	（Ｄ）	完答で２点		⑯	（Ｎ）	
	⑦	（Ｅ）			⑰	（Ａ）	
	⑧	（Ｂ）			⑱	（Ｂ）	
	⑨	（Ｇ）			⑲	（Ｄ）	２点
	⑩	（Ｂ）	２点		⑳	（Ｇ）	２点

問題４.

（１）	①	（M）	１点	（３）	⑩	（D）	１点
	②	（F）	完答で１点		⑪	（J）	１点
	③	（I）			⑫	（B）	完答で１点
	④	（L）	１点		⑬	（F）	
	⑤	（I）	１点		⑭	（G）	
	⑥	（F）	１点		⑮	（F）	１点
（２）	⑦	（E）	１点	（４）	⑯	（N）	２点
	⑧	（J）	１点		⑰	（Q）	１点
	⑨	（D）	１点				

問題５.

（１）	①	（B）	完答で１点	（１）	⑩	（C）	完答で３点
	②	（H）			⑪	（D）	
	③	（N）			⑫	（K）	
	④	（B）	完答で１点		⑬	（M）	
	⑤	（E）			⑭	（O）	
	⑥	（K）			⑮	（D）	完答で３点
	⑦	（F）			⑯	（B）	
	⑧	（K）	完答で１点	（２）	⑰	（C）	１点
	⑨	（A）			⑱	（R）	２点
					⑲	（U）	２点
					⑳	（L）	１点

以上