数学（問題）

〔問題１から問題４を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（１）外見から区別のつかない２つの箱がある。1 つの箱Ｒには 9 個の赤玉と 6 個の白玉が入っており、もう１つの箱Wには 6 個の赤玉と 9 個の白玉が入っている。2 つの箱から１つを無作為に選び、その箱から一度に 5 個同時に玉を取り出したところ、赤玉が 3 個、白玉が 2 個であった。このとき、選ばれた箱がＲである確率は$\boxed{}$である。

（A） $\frac{5}{9}$	（B） $\frac{4}{7}$	（C） $\frac{3}{5}$	（D） $\frac{8}{13}$	（E） $\frac{7}{11}$
（F） $\frac{9}{13}$	（G） $\frac{5}{7}$	（H） $\frac{8}{11}$	（I） $\frac{7}{9}$	（J） $\frac{4}{5}$

（２）ある携帯通信キャリアの通信利用料金月額は、月内の通信利用量が 20 (GB)以内であれば定額 2,000 円、20 (GB)を超えると 500 円が定額料金に加算され、それ以降 1 (GB)増えるごとに 500 円がさらに加算されていくという。携帯通信利用者の月内の通信利用量 X (GB) が平均 4 (GB)の指数分布に従うとき、通信利用料金月額の期待値に最も近い数値は$\boxed{}$円である。
なお、必要であれば、$e = 2.718$ を用いてよい。

（A） 2,003	（B） 2,005	（C） 2,008	（D） 2,010	（E） 2,013
（F） 2,015	（G） 2,018	（H） 2,020	（I） 2,023	（J） 2,025

（３）あるパン工場で製造されるロールパンの重さ Z (g) は 25.0 g から 27.0 g までの一様分布に従うとし、ロールパンの個数を表す確率変数 X_1, X_2, X_3 をそれぞれ次で定める。

・重さが 25.4 g 未満のロールパンの個数を表す確率変数を X_1

・重さが 25.4 g 以上 26.0 g 未満のロールパンの個数を表す確率変数を X_2

・重さが 26.0 g 以上のロールパンの個数を表す確率変数を X_3

いま、このパン工場で 10 個のロールパンを製造したとする。このとき、$X_1 = 3,\ X_2 = 2$ である確率に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、X_2 と X_3 の共分散は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

［①の選択肢］

（Ａ） 0.0007	（Ｂ） 0.0036	（Ｃ） 0.0072	（Ｄ） 0.0113	（Ｅ） 0.0216
（Ｆ） 0.0284	（Ｇ） 0.0340	（Ｈ） 0.0567	（Ｉ） 0.0851	（Ｊ） 0.1701

［②の選択肢］

（Ａ） -15	（Ｂ） -6	（Ｃ） -1.5	（Ｄ） -1	（Ｅ） -0.6
（Ｆ） 0.8	（Ｇ） 1.2	（Ｈ） 4.8	（Ｉ） 8	（Ｊ） 12

（４）確率変数 X, Y が 2 変量正規分布 $N(\mu_1, \mu_2, {\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \rho)$ に従うとき、$X = x$ を与えたときの Y の条件付き確率分布は、平均 $\boxed{\quad ① \quad}$、分散 $\boxed{\quad ② \quad}$ の正規分布 $N\left(\boxed{\quad ① \quad}, \boxed{\quad ② \quad}\right)$ に従う。

$\mu_1 = 3, \mu_2 = 2.4, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 5, \rho = 0.6$ のとき、条件付き確率 $P(0 \le Y \le 7 | X = 5)$ に最も近い数値は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。

ただし、2 変量正規分布 $N(\mu_1, \mu_2, {\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \rho)$ に従う X, Y の同時確率密度関数 $f(x, y)$ は、

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}\right]$$

と表されることを用いてよい。

［①の選択肢］

（Ａ） $\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$　（Ｂ） $\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}$　（Ｃ） $\mu_2 + \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$

（Ｄ） $\mu_2 - \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$　（Ｅ） $\mu_2 + \rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}$　（Ｆ） $\mu_2 - \rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}$

（Ｇ） $\mu_2 + 2\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}$　（Ｈ） $\mu_2 - 2\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}$

［②の選択肢］

（Ａ） $\sigma_1(1-\rho^2)$　（Ｂ） ${\sigma_1}^2(1-\rho^2)$　（Ｃ） $\sigma_2(1-\rho^2)$　（Ｄ） ${\sigma_2}^2(1-\rho^2)$

（Ｅ） $\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)$　（Ｆ） ${\sigma_1}^2{\sigma_2}^2(1-\rho^2)$　（Ｇ） $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(1-\rho^2)$　（Ｈ） $\dfrac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2}(1-\rho^2)$

［③の選択肢］

（Ａ） 0.0679　（Ｂ） 0.1974　（Ｃ） 0.3721　（Ｄ） 0.3853

（Ｅ） 0.4400　（Ｆ） 0.5600　（Ｇ） 0.6147　（Ｈ） 0.9321

（５）ＡとＢの２人がカードを用いた次のようなゲームをする。

・ＡとＢは１回のゲームで１から５の数字が書かれた５枚のカードからそれぞれ引く。

・Ａは、１回のゲームで復元抽出によって３回カードを引き、出た数字の合計を得点とする。

・Ｂは、１回のゲームで１回カードを引き、出た数字の３倍を得点とする。

このゲームを繰り返し行い、Ｂの得点の標本平均とＡの得点の標本平均との差の絶対値が 0.5 以下となる確率が 95％以上となるための最小のゲーム回数を求めたい。
チェビシェフの不等式を用いた場合、最小のゲーム回数に最も近い数値は$\boxed{\quad ① \quad}$回である。
また、中心極限定理を用いて正規近似した場合、最小のゲーム回数に最も近い数値は$\boxed{\quad ② \quad}$回である。

［①の選択肢］

（Ａ） 51　（Ｂ） 76　（Ｃ） 101　（Ｄ） 126　（Ｅ） 152

（Ｆ） 960　（Ｇ） 1,440　（Ｈ） 1,920　（Ｉ） 2,400　（Ｊ） 2,880

［②の選択肢］

（Ａ） 65　（Ｂ） 92　（Ｃ） 130　（Ｄ） 184　（Ｅ） 195

（Ｆ） 260　（Ｇ） 277　（Ｈ） 369　（Ｉ） 390　（Ｊ） 553

（6）a, b, c はいずれも整数で、$1 < a < b < c < 22$ とする。

1 から a 、および b から c までの整数が 1 つずつ書かれたカードから、無作為にカードを 1 枚取り出して番号を記録した後、カードを元に戻す操作を繰り返し行う。この操作を 10 回繰り返し、出た番号を昇順に並べ替えたところ、$1, 2, 2, 3, 5, 5, 7, 7, 10, 12$ であった。

このとき、母数 a, b, c の最尤推定値をそれぞれ $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ とすると、$\hat{a} =$ ① 、$\hat{b} =$ ② 、$\hat{c} =$ ③ である。

［①、②の選択肢］

（A） 2　（B） 3　（C） 4　（D） 5　（E） 6

（F） 7　（G） 8　（H） 9　（I） 10　（J） 11

［③の選択肢］

（A） 12　（B） 13　（C） 14　（D） 15　（E） 16

（F） 17　（G） 18　（H） 19　（I） 20　（J） 21

（７）あるスーパーマーケットで無数のパック詰めされたひき肉が販売されており、各パックに詰められたひき肉の重量は正規分布（母平均は未知）に従うものとする。

無作為に 6 つのパックを選択し、持参した秤で中身の重量を測定したところ、次のとおりであった。ただし、持参した秤は測定の誤差が無視できないものとし、この分散が 0.1 (g^2) と、多くの繰り返しにより推定されていたとする。また、重さと測定誤差との間に相関はないものとする。

101,　100,　99,　102,　100,　101　（単位：g）

次に改めて 5 つのパックを無作為に選び、すべて購入することとした。選んだパックをレジに持っていくと、店に設置された測定誤差のない秤で中身の重量を測定し、合計重量に対し 1g あたり 2 円で計算された金額が請求される。

請求金額の分散について区間推定を行ったとき、信頼係数を 95%とした場合の信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ 円^{2}であり、上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ 円^{2}である。

［①の選択肢］

（Ａ） 2.81　（Ｂ） 3.29　（Ｃ） 3.97　（Ｄ） 4.37　（Ｅ） 4.97

（Ｆ） 5.61　（Ｇ） 6.57　（Ｈ） 6.74　（Ｉ） 7.94　（Ｊ） 8.57

［②の選択肢］

（Ａ） 33.63　（Ｂ） 43.45　（Ｃ） 47.01　（Ｄ） 48.01　（Ｅ） 65.17

（Ｆ） 65.26　（Ｇ） 86.90　（Ｈ） 94.03　（Ｉ） 130.34　（Ｊ） 132.34

（８）ある学力テストの受験者 120 人の国語の得点と数学の得点の相関関係を調査し、標本相関係数 r を計算したところ、$r = 0.4$ となった。得点に関するデータが 2 次元正規母集団からの標本であるとして、母相関係数 ρ に関する検定を行う。ここで、標本相関係数 r に対し、$|\rho| \neq 1$ のとき、

$$z = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$$

とおくと、標本の大きさ n が大きいとき、z は平均 ① 、分散 ② の正規分布 N(① , ②) に従う。この r から z への変換を、フィッシャーの z 変換という。これを用いて、帰無仮説 $H_0 : \rho = 0.6$、対立仮説 $H_1 : \rho < 0.6$、有意水準 5% の片側検定を行うとき、検定統計量を T とすると、T に最も近い数値は ③ となり、帰無仮説は ④ される。

［①の選択肢］

（A） ρ　（B） $-\rho$　（C） $\frac{1+\rho}{1-\rho}$　（D） $-\frac{1+\rho}{1-\rho}$

（E） $\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}$　（F） $-\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}$　（G） $\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$　（H） $-\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$

（I） $\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$　（J） $-\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$

［②の選択肢］

（A） 1　（B） $n-1$　（C） $\sqrt{n-1}$　（D） $n-3$　（E） $\sqrt{n-3}$

（F） $\frac{1}{2}$　（G） $\frac{1}{n-1}$　（H） $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$　（I） $\frac{1}{n-3}$　（J） $\frac{1}{\sqrt{n-3}}$

［③の選択肢］

（A） -2.9895　（B） -2.9647　（C） -2.9399　（D） -2.9151　（E） -2.8903

（F） -0.0251　（G） -0.0249　（H） -0.0247　（I） -0.0245　（J） -0.0243

［④の選択肢］

（A） 採択　（B） 棄却

（9）母平均が μ 、母分散が σ^2 である大きさ $N\ (N>n)$ の有限母集団から非復元抽出による大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を無作為に抽出する（任意抽出法）。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均を $\bar{X}$ 、標本分散を $S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n$ で表すとき、 X_i と X_j $(i \neq j)$ の相関係数は $\boxed{\quad ① \quad}$ 、 $\bar{X}$ の分散は $\boxed{\quad ② \quad}$ 、 S^2 の期待値は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。

［①の選択肢］

（A） $\frac{1}{N}$　（B） $\frac{1}{N-1}$　（C） $\frac{1}{N+1}$　（D） $\frac{1}{N-n}$　（E） $\frac{1}{N+n}$

（F） $-\frac{1}{N}$　（G） $-\frac{1}{N-1}$　（H） $-\frac{1}{N+1}$　（I） $-\frac{1}{N-n}$　（J） $-\frac{1}{N+n}$

［②の選択肢］

（A） $\frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}$　（B） $\frac{N+n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}$　（C） $\frac{N-n}{N+1}\frac{\sigma^2}{n}$　（D） $\frac{N+n}{N+1}\frac{\sigma^2}{n}$　（E） $\frac{N+n}{N-n}\frac{\sigma^2}{n}$

（F） $\frac{N-1}{N-n}\frac{\sigma^2}{n}$　（G） $\frac{N+1}{N-n}\frac{\sigma^2}{n}$　（H） $\frac{N-1}{N+n}\frac{\sigma^2}{n}$　（I） $\frac{N+1}{N+n}\frac{\sigma^2}{n}$　（J） $\frac{N-n}{N+n}\frac{\sigma^2}{n}$

［③の選択肢］

（A） $\frac{N-1}{N}\frac{n-1}{n}\sigma^2$　（B） $\frac{N-n}{N}\frac{n+1}{n}\sigma^2$　（C） $\frac{N}{N+n}\frac{n+1}{n}\sigma^2$　（D） $\frac{N}{N-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2$

（E） $\frac{N}{N-n}\frac{n-1}{n}\sigma^2$　（F） $\frac{N}{N+n}\frac{n-1}{n}\sigma^2$　（G） $\frac{N-1}{N+1}\frac{n-1}{n}\sigma^2$　（H） $\frac{N-n}{N-1}\frac{n+1}{n}\sigma^2$

（I） $\frac{N+n}{N-n}\frac{n+1}{n}\sigma^2$　（J） $\frac{N-n}{N+n}\frac{n+1}{n}\sigma^2$

（１０）下表のデータに対して、y を x, x^2 で説明する重回帰式 $y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ を考え、最小二乗法によって係数 $\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2$ を推定する。$\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2$ の推定値をそれぞれ $\hat{\alpha},\ \hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2$ とすると、$\hat{\alpha} = \boxed{\ ①\ }$、$\hat{\beta}_1 = \boxed{\ ②\ }$、$\hat{\beta}_2 = \boxed{\ ③\ }$である。

x	-2	-1	0	1	2
y	83	18	3	2	3

［①の選択肢］

（A）$-\frac{78}{5}$　（B）$-\frac{16}{3}$　（C）$-\frac{13}{15}$　（D）$-\frac{4}{7}$　（E）$-\frac{2}{35}$

（F）$\frac{33}{35}$　（G）$\frac{86}{15}$　（H）$\frac{74}{7}$　（I）$\frac{77}{5}$　（J）$\frac{80}{3}$

［②の選択肢］

（A）$-\frac{88}{5}$　（B）$-\frac{93}{7}$　（C）$-\frac{28}{3}$　（D）$-\frac{64}{15}$　（E）$-\frac{31}{35}$

（F）$\frac{66}{35}$　（G）$\frac{18}{7}$　（H）$\frac{53}{15}$　（I）$\frac{28}{5}$　（J）$\frac{97}{3}$

［③の選択肢］

（A）$-\frac{61}{3}$　（B）$-\frac{82}{7}$　（C）$-\frac{73}{15}$　（D）$-\frac{11}{5}$　（E）$-\frac{46}{35}$

（F）$\frac{88}{35}$　（G）$\frac{98}{15}$　（H）$\frac{31}{3}$　（I）$\frac{73}{7}$　（J）$\frac{69}{5}$

（１１）標準ブラウン運動 $\{W_t\},\ t \geq 0$ に対し、

$$P(W_4 + W_1 \leq \alpha) = 0.805$$

を満たす α に最も近い数値は $\boxed{\quad ①\quad}$ である。

また、$X = 2\left(W_1{}^2 + W_2{}^2 + W_3{}^2 + W_4{}^2 + W_5{}^2 - W_1W_2 - W_2W_3 - W_3W_4 - W_4W_5\right) - W_5{}^2$ とするとき、

$$P(X \leq \beta) = 0.1$$

を満たす β に最も近い数値は $\boxed{\quad ②\quad}$ である。

［①の選択肢］

（Ａ） 0.8596　（Ｂ） 1.2157　（Ｃ） 1.4889　（Ｄ） 1.7192　（Ｅ） 1.9221

（Ｆ） 2.1056　（Ｇ） 2.2743　（Ｈ） 3.4384　（Ｉ） 4.2980　（Ｊ） 6.0172

［②の選択肢］

（Ａ） -6.4080　（Ｂ） -5.1264　（Ｃ） -2.8657　（Ｄ） -2.5632　（Ｅ） -1.2816

（Ｆ） -0.5543　（Ｇ） 0.5543　（Ｈ） 1.0636　（Ｉ） 1.2816　（Ｊ） 1.6103

余白ページ

（１２）平均 $\lambda\,(\lambda > 0)$ のポアソン分布に従う確率変数は、以下の手順でシミュレートできる。

１．区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数 $U_1, U_2, \dots$ を生成する。

２．１．で得られた実現値 $U_1, U_2, \dots$ に対し、逆関数法を用いて $X_i = \boxed{\quad ① \quad}\ (i = 1,2,\dots)$ とすることで、平均１の指数分布に従う確率変数 $X_1, X_2, \dots$ を得る。

３．ポアソン分布と指数分布の関係から、$X_1, X_2, \dots$ に対して $N = \boxed{\quad ② \quad}$ とおけば、確率変数 N は平均 λ のポアソン分布に従う。ただし、$X_0 = 0$ とする。

いま、ある都市における一か月あたりの交通事故件数が平均５のポアソン分布に従っているとする。上記の手順に従い、一か月の交通事故件数のシミュレーションを行う。区間 [0,1] 上の一様分布に従う確率変数の実現値として、次の数値を得た。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i	0.70	k	0.30	0.45	0.35	0.85	0.30	0.90	0.90	0.11

シミュレーションの結果、得られた交通事故件数が６件であったとき、k のとりうる数値の最小値に最も近い数値は $\exp\left(-\boxed{\quad ③ \quad}\right)$ であり、最大値に最も近い数値は $\exp\left(-\boxed{\quad ④ \quad}\right)$ である。

［①の選択肢］

（Ａ） $\exp U_i$　（Ｂ） $\exp(-U_i)$　（Ｃ） $1 - \exp U_i$　（Ｄ） $1 - \exp(-U_i)$

（Ｅ） $1 + \exp U_i$　（Ｆ） $1 + \exp(-U_i)$　（Ｇ） $\log U_i$　（Ｈ） $-\log U_i$

（Ｉ） $1 + \log U_i$　（Ｊ） $1 - \log U_i$

［②の選択肢］

（Ａ）$\min\{n : \sum_{i=0}^{n} X_i > \lambda\}$　（Ｂ）$\min\{n : \sum_{i=0}^{n-1} X_i > \lambda\}$　（Ｃ）$\min\{n : \sum_{i=0}^{n-2} X_i > \lambda\}$

（Ｄ）$\min\{n : \prod_{i=0}^{n} \exp X_i > \lambda\}$　（Ｅ）$\min\{n : \prod_{i=0}^{n-1} \exp X_i > \lambda\}$　（Ｆ）$\max\{n : \sum_{i=0}^{n} X_i < \lambda\}$

（Ｇ）$\max\{n : \sum_{i=0}^{n+1} X_i < \lambda\}$　（Ｈ）$\max\{n : \sum_{i=0}^{n+2} X_i < \lambda\}$　（Ｉ）$\max\{n : \prod_{i=0}^{n} \exp X_i < \lambda\}$

（Ｊ）$\max\{n : \prod_{i=0}^{n+1} \exp X_i < \lambda\}$

［③、④の選択肢］

（Ａ） 0.0137	（Ｂ） 0.1191	（Ｃ） 0.2245	（Ｄ） 0.5196	（Ｅ） 0.8048
（Ｆ） 1.0824	（Ｇ） 1.4285	（Ｈ） 1.5910	（Ｉ） 2.6408	（Ｊ） 3.4393

問題２． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（１０点）

期待値が０、分散が γ_0 である定常な $ARMA(2,1)$ モデル

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{I})$$

のパラメータ ϕ_1, ϕ_2, θ_1 および $\sigma^2 = V[\varepsilon_t]$ を用いて自己相関 $\rho_h\ (h = 1,2,3,\cdots)$ を求めたい。

（１）まず、(I)において、$\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2}$ を左辺に移項し、両辺の分散を計算すると、

$$\frac{\sigma^2}{\gamma_0} = \frac{\boxed{①} + \left(\boxed{②}\right) \times \rho_1 - \left(\boxed{③}\right) \times \rho_2}{\boxed{④}} \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{II})$$

となる。

次に、(I)において、t を $t+1$ とした Y_{t+1}に関する式の両辺に Y_t を乗じ、両辺の期待値をとると、

$$\rho_1 = \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}} - \frac{\boxed{⑦}}{\boxed{⑧}} \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{III})$$

となる。

同様に、(I)において、t を $t+2$ とした Y_{t+2} に関する式の両辺に Y_t を乗じ、両辺の期待値をとると、

$$\rho_2 = \boxed{⑨} + \boxed{⑩} \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{IV})$$

となる。（⑨と⑩の解答は順不同）

(II)、(III)、(IV)より ρ_1 を求めると、

$$\rho_1 = \frac{\left(\boxed{⑪}\right) \times \phi_1 - \left(\boxed{⑫}\right) \times \theta_1}{\left(\boxed{⑪}\right) \times \left(\boxed{⑬}\right) - \left(\boxed{⑭}\right)}$$

となる。

$\rho_h\ (h = 3,4,\cdots)$ については、

$$\rho_h = \boxed{⑮} + \boxed{⑯}$$

なる関係式が成り立つため、これより ρ_h を具体的に求めていくことができる。（⑮と⑯の解答は順不同）

（２）いま、期待値が０である定常な $ARMA(2,1)$ モデル

$$Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.3\varepsilon_{t-1} \qquad (V[\varepsilon_t] = 0.1)$$

を考える。このとき、自己相関 ρ_1, ρ_2, ρ_3 および分散 γ_0 は、

$\rho_1 = \boxed{⑰}$、$\rho_2 = \boxed{⑱}$、$\rho_3 = \boxed{⑲}$、$\gamma_0 = \boxed{⑳}$

である。

［①～④の選択肢］

（A） $1+{\theta_1}^2$	（B） $1-{\theta_1}^2$	（C） $(1+\theta_1)^2$	（D） $(1-\theta_1)^2$
（E） $2\phi_1$	（F） $2\phi_2$	（G） $\phi_1\phi_2$	（H） $2\phi_1\phi_2$
（I） $2\phi_1(\phi_2-1)$	（J） $2\phi_2(\phi_1-1)$	（K） $2\phi_1(1-\phi_2)$	（L） $2\phi_2(1-\phi_1)$
（M） $(1-\phi_1)^2$	（N） $(1-\phi_2)^2$	（O） $(\phi_1-\phi_2)^2$	（P） $(1-\phi_1-\phi_2)^2$
（Q） $1+{\phi_1}^2$	（R） $1+{\phi_2}^2$	（S） ${\phi_1}^2+{\phi_2}^2$	（T） $1+{\phi_1}^2+{\phi_2}^2$

［⑤～⑧の選択肢］

（A） θ_1	（B） σ^2	（C） $\theta_1\sigma^2$	（D） $\gamma_0\sigma^2$
（E） ϕ_1	（F） ϕ_2	（G） $\phi_1\sigma^2$	（H） $\phi_2\sigma^2$
（I） $1-\phi_1$	（J） $1+\phi_1$	（K） $(1-\phi_1)\gamma_0$	（L） $(1+\phi_1)\gamma_0$
（M） $1-\phi_2$	（N） $1+\phi_2$	（O） $(1-\phi_2)\gamma_0$	（P） $(1+\phi_2)\gamma_0$

［⑨、⑩の選択肢］

（A） ϕ_1	（B） ϕ_2	（C） $\phi_1\phi_2$	（D） $2\phi_1\phi_2$
（E） ρ_1	（F） $\phi_1\rho_1$	（G） $2\phi_1\rho_1$	（H） $\phi_2\rho_1$
（I） $2\phi_2\rho_1$	（J） $\phi_1\phi_2\rho_1$		

［⑪～⑭の選択肢］

（A） $1+{\theta_1}^2$	（B） $1-{\theta_1}^2$	（C） $(1+\theta_1)^2$	（D） $(1-\theta_1)^2$
（E） $\phi_1\theta_1$	（F） $2\phi_1\theta_1$	（G） $\phi_2\theta_1$	（H） $2\phi_2\theta_1$
（I） $1+\phi_1$	（J） $1-\phi_1$	（K） $1+\phi_2$	（L） $1-\phi_2$
（M） ${\phi_1}^2$	（N） $1-{\phi_1}^2$	（O） ${\phi_2}^2$	（P） $1-{\phi_2}^2$
（Q） $1+{\phi_1}^2+{\phi_2}^2$	（R） $1-{\phi_1}^2+{\phi_2}^2$	（S） $1+{\phi_1}^2-{\phi_2}^2$	（T） $(1+\phi_1+\phi_2)^2$

［⑮、⑯の選択肢］

（A） ϕ_1	（B） ϕ_2	（C） $\phi_1\phi_2$	（D） $2\phi_1\phi_2$
（E） ρ_{h-1}	（F） $\phi_1\rho_{h-1}$	（G） $2\phi_1\rho_{h-1}$	（H） $\phi_2\rho_{h-1}$
（I） $2\phi_2\rho_{h-1}$	（J） $\phi_1\phi_2\rho_{h-1}$	（K） ρ_{h-2}	（L） $\phi_1\rho_{h-2}$
（M） $2\phi_1\rho_{h-2}$	（N） $\phi_2\rho_{h-2}$	（O） $2\phi_2\rho_{h-2}$	（P） $\phi_1\phi_2\rho_{h-2}$

［⑰～⑳の選択肢］

（A） 0.04	（B） 0.08	（C） 0.12	（D） 0.16
（E） 0.20	（F） 0.24	（G） 0.28	（H） 0.32
（I） 0.36	（J） 0.40	（K） 0.44	（L） 0.48
（M） 0.52	（N） 0.56	（O） 0.60	（P） 0.64

余白ページ

問題３． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。ただし、$i=\sqrt{-1}$ で、$o(t)$ は実変数 t が無限小なるとき、t よりも高位の無限小（※）を表すこととする。また、 ⑨ 、 ⑮ 、 ⑯ 、 ⑳ の解答にあたっては、問題文中に記載している指示に従うこと。 （１５点）

（※）例えば、$a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots$ なる式において $a_2t^2+a_3t^3+\cdots$ の部分を $o(t)$ で表す。

（１）確率変数 X に対して、X の特性関数 $\varphi(t)$ は

$$\varphi(t)=E[\boxed{①}]$$

と表せる。

特性関数は積率母関数とほぼ同じ性質も持つが、特性関数において t がとりうる必要条件としての範囲は $\boxed{②}$ であるという点で、積率母関数よりも優れている。

いま、確率変数 X は $\{0,1,2,3,4,\cdots,99\}$ という値をそれぞれ $\frac{1}{100}$ の確率でとるものとする。

この確率変数 X に対して特性関数 $\varphi(t)$ を求めると、

$$\varphi(t)=\boxed{③}$$

である。

（２）確率変数 X の期待値 μ が存在するとき、その特性関数 $\varphi(t)$ について

$$\varphi(t)=1+it\mu+o(t)$$

が成り立つことを X が連続的な場合および離散的な場合のそれぞれで示す。

なお、必要に応じて次の不等式を使用してよい。

三角不等式：任意の複素数 z_1 ，z_2 に対して、 $|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

（ア）X が連続的な場合について、その確率密度関数を $f(x)$ とする。

$$\varphi(t)-(1+it\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{④}f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{⑤}f(x)dx\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\boxed{④}-1-\boxed{⑤}\right)f(x)dx$$

ここで公式

$$g(x)-g(0)=\int_0^x g'(u)du$$

を適用すれば、

$$\boxed{④}-1=\boxed{⑥}\int_0^x\boxed{⑦}du$$

であるので、

$$\boxed{④} - 1 - \boxed{⑤} = \boxed{⑥}\int_0^x \left(\boxed{⑦} - 1\right)du = \boxed{⑥} \times R$$

とおけば（$t=0$ のときは $R=0$ とする）、

$$|R| \leq \int_0^{|x|} \left|e^{\pm \boxed{⑧}} - 1\right| du \leq \boxed{⑨}$$

が成り立つ。（ここで $\pm$ は x の正負による）

【 $\boxed{⑨}$ の解答にあたっては、三角不等式を用いて計算される最小値を選ぶこと。】

ところで仮定から、$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ が存在するから、$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$ 。
したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな $\xi > 0$ をとれば

$$\int_{|x|>\xi} |x|f(x)dx < \varepsilon \quad ・・・（\mathrm{A}）$$

とすることができる。
この ξ に対して $|x| \leq \boxed{⑩}$, $|t| < \boxed{⑪}$ならば、

$$|R| \leq \int_0^{|x|} \left|e^{\pm \boxed{⑧}} - 1\right| du \leq \int_0^{|x|} \left|\boxed{⑫}\right| du \leq \frac{|t|\xi^2}{2} < \varepsilon \quad ・・・（\mathrm{B}）$$

よって、$|t| < \boxed{⑪}$であれば、

$$|\varphi(t) - (1 + it\mu)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\boxed{④} - 1 - \boxed{⑤}\right| f(x)dx$$

$$= \left|\boxed{⑬}\right| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\boxed{⑭}\right| f(x)dx$$

$$= \left|\boxed{⑬}\right| \underline{\left(\int_{|x|>\xi} \left|\boxed{⑭}\right| f(x)dx + \int_{|x|\leq\xi} \left|\boxed{⑭}\right| f(x)dx\right)}$$

$$\leq \left|\boxed{⑬}\right| \underline{\left(\int_{|x|>\xi} \boxed{⑨} f(x)dx + \int_{|x|\leq\xi} \boxed{⑮} f(x)dx\right)}$$

$$< \boxed{⑯} \times \left|\boxed{⑬}\right|$$

【 $\boxed{⑮}$ 、 $\boxed{⑯}$ の解答にあたっては、それぞれ下線部に（A）、（B）を適用して計算される最小値を選ぶこと。】

よって、$t \to 0$ のとき

$$\boxed{⑰} \times \{\varphi(t) - (1 + it\mu)\} \to 0$$

となるから、

$$\varphi(t) = 1 + it\mu + o(t)$$

が得られた。

（イ）X が離散的な場合（X のとりうる値は、$a_1, a_2, \cdots$ と書く）について、その確率分布を $\{f(a_k)\}$ とする。

$$\varphi(t) - (1 + it\mu) = \sum_k \left(\boxed{⑱} - \boxed{⑲}\right) f(a_k)$$

ところで仮定から、$\mu = E[X]$ が存在するから、

$$\sum_{k} |a_k| f(a_k) < \infty$$

したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な番号 N を選べば

$$\sum_{k \geq N+1} |a_k| f(a_k) < \varepsilon$$

とすることができる。ところで、

$$\boxed{⑱} - \boxed{⑲} = \boxed{⑥} \times R_k$$

とおけば（$t = 0$ のときは $R_k = 0$ とする）、

$$|R_k| \leq \boxed{⑳}$$

【 $\boxed{⑳}$ の解答にあたっては、三角不等式を用いて計算される最小値を選ぶこと。】

また、 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|)$ として、$k \leq \boxed{㉑}$, $|t| \leq \boxed{㉒}$ ならば、

$$|R_k| < \varepsilon$$

が成り立つことが連続的な場合と同様にわかる。

ゆえにこのとき、

$$|\varphi(t) - (1 + it\mu)| < \boxed{⑯} \times \left\| \boxed{⑬} \right\|$$

となるので、連続的な場合と同様にして、

$$\varphi(t) = 1 + it\mu + o(t)$$

が得られた。

（３）$X_1, X_2, \cdots$ は同じ確率分布を持つ独立な確率変数列であり、各 $X_m (m = 1,2,\cdots)$ は $\{0,1,2,3,4,\cdots,99\}$ という値をそれぞれ $\frac{1}{100}$ の確率でとるものとする。

$$Y_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{X_m}{100^m}$$

とおくと、Y_n の特性関数 $\varphi_n(t)$ は、

$$\varphi_n(t) = \boxed{㉓}$$

である。

また、$n \to \infty$ のとき、$\varphi_n(t) \to \boxed{㉔}$ であり、$E[Y_n] \to \boxed{㉕}$ である。

ここで、任意の複素数 z に対して、

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

となることを用いて $n \to \infty$ のとき、$\varphi_n(t)$ を t の項まで展開すると、

$$\varphi_n(t) \to 1 + \boxed{㉖} + o(t)$$

となり、（２）で示した式に基づいて計算した結果と一致することが分かる。

［①の選択肢］

（A）　ite^{X}　（B）　te^{iX}　（C）　ie^{tX}　（D）　e^{itX}

（E）　e^{tX}　（F）　itX　（G）　tX　（H）　it^{X}

［②の選択肢］

（A）すべての実数　（B）正の実数　（C）負の実数　（D）すべての整数

（E）すべての自然数　（F）負の整数

［③の選択肢］

（A）　$\frac{99}{2}it$　（B）　$\frac{99}{2}t$　（C）　$\frac{1-e^{100t}}{1-e^{t}}i$　（D）　$\frac{1-e^{100t}}{1-e^{t}}$

（E）　$\frac{1-t^{100}}{1-t}i$　（F）　$\frac{1-e^{100it}}{1-e^{it}}$　（G）　$\frac{i}{100}\frac{1-e^{100t}}{1-e^{t}}$　（H）　$\frac{1}{100}\frac{1-e^{100t}}{1-e^{t}}$

（I）　$\frac{i}{100}\frac{1-t^{100}}{1-t}$　（J）　$\frac{1}{100}\frac{1-e^{100it}}{1-e^{it}}$

［④、⑤の選択肢］

（A）　ite^{x}　（B）　te^{ix}　（C）　ie^{tx}　（D）　e^{itx}

（E）　e^{tx}　（F）　itx　（G）　tx　（H）　it^{x}

[⑥～⑧の選択肢]

（A） ite^u	（B） te^{iu}	（C） ie^{tu}	（D） e^{itu}
（E） e^{tu}	（F） itu	（G） tu	（H） it^u
（I） iu	（J） itx	（K） ix	（L） it
（M） tx	（N） u	（O） t	（P） x

[⑨の選択肢]

（A） $\lvert x\rvert$	（B） $2\lvert x\rvert$	（C） $3\lvert x\rvert$	（D） $4\lvert x\rvert$
（E） $e^{\lvert x\rvert}$	（F） $e^{2\lvert x\rvert}$	（G） $e^{3\lvert x\rvert}$	（H） $e^{4\lvert x\rvert}$

[⑩、⑪、⑬～⑯の選択肢]

（A） t	（B） R	（C） ξ	（D） ε
（E） $2t$	（F） $2R$	（G） 2ξ	（H） 2ε
（I） $3t$	（J） $3R$	（K） 3ξ	（L） 3ε
（M） $\frac{2\varepsilon}{\xi}$	（N） $\frac{2\xi}{\varepsilon}$	（O） $\frac{2\varepsilon}{\xi^2}$	（P） $\frac{2\xi^2}{\varepsilon}$

[⑫の選択肢]

（A） te^u	（B） te^{iu}	（C） e^{tu}	（D） e^{itu}
（E） tu	（F） $2te^u$	（G） $2te^{iu}$	（H） $2e^{tu}$
（I） $2e^{itu}$	（J） $2tu$		

［⑰の選択肢］

（A）　t　（B）　ε　（C）　$\dfrac{1}{t}$　（D）　$\dfrac{1}{\varepsilon}$

［⑱、⑲の選択肢］

（A）　ite^{a_k}　（B）　te^{ia_k}　（C）　ie^{ta_k}　（D）　e^{ita_k}

（E）　e^{ta_k}　（F）　ita_k　（G）　ta_k　（H）　it^{a_k}

（I）　$ite^{a_k}-1$　（J）　$te^{ia_k}-1$　（K）　$ie^{ta_k}-1$　（L）　$e^{ita_k}-1$

［⑳の選択肢］

（A）　$|a_k|$　（B）　$2|a_k|$　（C）　$3|a_k|$　（D）　$4|a_k|$

（E）　$e^{|a_k|}$　（F）　$e^{2|a_k|}$　（G）　$e^{3|a_k|}$　（H）　$e^{4|a_k|}$

［㉑、㉒の選択肢］

（A）　N　（B）　R_k　（C）　ε　（D）　$2N$

（E）　$2R_k$　（F）　2ε　（G）　$3N$　（H）　$3R_k$

（I）　3ε　（J）　$N+1$　（K）　R_k+1　（L）　$\dfrac{2\varepsilon}{M}$

（M）　$\dfrac{2M}{\varepsilon}$　（N）　$\dfrac{2\varepsilon}{M^2}$　（O）　$\dfrac{2M^2}{\varepsilon}$

[㉓の選択肢]

（A） $\left(\frac{99}{2}it\right)^n$　（B） $\frac{1-e^t}{1-e^{t\cdot 100^{-n}}}i^n$　（C） $\frac{1-e^{100nt}}{1-e^t}i^n$

（D） $\frac{1-e^t}{1-e^{t\cdot 100^{-n}}}$　（E） $\frac{1-e^{100nt}}{1-e^t}$　（F） $\frac{1-t^{100n}}{1-t}i^n$

（G） $\frac{1-e^{it}}{1-e^{it\cdot 100^{-n}}}$　（H） $\frac{1-e^{100nit}}{1-e^{it}}$　（I） $\frac{i^n}{100^n}\frac{1-e^t}{1-e^{t\cdot 100^{-n}}}$

（J） $\frac{i^n}{100^n}\frac{1-e^{100nt}}{1-e^t}$　（K） $\frac{1}{100^n}\frac{1-e^t}{1-e^{t\cdot 100^{-n}}}$　（L） $\frac{1}{100^n}\frac{1-e^{100nt}}{1-e^t}$

（M） $\frac{i^n}{100^n}\frac{1-t^{100n}}{1-t}$　（N） $\frac{1}{100^n}\frac{1-e^{it}}{1-e^{it\cdot 100^{-n}}}$　（O） $\frac{1}{100^n}\frac{1-e^{100nit}}{1-e^{it}}$

[㉔の選択肢]

（A） $\frac{it}{e^{it}-1}$　（B） $\frac{it}{1-e^{it}}$　（C） $\frac{it}{100(e^{it}-1)}$　（D） $\frac{it}{100(1-e^{it})}$

（E） $\frac{e^{it}-1}{it}$　（F） $\frac{1-e^{it}}{it}$　（G） $\frac{100(e^{it}-1)}{it}$　（H） $\frac{100(1-e^{it})}{it}$

[㉕の選択肢]

（A） 2　（B） 50　（C） 100　（D） $\frac{1}{2}$

（E） $\frac{1}{50}$　（F） $\frac{1}{100}$

[㉖の選択肢]

（A） $2t$　（B） $50t$　（C） $100t$　（D） $\frac{1}{2}t$

（E） $\frac{1}{50}t$　（F） $\frac{1}{100}t$　（G） $2it$　（H） $50it$

（I） $100it$　（J） $\frac{1}{2}it$　（K） $\frac{1}{50}it$　（L） $\frac{1}{100}it$

余白ページ

問題４． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（１５点）

（１）ある母集団の母集団分布は、未知の母数 θ を持つ確率密度関数 $f(x;\theta)$ で与えられているとする。いま、帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$ を対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1\ (\neq \theta_0)$ に対して検定するために、大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をこの母集団から無作為に抽出したとする。

$0 < \varepsilon < 1$ を満たす実数 ε に対して、第１種の誤りの起こる確率

$$\int \cdots \int_R \boxed{\quad ① \quad} dx_1 \cdots dx_n$$

が ε になるように棄却域 R を定めようとすると、R の定め方はいろいろとあるが、このようなものの中で、さらに第２種の誤りの起こる確率

$$1 - \int \cdots \int_R \boxed{\quad ② \quad} dx_1 \cdots dx_n$$

が $\boxed{\quad ③ \quad}$ になるように棄却域 R を選び、これを改めて R^* と書く。そして、

標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in R^*$ 　ならば $\boxed{\quad ④ \quad}$ し、

標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \notin R^*$ 　ならば $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ する。

こうして定められた棄却域 R^* は有意水準 ε の最良棄却域とよばれ、これを棄却域とする検定法を、最有力検定法という。

上記で述べた最有力検定法を作るには、

$$\text{領域}\quad R_k = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, \frac{\boxed{\quad ⑥ \quad}}{\boxed{\quad ⑦ \quad}} \geq k \right\} \quad ・・・(\mathrm{A})$$

とおき、

$$\int \cdots \int_{R_k} \boxed{\quad ① \quad} dx_1 \cdots dx_n = \varepsilon \quad ・・・(\mathrm{B})$$

となるように定数 k と領域 R_k を定めると、この R_k が有意水準 ε の最良棄却域 R^* となる。これを、ネイマン・ピアソン（Neyman-Pearson）の定理という。

実際、ネイマン・ピアソンの定理が成り立つことを証明しよう。

まず、(A) および (B) をともに満たす領域 R_k を改めて R^* 、(B) を満たす任意の領域 R_k を改めて R とそれぞれ書き、

$$r^* = 1 - \int \cdots \int_{R^*} \boxed{\quad ⑥ \quad} dx_1 \cdots dx_n$$

$$r = 1 - \int \cdots \int_R \boxed{\quad ⑥ \quad} dx_1 \cdots dx_n$$

とおく。

ここで、

$$\text{領域}\ \boxed{\quad ⑧ \quad}\ \text{上では}\ \frac{\boxed{\quad ⑥ \quad}}{\boxed{\quad ⑦ \quad}} < k$$

$$\text{領域}\ \boxed{\quad ⑨ \quad}\ \text{上では}\ \frac{\boxed{\quad ⑥ \quad}}{\boxed{\quad ⑦ \quad}} \geq k$$

であるから、

$$\begin{aligned} r^* - r &< k\left\{\int \cdots \int_{\boxed{⑧}} \boxed{\quad ⑦ \quad}\, dx_1 \cdots dx_n - \int \cdots \int_{\boxed{⑨}} \boxed{\quad ⑦ \quad}\, dx_1 \cdots dx_n\right\} \\ &= k\left\{\int \cdots \int_{R} \boxed{\quad ⑦ \quad}\, dx_1 \cdots dx_n - \int \cdots \int_{R^*} \boxed{\quad ⑦ \quad}\, dx_1 \cdots dx_n\right\} \\ &= \boxed{\quad ⑩ \quad} \end{aligned}$$

となり、R^* が最良棄却域であることが分かる。

（2）いま、平均 $\dfrac{1}{\theta}$ $(\theta > 0)$ の指数分布に従う母集団から、大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を無作為に抽出し、帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$ を対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1\ (< \theta_0)$ に対して検定することを考える。

ネイマン・ピアソンの定理より、最良棄却域 R_k は

$$\frac{\boxed{\quad ⑥ \quad}}{\boxed{\quad ⑦ \quad}} \geq k$$

なる不等式を満たす領域であるから、$\theta_1 < \theta_0$ より、

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq \frac{\boxed{\quad ⑪ \quad}}{\boxed{\quad ⑫ \quad}}$$

が成り立つ。

大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の和、$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の積率母関数を $m_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t)$ とすると、$\theta > t$ に対し、

$$m_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = \boxed{\quad ⑬ \quad}$$

一方、確率変数 Z の確率密度関数を

$$g(z) = \begin{cases} \boxed{\quad ⑭ \quad} & (z > 0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases}$$

として定めると、Z の積率母関数 $m_Z(t)$ は、

$$m_Z(t) = \boxed{\quad ⑬ \quad}$$

であるから、$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ と Z の確率分布は同分布となる。したがって、大きさ n の標本の和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は、確率密度関数 $g(z)$ を持つ確率分布に従うことが分かる。

よって、$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の分布関数は、$c > 0$ に対し、

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq c) = \int_0^c \boxed{\quad ⑭ \quad}\, dz = \boxed{\quad ⑮ \quad} - \sum_{s=0}^{\boxed{⑯}} \boxed{\quad ⑰ \quad}$$

と書くことができる。

（３）（２）の結果を用い、$n=4, \theta_0=5, \theta_1=1, k=16$ のときの最良棄却域 R_k による有意水準 ε を求める。

$$\varepsilon = P\left(X_1+X_2+\cdots+X_n \geq \frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑫}} \middle| \theta=\theta_0\right)$$
$$=1-P\left(X_1+X_2+\cdots+X_n \leq \frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑫}} \middle| \theta=\theta_0\right)$$

が求める有意水準となるので、$n=4, \theta_0=5, \theta_1=1, k=16$ とすると、

$$\frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑫}} = \boxed{⑱}$$

となる。したがって、求める有意水準 ε に最も近い数値は、

$$\varepsilon = \boxed{⑲}$$

となる。

［①、②、⑥、⑦の選択肢］

（A）　$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)$　（B）　$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)$　（C）　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)$

（D）　$\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\right)^{\frac{1}{n}}$　（E）　$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)^n\right)^{\frac{1}{n}}$　（F）　$\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(x_i;\theta_0)}}$

（G）　$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)$　（H）　$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)$　（I）　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)$

（J）　$\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\right)^{\frac{1}{n}}$　（K）　$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)^n\right)^{\frac{1}{n}}$　（L）　$\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(x_i;\theta_1)}}$

［③の選択肢］

（A）　0　（B）　ε　（C）　$1-\varepsilon$　（D）　$\frac{1}{\varepsilon}$

（E）　$1-\frac{1}{\varepsilon}$　（F）　最小　（G）　最大

［④、⑤の選択肢］

（A）　H_0 を採択　（B）　H_0 を棄却　（C）　H_1 を棄却

［⑧、⑨の選択肢］

（A）　R　　（B）　R^*　　（C）　$R \cup R^*$　　（D）　$R \cap R^*$

（E）　$R-(R \cap R^*)$　　（F）　$R^*-(R \cap R^*)$　　（G）　$(R \cup R^*)-(R \cap R^*)$

［⑩の選択肢］

（A）　0　　（B）　ε　　（C）　$n\varepsilon$　　（D）　ε^n

（E）　$\dfrac{1}{\varepsilon}$　　（F）　$\dfrac{1}{n\varepsilon}$　　（G）　$\dfrac{1}{\varepsilon^n}$

［⑪の選択肢］

（A）　$\log\left\{k\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)\right\}$　　（B）　$\log\left\{k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$　　（C）　$\log\left\{k\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right\}$

（D）　$\log\left\{k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right\}$　　（E）　$\log\left\{k^n\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)\right\}$　　（F）　$\log\left\{k^n\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$

（G）　$\log\left\{k^n\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right\}$　　（H）　$\log\left\{k^n\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right\}$

［⑫の選択肢］

（A）　$\theta_0-\theta_1$　　（B）　$\theta_1-\theta_0$　　（C）　$\dfrac{1}{\theta_0}-\dfrac{1}{\theta_1}$　　（D）　$\dfrac{1}{\theta_1}-\dfrac{1}{\theta_0}$

［⑬の選択肢］

（A）　$\left(\frac{1}{\theta-t}\right)^n$　　（B）　$\left(\frac{\theta}{1-t}\right)^n$　　（C）　$\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^n$　　（D）　$\left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^n$

（E）　$\left(\frac{1}{\theta-t}\right)^{n+1}$　　（F）　$\left(\frac{\theta}{1-t}\right)^{n+1}$　　（G）　$\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^{n+1}$　　（H）　$\left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^{n+1}$

［⑭の選択肢］

（A）$\dfrac{1}{(n-1)!}\theta^{n}z^{n-1}e^{-\theta z}$　（B）$\dfrac{1}{n!}\theta^{n+1}z^{n}e^{-\theta z}$　（C）$\dfrac{1}{n!}\theta^{n}z^{n}e^{-\theta z}$

（D）$\dfrac{1}{(n-1)!}\theta^{n}z^{n-1}e^{-z}$　（E）$\dfrac{1}{n!}\theta^{n+1}z^{n}e^{-z}$　（F）$\dfrac{1}{n!}\theta^{n}z^{n}e^{-z}$

（G）$\dfrac{1}{(n-1)!}\theta^{-n}z^{n-1}e^{-\frac{z}{\theta}}$　（H）$\dfrac{1}{n!}\theta^{-n-1}z^{n}e^{-\frac{z}{\theta}}$　（I）$\dfrac{1}{n!}\theta^{-n}z^{n}e^{-\frac{z}{\theta}}$

（J）$\dfrac{1}{(n-1)!}\theta^{-n}z^{n-1}e^{-z}$　（K）$\dfrac{1}{n!}\theta^{-n-1}z^{n}e^{-z}$　（L）$\dfrac{1}{n!}\theta^{-n}z^{n}e^{-z}$

［⑮の選択肢］

（A）$-\theta^{n}$　（B）$-\dfrac{1}{\theta^{n}}$　（C）$-\theta$　（D）$-\dfrac{1}{\theta}$

（E）-1　（F）0　（G）1　（H）$\dfrac{1}{\theta}$

（I）θ　（J）$\dfrac{1}{\theta^{n}}$　（K）θ^{n}

［⑯の選択肢］

（A）$n-3$　（B）$n-2$　（C）$n-1$　（D）n

（E）$n+1$　（F）$n+2$　（G）$n+3$

［⑰の選択肢］

（A）$\dfrac{\theta^{-n-1}c^{s}}{s!}e^{-c}$　（B）$\dfrac{\theta^{-n}c^{s}}{s!}e^{-c}$　（C）$\dfrac{c^{s}}{s!}e^{-c}$　（D）$\dfrac{\theta^{n}c^{s}}{s!}e^{-c}$

（E）$\dfrac{\theta^{n+1}c^{s}}{s!}e^{-c}$　（F）$\dfrac{\theta^{-s-1}c^{s}}{s!}e^{-\frac{c}{\theta}}$　（G）$\dfrac{\theta^{-s}c^{s}}{s!}e^{-\frac{c}{\theta}}$　（H）$\dfrac{\theta^{-s+1}c^{s}}{s!}e^{-\frac{c}{\theta}}$

（I）$\dfrac{\theta^{s-1}c^{s}}{s!}e^{-\theta c}$　（J）$\dfrac{\theta^{s}c^{s}}{s!}e^{-\theta c}$　（K）$\dfrac{\theta^{s+1}c^{s}}{s!}e^{-\theta c}$

［⑱の選択肢］

（Ａ） $\log 2.5$ （Ｂ） $4\log 2.5$ （Ｃ） $5\log 2.5$ （Ｄ） $\log 2+4\log 5$

（Ｅ） $\log 2+5\log 5$ （Ｆ） $4\log 2+\log 5$ （Ｇ） $5\log 2+\log 5$ （Ｈ） $\log 10$

（Ｉ） $4\log 10$ （Ｊ） $5\log 10$

［⑲の選択肢］

（Ａ） 0.03% （Ｂ） 0.11% （Ｃ） 0.33% （Ｄ） 0.59%

（Ｅ） 1.07% （Ｆ） 3.33% （Ｇ） 10.65% （Ｈ） 32.87%

（Ｉ） 51.67% （Ｊ） 98.57%

余白ページ

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$$P(x > 1.9600) = 0.025$$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φ のχ^2分布の上側ε 点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

III．分母の自由度n 、分子の自由度m のF 分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon =$ 0.050

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$exp(x)$
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052

以上

数学（解答例）

問題１.

（１）箱Ｒが選ばれる事象を R 、箱Ｗが選ばれる事象を W とする。また、箱から一度に５個同時に玉を取り出した結果を F とする。求める確率 $P(R|F)$ はベイズの公式により次式で計算される。

$$P(R|F)=\frac{P(F|R)\cdot P(R)}{P(F|R)\cdot P(R)+P(F|W)\cdot P(W)}$$

２つの箱から１つの箱を無作為に選ぶので、

$$P(R)=P(W)=\frac{1}{2}$$

$P(F|R)$ は、箱Ｒから一度に５個同時に玉を取り出すとき、赤玉が３個、白玉が２個となる確率であるから、

$$P(F|R)=\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{15}{5}}$$

$P(F|W)$ は、箱Ｗから一度に５個同時に玉を取り出すとき、赤玉が３個、白玉が２個となる確率であるから、

$$P(F|W)=\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}$$

よって、求める確率は、

$$P(R|F)=\frac{\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{15}{5}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{15}{5}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}+\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{6\cdot 5}{2}\right)}{\left(\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{6\cdot 5}{2}\right)+\left(\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{9\cdot 8}{2}\right)}$$

$$=\frac{7}{7+4}$$

$$=\frac{7}{11}$$

よって、解答は　**（E）**

（２）携帯通信利用者の月内の通信利用量Xは、平均 4 の指数分布に従うことから、確率密度関数は、

$$f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\qquad(x>0)$$

上記より、通信利用料金月額の分布は、

$$\begin{cases}2{,}000 & (0<X\leq 20\text{ のとき})\\ 2{,}000+500n & (19+n<X\leq 20+n\text{ のとき、}n=1,2,\dots)\end{cases}$$

となる。したがって、通信利用料金月額の期待値をEとすると、

$$E=2{,}000\cdot\frac{1}{4}\int_0^{20}e^{-\frac{1}{4}x}dx+\sum_{n=1}^{\infty}(2{,}000+500n)\cdot\frac{1}{4}\int_{19+n}^{20+n}e^{-\frac{1}{4}x}dx$$

$$=2{,}000\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{4}x}dx+\sum_{n=1}^{\infty}500n\cdot\frac{1}{4}\int_{19+n}^{20+n}e^{-\frac{1}{4}x}dx$$

$$=2{,}000+500\cdot\frac{1}{4}\int_{20}^{21}e^{-\frac{1}{4}x}dx+500\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\int_{21}^{22}e^{-\frac{1}{4}x}dx+\cdots$$

$$=2{,}000+500\left(\frac{1}{4}\int_{20}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}x}dx+\frac{1}{4}\int_{21}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}x}dx+\cdots\right)$$

$$=2{,}000+500\left(\left[e^{-\frac{1}{4}x}\right]_{\infty}^{20}+\left[e^{-\frac{1}{4}x}\right]_{\infty}^{21}+\cdots\right)$$

$$=2{,}000+500\left(e^{-\frac{20}{4}}+e^{-\frac{21}{4}}+\cdots\right)$$

$$=2{,}000+500\cdot\frac{e^{-\frac{20}{4}}}{1-e^{-\frac{1}{4}}}$$

$e=2.718$ として計算すると、

$$E=2{,}015.23978$$

よって、<u>解答は　**（F）**</u>

（3）あるパン工場で製造されたロールパンの重さ Z は、区間 $[25.0,27.0]$ 上の一様分布に従うので、ロールパンの重さに応じた確率を p_1, p_2, p_3 とすると、p_1, p_2, p_3 は次のように書ける。

$$p_1 = P(25.0 \le Z < 25.4) = \frac{2}{10}$$

$$p_2 = P(25.4 \le Z < 26.0) = \frac{3}{10}$$

$$p_3 = P(26.0 \le Z \le 27.0) = \frac{5}{10}$$

確率変数 X_1, X_2, X_3 の同時確率分布はパラメータ 10 , p_1, p_2, p_3 の多項分布に従うから、求める確率は、

$$\begin{aligned} P(X_1 = 3, X_2 = 2) &= P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 5) \\ &= \frac{10!}{3!\,2!\,5!} {p_1}^3 {p_2}^2 {p_3}^5 \\ &= \frac{10!}{3!\,2!\,5!} \left(\frac{2}{10}\right)^3 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{5}{10}\right)^5 \\ &= 0.0567 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} E[X_2X_3] &= \sum_{k+l\le 10} kl \frac{10!}{k!\,l!\,(10-k-l)!} {p_2}^k {p_3}^l {p_1}^{10-k-l} \\ &= 10 \cdot 9 \cdot p_2p_3 \sum_{k+l\le 10} \frac{8!}{(k-1)!\,(l-1)!\,\{8-(k-1)-(l-1)\}!} {p_2}^{k-1} {p_3}^{l-1} {p_1}^{8-(k-1)-(l-1)} \\ &= 90p_2p_3 \end{aligned}$$

であり、X_2 の周辺分布はパラメータ 10 , p_2 の二項分布、X_3 の周辺分布はパラメータ 10 , p_3 の二項分布に従うので、X_2 の期待値は

$$\begin{aligned} E[X_2] &= \sum_{k=0}^{10} k \frac{10!}{k!\,(10-k)!} {p_2}^k (1-p_2)^{10-k} \\ &= 10 \cdot p_2 \sum_{k=1}^{10} \frac{9!}{(k-1)!\,\{9-(k-1)\}!} {p_2}^{k-1} (1-p_2)^{9-(k-1)} \\ &= 10p_2 \end{aligned}$$

となる。

同様にして X_3 の期待値は $E[X_3] = 10p_3$ であるから、X_2と X_3 の共分散 $\mathrm{Cov}[X_2, X_3]$ は、

$$\mathrm{Cov}[X_2, X_3] = E[X_2X_3] - E[X_2]E[X_3] = -10p_2p_3 = -1.5$$

となる。

よって、解答は　①　（H）　②　（C）

（４）確率変数 X の周辺密度関数は、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}\right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right\}\right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] dy
\end{aligned}
$$

ここで、上式の被積分関数は正規分布の確率密度関数であり、積分値は 1 となることから、

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right]
$$

したがって、確率変数 X の周辺密度関数は正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ であることがわかる。$X = x$ を与えたときの Y の条件付き確率密度関数は、$f(x) > 0$ のとき、$f(y|x) = f(x,y)/f(x)$ のため、

$$
\begin{aligned}
&f(y|x) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}\right] \Bigg/ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}\left\{y - \left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right\}^2\right]
\end{aligned}
$$

よって、$X = x$ を与えたときの Y の条件付き確率分布は、

正規分布 $N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), {\sigma_2}^2(1-\rho^2)\right)$に従うことが分かる。

$\mu_1 = 3, \mu_2 = 2.4, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 5, \rho = 0.6$ のとき、$X = 5$ の条件の下で、

$$
\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) = 3, \qquad {\sigma_2}^2(1-\rho^2) = 16
$$

であるから、$X = 5$ を与えたときの Y の条件付き確率分布は、正規分布 $N(3,16)$ に従う。

Z を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数として、標準正規分布表を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
P(0 \le Y \le 7 | X = 5) &= P\left(\frac{0-3}{\sqrt{16}} \le \frac{Y-3}{\sqrt{16}} \le \frac{7-3}{\sqrt{16}} \middle| X = 5\right) \\
&= P\left(-0.75 \le \frac{Y-3}{\sqrt{16}} \le 1.0 \middle| X = 5\right) \\
&= P(-0.75 \le Z \le 1.0) \\
&= 1 - 0.2266 - 0.1587 \\
&= 0.6147
\end{aligned}$$

となる。

よって、解答は　① **（C）**　② **（D）**　③ **（G）**

（５）i 回目のゲームにおけるＡの得点を表す確率変数を $a_i = a_{1i} + a_{2i} + a_{3i}$（$a_{1i}$：1 回目の数字、$a_{2i}$：2 回目の数字、$a_{3i}$：3 回目の数字）、Ｂの得点を表す確率変数を b_i とすると、a_{1i}，a_{2i}，a_{3i}，b_i は互いに独立である。a_{1i}，a_{2i}，a_{3i}，b_i の期待値と分散は以下の通りとなる。

$$E[a_{1i}] = E[a_{2i}] = E[a_{3i}] = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$$

$$E[b_i] = \frac{1}{5}(3+6+9+12+15) = 9$$

$$E[a_{1i}^2] = E[a_{2i}^2] = E[a_{3i}^2] = \frac{1}{5}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2) = 11$$

$$E[b_i^2] = \frac{1}{5}(3^2+6^2+9^2+12^2+15^2) = 99$$

$$V[a_{1i}] = E[a_{1i}^2] - E[a_{1i}]^2 = 11 - 3^2 = 2 \quad (= V[a_{2i}] = V[a_{3i}])$$
$$V[b_i] = E[b_i^2] - E[b_i]^2 = 99 - 9^2 = 18$$

いま、Ｂの得点の標本平均を $\bar{b} = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ すると、期待値は $E[\bar{b}] = 9$ であり、分散は $V[\bar{b}] = \frac{18}{n}$ である。また、Ａの得点の標本平均を $\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ すると、期待値は $E[\bar{a}] = 9$ であり、分散は $V[\bar{a}] = \frac{6}{n}$ である。

したがって、Ｂの得点の標本平均とＡの得点の標本平均の差を $\bar{X} = \bar{b} - \bar{a}$ とすると、期待値は $E[\bar{X}] = 0$、分散は $V[\bar{X}] = \frac{24}{n}$ である。

チェビシェフの不等式より、余事象を考えると、$k > 0$ に対し、

$$P\left(|\bar{X} - 0| < k \times \sqrt{24/n}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

が成り立つ。

$$P(|\bar{X}| \leq 0.5) \geq 0.95$$

となるためには、

$$1 - \frac{1}{k^2} \geq 0.95$$

となればよい。

$$k \times \sqrt{24/n} = 0.5$$

であるから、

$$n = \frac{k^2}{0.5^2} \cdot 24 \geq \frac{20}{0.5^2} \cdot 24 = 1{,}920$$

となる。

一方、中心極限定理を用いると、標本平均 $\bar{X}$ は平均 0、分散 $\frac{24}{n}$ の正規分布 $N\left(0, \frac{24}{n}\right)$ で近似できる。題意より、

$$P(|\bar{X}-0| \leq 0.5) = P\left(\frac{|\bar{X}-0|}{\sqrt{24/n}} \leq \frac{0.5}{\sqrt{24/n}}\right) \geq 0.95$$

となるから、付表より、

$$\frac{0.5}{\sqrt{24/n}} \geq 1.96$$

したがって、

$$n \geq 368.7936$$

よって、解答は　①（H）　②（H）

（６）母集団分布は、離散集合 $A=\{n\mid n\in[1,a]\cup[b,c], n\text{は整数}\}$ 上の一様な分布であり、その確率分布は

$$f(x;\ a,b,c)=\frac{1}{(a-1+1)+(c-b+1)}=\frac{1}{a-b+c+1}\quad (x\in A)$$

で表される。したがって、尤度関数 $l(a,b,c)$ は、

$$l(a,b,c)=\prod_{i=1}^{10}f(x_i;\ a,b,c)=\left(\frac{1}{a-b+c+1}\right)^{10}$$

となる。最尤推定値は、尤度関数を最大にするような推定値であるから、(標本から重複を除いた) $1,2,3,5,7,10,12$ のすべてが A に属するという条件のもとで $a-b+c+1$ を最小にする整数 $a,b,c\ (1<a<b<c<22)$ がそれぞれ母数 a,b,c の最尤推定値 $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ である。
まず、$12\in A$ であるから、$\hat{c}\geq 12$ でなければならない。

・$\hat{c}=12$ のとき
$1<a<b<12$ のもとで $a-b+\hat{c}+1=13-(b-a)$ を最小にするには、$2\leq a<b\leq 11$ のもとで $b-a$ が最大になるように a と b を選べばよい。
a の値に応じてとりうる b の値を考えると、例えば、$a=2$ のときは、$b>3$ であると $3\notin A$ となり、$1,2,3,5,7,10,12$ のすべてが A に属するという条件を満たさなくなる。
したがって、$b=3$ でなければならない。このとき $a-b+\hat{c}+1=12$ である。
a が他の値をとる場合についても同様に考えると、下表の通りとなる。

a	b	$b-a$	$a-b+\hat{c}+1$
2	3	1	12
3	4	1	12
3	5	2	11
4	5	1	12
5	6	1	12
5	7	2	11
6	7	1	12
7	8	1	12
7	9	2	11
7	10	3	10
8	9	1	12
8	10	2	11
9	10	1	12
10	11	1	12

よって、とりうる a と b の組み合わせのうち、$b-a$ が最大となるのは、$a=7,\ b=10$ のときであり、このとき $a-b+\hat{c}+1=10$ となる。

・$\hat{c}>12$ のとき

$b>12$ とすると、$1,2,3,5,7,10,12$ のすべてが A に属するという条件から $a\geq 12$ でなければならないが、このとき $a-b+\hat{c}+1\geq 12>10$ であり、$\hat{c}=12$ のときと合わせて考えると最小となる組み合わせはない。

$b=12$ とすると、上記と同様に考えると $a=10,11$ のいずれかでなければならないが、このとき $a-b+\hat{c}+1>10-12+12+1=11>10$ であり、この場合も $\hat{c}=12$ のときと合わせて考えると最小となる組み合わせはない。

$b<12$ とすると、$1<a<b<12$ でなければならないが、$\hat{c}=12$ のときと同様に考えると、$a=7,\ b=10$ のとき $a-b+\hat{c}+1$ は最も小さくなるが、$a-b+\hat{c}+1>7-10+12+1=10$ であり、この場合も $\hat{c}=12$ のときと合わせて考えると最小となる組み合わせはない。

したがって、母数 a,b,c の最尤推定値 $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ は、それぞれ $7,10,12$ である。

よって、解答は　①（Ｆ）　②（Ｉ）　③（Ａ）

（参考）

本問において、$\hat{c}\geq 12$ という条件が得られたときに c の最尤推定値が 12 であると即座に結論づけるのは適切ではない。実際、例えば得られた標本が $1,2,4$ の場合においては、解答例と同様に考えて $\hat{c}\geq 4$ を得るが、最尤推定値は、$(\hat{a},\hat{b},\hat{c})=(2,3,4),(2,4,5)$ の 2 組が考えられ、特に後者については $\hat{c}\neq 4$ である。

（７）測定された 6 つのパックの中身の重量を $x_i\ (i=1,2,\dots,6)$ (g) と表すと、標本平均と標本分散はそれぞれ、

$$\bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=100.5,\quad s^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=\frac{5.5}{6}$$

である。母平均が未知の場合における測定誤差を含んだパック 1 つの中身の重量 X (g) の分散 σ_X^2 に対する信頼係数を 95% とした場合の信頼区間は、自由度 $(6-1=5)$ の χ^2 分布の付表より、$\chi_5^2(0.975)=0.8312,\ \chi_5^2(0.025)=12.8325$ を用いて、次のように表される。

$$\left(\frac{6\times\frac{5.5}{6}}{12.8325},\ \frac{6\times\frac{5.5}{6}}{0.8312}\right)$$

また、測定誤差を含まないパック 1 つの中身の重量 Y (g) の分散を σ_Y^2、測定誤差 Z (g) の分散を σ_Z^2 とすると、$X=Y+Z$ で、Y と Z は互いに独立であるから、分散の加成性より、

$$\sigma_X^2=\sigma_Y^2+\sigma_Z^2=\sigma_Y^2+0.1$$

が成り立つ。したがって、$\sigma_Y^2=\sigma_X^2-0.1$ であるから、σ_Y^2 の信頼区間は、

$$\left(\frac{5.5}{12.8325}-0.1,\ \frac{5.5}{0.8312}-0.1\right)$$

となる。

また、購入する 5 つのパックの中身の重量をそれぞれ $Y_i\ (i=1,2,\dots,5)$ (g) とすると、請求金額は $2\sum_{i=1}^{5}Y_i$ (円) と表され、各 Y_i は互いに独立であるから、請求金額の分散は、

$$V\left[2\sum_{i=1}^{5}Y_i\right]=2^2\times\sum_{i=1}^{5}V[Y_i]=2^2\times5\times\sigma_Y^2$$

となる。

したがって、求める請求金額の分散の信頼区間は、

$$\left(2^2\times5\times\left(\frac{5.5}{12.8325}-0.1\right),\ 2^2\times5\times\left(\frac{5.5}{0.8312}-0.1\right)\right)=(6.57\dots,130.34\dots)$$

である。

よって、解答は　① **（G）**　② **（I）**

（８）母相関係数が ρ であるとき、標本相関係数 r に対し、

$$z=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$$

とおくと、標本の大きさ n が大きいとき、z は平均 $\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$ 、分散 $\frac{1}{n-3}$ の正規分布

$N\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho},\ \frac{1}{n-3}\right)$ に従う。したがって、

$$\eta=\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$$

とすると、$\sqrt{n-3}(z-\eta)$ が、標準正規分布 $N(0,1)$ に従うから、これを用いて題意の検定を行う。
まず、本問においては、

$$\begin{aligned}z&=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}=\frac{1}{2}\log\frac{1+0.4}{1-0.4}\\&=\frac{1}{2}\log\frac{7}{3}\\&=\frac{1}{2}\times(\log 7-\log 3)\\&=\frac{1}{2}\times(1.9459-1.0986)=0.42365\end{aligned}$$

かつ、$n=120$ である。
帰無仮説を $H_0:\rho=0.6$、対立仮説を $H_1:\rho<0.6$ として有意水準 5% で片側検定を行うときは、

$$\eta=\frac{1}{2}\log\frac{1+0.6}{1-0.6}=\frac{1}{2}\log 4=\frac{1}{2}\times 1.3863=0.69315$$

であるから、検定統計量 T は、

$$T=\sqrt{n-3}\times(z-\eta)=\sqrt{120-3}\times(0.42365-0.69315)=-2.915088\cdots$$

となる。$T<-1.6449=-u(0.05)$ であるから、帰無仮説は棄却される。

よって、解答は　①　**（Ｉ）**　②　**（Ｉ）**　③　**（Ｄ）**　④　**（Ｂ）**

（９）母集団の元（特性値）を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ とする。

$X_i = \alpha_r$ となるのは、 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ から n 個をとって 1 列に並べる ${}_N P_n$ 通りの順列のうち第 i 番目を α_r に固定した ${}_{N-1}P_{n-1}$ 通りの場合であるから、

$$P(X_i = \alpha_r) = \frac{{}_{N-1}P_{n-1}}{{}_N P_n} = \frac{1}{N}$$

同様に、

$$P\left(X_i = \alpha_r, X_j = \alpha_s\right) = \frac{{}_{N-2}P_{n-2}}{{}_N P_n} = \frac{1}{N(N-1)} \quad (i \neq j, r \neq s)$$

ゆえに、

$$E[X_i] = \sum_{r=1}^{N} \alpha_r P(X_i = \alpha_r) = \sum_{r=1}^{N} \alpha_r \frac{1}{N} = \mu$$
$$V[X_i] = \sum_{r=1}^{N} (\alpha_r - \mu)^2 P(X_i = \alpha_r) = \sum_{r=1}^{N} (\alpha_r - \mu)^2 \frac{1}{N} = \sigma^2$$

また、$i \neq j$ のとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right] &= E\left[(X_i - \mu)\left(X_j - \mu\right)\right] \\
&= \sum_{r \neq s} (\alpha_r - \mu)(\alpha_s - \mu) P\left(X_i = \alpha_r, X_j = \alpha_s\right) \\
&= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{r \neq s} (\alpha_r - \mu)(\alpha_s - \mu) \\
&= \frac{1}{N(N-1)} \left\{ \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} (\alpha_r - \mu)(\alpha_s - \mu) - \sum_{r=1}^{N} (\alpha_r - \mu)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{N(N-1)} \left\{ \left(\sum_{r=1}^{N} (\alpha_r - \mu) \right)^2 - \sum_{r=1}^{N} (\alpha_r - \mu)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{N(N-1)} (0 - N\sigma^2) \\
&= -\frac{\sigma^2}{N-1}
\end{aligned}$$

したがって、

$$\rho\left(X_i, X_j\right) = \frac{\mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right]}{\sqrt{V[X_i]}\sqrt{V[X_j]}} = -\frac{1}{N-1}$$

である。さらに、

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$
\begin{aligned}
V[\bar{X}] &= E[(\bar{X} - E[\bar{X}])^2] = E[(\bar{X} - \mu)^2] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 + \sum_{i \neq j} (X_i - \mu)(X_j - \mu)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu)^2] + \sum_{i \neq j} E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)]\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} V[X_i] + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 + \sum_{i \neq j}\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2 + n(n-1)\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right) \\
&= \frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)(\mu - \bar{X}) + (\mu - \bar{X})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - (\bar{X} - \mu)^2
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu)^2] - E[(\bar{X} - \mu)^2] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V[X_i] - V[\bar{X}] \\
&= \frac{1}{n} \cdot n\sigma^2 - \frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n} \\
&= \frac{N}{N-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}
$$

よって、解答は　①　**（G）**　②　**（A）**　③　**（D）**

（１０）n 個のデータに対して

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\left(\alpha+\beta_1x_i+\beta_2x_i^2\right)\right\}^2$$

を最小にする係数 $\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2$ の推定値 $\hat{\alpha},\ \hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2$ を求めるために、以下の方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\left(\alpha+\beta_1x_i+\beta_2x_i^2\right)\right\}=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\left(\alpha+\beta_1x_i+\beta_2x_i^2\right)\right\}x_i=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_2}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\left(\alpha+\beta_1x_i+\beta_2x_i^2\right)\right\}x_i^2=0\end{cases}$$

を解いて、正規方程式

$$\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}1\right)\hat{\alpha}+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{\beta}_1+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\hat{\beta}_2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i\\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{\alpha}+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\hat{\beta}_1+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)\hat{\beta}_2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\hat{\alpha}+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)\hat{\beta}_1+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^4\right)\hat{\beta}_2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\end{cases}$$

を得る。与えられたデータにおいては $n=5$ で、

$$\sum_{i=1}^{5}1=5,\sum_{i=1}^{5}x_i=0,\sum_{i=1}^{5}x_i^2=10,\sum_{i=1}^{5}x_i^3=0,\sum_{i=1}^{5}x_i^4=34,$$
$$\sum_{i=1}^{5}y_i=109,\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=-176,\sum_{i=1}^{5}x_i^2y_i=364$$

であるから、正規方程式は、

$$\begin{cases}5\hat{\alpha}+10\hat{\beta}_2=109\\ 10\hat{\beta}_1=-176\\ 10\hat{\alpha}+34\hat{\beta}_2=364\end{cases}$$

となり、これを解いて

$$\hat{\alpha}=\frac{33}{35},\quad \hat{\beta}_1=-\frac{88}{5},\quad \hat{\beta}_2=\frac{73}{7}$$

を得る。

よって、解答は　①（Ｆ）　②（Ａ）　③（Ｉ）

（１１）$Z_5 = W_5 - W_4$, $Z_4 = W_4 - W_3$, $Z_3 = W_3 - W_2$, $Z_2 = W_2 - W_1$, $Z_1 = W_1$ とおく。
ブラウン運動の独立増分性と定常増分性から Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 , Z_5 は互いに独立であり、期待値 0、分散 1 の標準正規分布 $N(0,1)$ に従うことが分かる。
$W_4 + W_1$ は、

$$W_4 + W_1 = (W_4 - W_3) + (W_3 - W_2) + (W_2 - W_1) + 2W_1 = Z_4 + Z_3 + Z_2 + 2Z_1$$

と書ける。正規分布の再生性より、$W_4 + W_1$ の期待値は 0 であり、分散は、

$$V[W_4 + W_1] = V[Z_4 + Z_3 + Z_2 + 2Z_1] = V[Z_4] + V[Z_3] + V[Z_2] + 4V[Z_1] = 7$$

であるから、$W_4 + W_1$ は期待値 0、分散 7 の正規分布 $N(0,7)$ に従うことが分かる。

したがって、

$$P(W_4 + W_1 \leq \alpha) = P\left(\frac{W_4 + W_1}{\sqrt{7}} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{7}}\right) = 0.805$$

であるから付表を用いて計算すると、

$$\alpha = 0.8596\sqrt{7} = 2.27428\cdots$$

となる。
X は、

$$\begin{aligned} X &= 2\left(W_1{}^2 + W_2{}^2 + W_3{}^2 + W_4{}^2 + W_5{}^2 - W_1W_2 - W_2W_3 - W_3W_4 - W_4W_5\right) - W_5{}^2 \\ &= (W_5 - W_4)^2 + (W_4 - W_3)^2 + (W_3 - W_2)^2 + (W_2 - W_1)^2 + W_1{}^2 \\ &= Z_5{}^2 + Z_4{}^2 + Z_3{}^2 + Z_2{}^2 + Z_1{}^2 \end{aligned}$$

と書ける。$Z_1{}^2,\ Z_2{}^2,\ Z_3{}^2,\ Z_4{}^2,\ Z_5{}^2$ は互いに独立であり、自由度 1 の χ^2 分布に従うので、χ^2 分布の再生性より、X は自由度 5 の χ^2 分布に従うことが分かる。

したがって、

$$P(X > \beta) = 1 - P(X \leq \beta) = 1 - 0.1 = 0.9$$

であるから付表より、

$$\beta = \chi_5{}^2(0.9) = 1.6103$$

となる。

よって、解答は　①　**（G）**　②　**（J）**

（１２）平均１の指数分布の分布関数は $F(x) = 1 - e^{-x}\ (x \geq 0)$ である。

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$
$$e^{-x} = 1 - F(x)$$
$$x = -\log(1 - F(x))$$

であるから、

$$F^{-1}(x) = -\log(1 - x)$$

したがって、U が区間 [0,1] 上の一様分布に従う確率変数のとき、逆関数法により

$$F^{-1}(U) = -\log(1 - U)$$

は平均 1 の指数分布に従う。このとき、$1 - U$ も同じく区間 [0,1] 上の一様分布に従う確率変数なので、$-\log U$ も平均１の指数分布に従う。

次に、シミュレーションで得られた U の実現値 $U_i\ (i = 1,2, \dots)$ から逆関数法を用いて平均１の指数分布に従う確率変数 $X_i = -\log U_i\ (i = 1,2, \dots)$ を得たとき、ポアソン分布と指数分布の関係から、$\lambda > 0$ に対し、

$$N = \max\left\{n : \sum_{i=0}^{n} X_i < \lambda\right\}$$

とおけば、確率変数 N は平均 λ のポアソン分布に従う。ただし、$X_0 = 0$ とする。

実際、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は平均１の指数分布に従う独立同分布な確率変数であるから、

$$S_n = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,, & (n \geq 1) \\ 0\,, & (n = 0) \end{cases}$$

とおくと、$S_n\ (n \geq 1)$ は形状パラメータ n 、尺度パラメータ１のガンマ分布 $\Gamma(n, 1)$ に従う。
ここで、

$$N = \max\left\{n : \sum_{i=0}^{n} X_i < \lambda\right\} = \max\{n : S_n < \lambda\}$$

より、$N = n$ となる事象は、$n \geq 0$ に対し、

$$\{N = n\} = \{S_n < \lambda \leq S_n + X_{n+1}\}$$

と書くことができる。

確率変数 S_n と X_{n+1} は互いに独立であるから、(S_n, X_{n+1}) の同時確率密度関数は、

$$f(s,x) = f_{S_n}(s)\cdot f_{X_{n+1}}(x) = \begin{cases} \dfrac{s^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-s}e^{-x}\,, & (s>0, x>0) \\ 0\,, & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

となる。したがって、確率変数 N の確率分布は

$$\begin{aligned} P(N=n) &= \int_0^{\lambda} \frac{s^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-s}\,ds \int_{\lambda-s}^{\infty} e^{-x}\,dx \\ &= \int_0^{\lambda} \frac{s^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-s}\,ds \cdot [-e^{-x}]_{\lambda-s}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)}e^{-\lambda}\int_0^{\lambda} s^{n-1}\,ds \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \end{aligned}$$

となるから、確率変数 N は平均 λ のポアソン分布に従うことが分かる。

U の実現値に対応する $-\log U_i$ の値を計算すると、

i	1	2	3	4	5	6	7	…
U_i	0.70	k	0.30	0.45	0.35	0.85	0.30	…
$-\log U_i$	0.3567	$-\log k$	1.2040	0.7985	1.0498	0.1625	1.2040	…

このとき

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} -\log U_i$$

の値は、

N	1	2	3	4	5	6	7	…
$\sum_{i=1}^{n} -\log U_i$	0.3567	0.3567 $-\log k$	1.5607 $-\log k$	2.3592 $-\log k$	3.4090 $-\log k$	3.5715 $-\log k$	4.7755 $-\log k$	…

となる。

$N=6$、$\lambda=5$ であるから、

$$6=\max\left\{n:\sum_{i=1}^{n}-\log U_i<5\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{6}-\log U_i<5\leq\sum_{i=1}^{7}-\log U_i$$

$$3.5715-\log k<5\leq 4.7755-\log k$$

$$-1.4285<\log k\leq -0.2245$$

$$\exp(-1.4285)<k\leq\exp(-0.2245)$$

したがって、k のとりうる最小値に最も近い数値は $\exp(-1.4285)$ であり、最大値に最も近い数値は $\exp(-0.2245)$ である。

よって、解答は　①（**H**）　②（**F**）　③（**G**）　④（**C**）

問題２.

（１）まず、(I)において、$\phi_1 Y_{t-1}+\phi_2 Y_{t-2}$ を左辺に移項して両辺をそれぞれ２乗し、両辺の期待値をとると、

$$E[(Y_t-\phi_1 Y_{t-1}-\phi_2 Y_{t-2})^2]=E[(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1})^2]$$

より、

$$E\left[{Y_t}^2\right]+{\phi_1}^2E\left[{Y_{t-1}}^2\right]+{\phi_2}^2E\left[{Y_{t-2}}^2\right]-2\phi_1E[Y_tY_{t-1}]+2\phi_1\phi_2E[Y_{t-1}Y_{t-2}]-2\phi_2E[Y_tY_{t-2}]$$
$$=E[{\varepsilon_t}^2]-2\theta_1E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}]+{\theta_1}^2E[{\varepsilon_{t-1}}^2]$$

が成り立つので、

$$\frac{\sigma^2}{\gamma_0}=\frac{\left(1+{\phi_1}^2+{\phi_2}^2\right)+2\phi_1(\phi_2-1)\rho_1-2\phi_2\rho_2}{1+{\theta_1}^2}\quad\cdots\cdots\quad(\mathrm{II})$$

となる。

次に、(I)において、t を $t+1$ とした Y_{t+1}に関する式の両辺に Y_t を乗じ、両辺の期待値をとると、

$$E[Y_tY_{t+1}]=E\left[\phi_1{Y_t}^2+\phi_2Y_{t-1}Y_t+\varepsilon_{t+1}Y_t-\theta_1\varepsilon_tY_t\right]$$

より、

$$\rho_1=\frac{\phi_1}{1-\phi_2}-\frac{\theta_1\sigma^2}{(1-\phi_2)\gamma_0}\quad\cdots\cdots\quad(\mathrm{III})$$

となる。

同様に、(I)において、t を $t+2$ とした Y_{t+2} に関する式の両辺に Y_t を乗じ、両辺の期待値をとると、

$$\rho_2=\phi_1\rho_1+\phi_2\quad\cdots\cdots\quad(\mathrm{IV})$$

となる。

(II)、(III)、(IV)より ρ_1 を求めると、

$$\rho_1=\frac{\phi_1}{1-\phi_2}-\frac{\theta_1}{1-\phi_2}\times\frac{\left(1+{\phi_1}^2+{\phi_2}^2\right)+2\phi_1(\phi_2-1)\rho_1-2\phi_2(\phi_1\rho_1+\phi_2)}{1+{\theta_1}^2}$$

より、

$$\rho_1=\frac{(1+{\theta_1}^2)\phi_1-(1+{\phi_1}^2-{\phi_2}^2)\theta_1}{(1-\phi_2)\left(1+{\theta_1}^2\right)-2\phi_1\theta_1}$$

となる。

$\rho_h\ (h=3,4,\cdots)$ については、(I)において、t を $t+h$ とした Y_{t+h} の両辺に Y_t を乗じ、両辺の期待値をとると、

$$\rho_h=\phi_1\rho_{h-1}+\phi_2\rho_{h-2}$$

なる関係式が成り立つため、これより ρ_h を具体的に求めていくことができる。

よって、解答は　①（**T**）　②（**I**）　③（**F**）　④（**A**）　⑤（**E**）　⑥（**M**）　⑦（**C**）　⑧（**O**）　⑨（**F**）　⑩（**B**）　⑪（**A**）　⑫（**S**）　⑬（**L**）　⑭（**F**）　⑮（**F**）　⑯（**N**）　（⑨と⑩、⑮と⑯は順不同）

（２）$\phi_1 = 0.5,\ \phi_2 = 0.2,\ \theta_1 = 0.3,\ \sigma^2 = 0.1$ より、（１）の結果から、

$$\rho_1 = \frac{0.5 \times (1 + 0.3^2) - 0.3 \times (1 + 0.5^2 - 0.2^2)}{(1 - 0.2)(1 + 0.3^2) - 2 \times 0.5 \times 0.3} = 0.31818181818 \ldots . \fallingdotseq 0.32$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 = 0.5 \times 0.32 + 0.2 = 0.36$$

$$\rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 = 0.5 \times 0.36 + 0.2 \times 0.32 = 0.244 \fallingdotseq 0.24$$

$$\gamma_0 = \frac{\left(1 + {\theta_1}^2\right)\sigma^2}{1 + {\phi_1}^2 - {\phi_2}^2 - 2\phi_1\rho_1} = \frac{(1 + 0.3^2) \times 0.1}{1 + 0.5^2 - 0.2^2 - 2 \times 0.5 \times 0.32} = 0.12247191011 \ldots \fallingdotseq 0.12$$

よって、解答は　⑰　**（Ｈ）**　⑱　**（Ｉ）**　⑲　**（Ｆ）**　⑳　**（Ｃ）**

問題３.

（１）確率変数 X に対して、X の特性関数 $\varphi(t)$ は

$$\varphi(t) = E[\, e^{itX}\,]$$

と表せる。

特性関数は積率母関数とほぼ同じ性質も持つが、特性関数において t がとりうる必要条件としての範囲はすべての実数であるという点で、積率母関数よりも優れている。

いま、確率変数 X は $\{0,1,2,3,4,\cdots,99\}$ という値をそれぞれ $\frac{1}{100}$ の確率でとるものとする。

この確率変数 X に対して特性関数 $\varphi(t)$ を求めると、

$$\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right] = \frac{1}{100}\left(1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{99it}\right) = \frac{1}{100}\frac{1 - e^{100it}}{1 - e^{it}}$$

である。

よって、<u>解答は　①　（Ｄ）　②　（Ａ）　③　（Ｊ）</u>

（２）確率変数 X の期待値 μ が存在するとき、その特性関数 $\varphi(t)$ について

$$\varphi(t) = 1 + it\mu + o(t)$$

が成り立つことを X が連続的な場合および離散的な場合のそれぞれで示す。

（ア）X が連続的な場合について、その確率密度関数を $f(x)$ とする。

$\varphi(t)$ および μ についてその定義より、

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

であるので、

$$\varphi(t) - (1 + i\mu t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} itx f(x)dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - itx\right) f(x)dx$$

ここで公式

$$g(x) - g(0) = \int_0^x g'(u)du$$

を $g(x) = e^{itx}$ に適用すれば（この公式は実変数の複素数値関数に対しても適用できる）

$$e^{itx} - 1 = it\int_0^x e^{itu}du$$

であるので、

$$e^{itx} - 1 - itx = it\left\{\int_0^x e^{itu}du - x\right\} = it\left\{\int_0^x e^{itu}du - \int_0^x du\right\} = it\int_0^x \left(e^{itu} - 1\right)du = it \times R$$

とおけば（$t = 0$ のときは $R = 0$ とする)、三角不等式より

$$|R| \le \int_0^{|x|} \left|e^{\pm itu}-1\right| du \le \int_0^{|x|} \left(\left|e^{\pm itu}\right|+1\right) du = 2\int_0^{|x|} du = 2|x|$$

が成り立つ。
ところで仮定から、$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ が存在するから、$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$ 。
したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな $\xi > 0$ をとれば

$$\int_{|x|>\xi} |x|f(x)dx < \varepsilon \quad \cdots\text{（A）}$$

とすることができる。

この ξ に対して $|x| \le \xi$, $|t| < \frac{2\varepsilon}{\xi^2}$ ならば、x が実数のとき、$\left|e^{ix}-1\right| \le |x|$が成り立つことを用いて、

$$|R| \le \int_0^{|x|} \left|e^{\pm itu}-1\right| du \le \int_0^{|x|} |tu| du \le \frac{|t|\xi^2}{2} < \varepsilon \quad \cdots\text{（B）}$$

よって、$|t| < \frac{2\varepsilon}{\xi^2}$ であれば、（A）と（B）を用いて

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)-(1+\ it\mu)| &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itx}-1-itx\right| f(x)dx \\
&= |t| \int_{-\infty}^{\infty} |R|\, f(x)dx \\
&= |t| \left(\int_{|x|>\xi} |R|\, f(x)dx + \int_{|x|\le\xi} |R|\, f(x)dx \right) \\
&\le |t| \left(\int_{|x|>\xi} 2|x|\, f(x)dx + \int_{|x|\le\xi} \varepsilon f(x)dx \right) \\
&< 3\varepsilon \times |t|
\end{aligned}$$

つまり、任意の ε に対して、$0 < |t| < \frac{2\varepsilon}{\xi^2}$ ならば、

$$\left| \frac{1}{t} \{\varphi(t)-(1+\ it\mu)\} \right| < 3\varepsilon$$

となる。
よって、$t \to 0$ のとき

$$\frac{1}{t} \times \ \{\varphi(t)-(1+\ it\mu)\} \to 0$$

となるから、

$$\varphi(t) = 1 + \ it\mu + o(t)$$

が得られた。

よって、解答は　④（**D**）　⑤（**F**）　⑥（**L**）　⑦（**D**）　⑧（**F**）　⑨（**B**）　⑩（**C**）
⑪（**O**）　⑫（**E**）　⑬（**A**）　⑭（**B**）　⑮（**D**）　⑯（**L**）　⑰（**C**）

（イ） X が離散的な場合（X のとりうる値は、$a_1, a_2, \cdots$ と書く）について、その確率分布を $\{f(a_k)\}$ とする。（ア）のときと同様に、 $\varphi(t)$ および μ の定義より、

$$\varphi(t)-(1+it\mu)=\sum_k \left(e^{ita_k}-1-ita_k\right) f(a_k)$$

ところで仮定から、 $\mu=E[X]$ が存在するから、

$$\sum_k |a_k| f(a_k)<\infty$$

したがって、任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な番号 N を選べば

$$\sum_{k \geq N+1} |a_k| f(a_k)<\varepsilon$$

とすることができる。ところで、

$$e^{ita_k}-1-ita_k=it \times R_k$$

とおけば（$t=0$ のときは $R_k=0$ とする）、（ア）と同様に、三角不等式より、

$$|R_k| \leq 2|a_k|$$

となること、および $M=\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|)$ として、$k \leq N$, $|t| \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}$ のとき

$$|R_k|<\varepsilon$$

が成り立つことが連続的な場合と同様にわかる。

ゆえにこのとき、

$$|\varphi(t)-(1+it\mu)| \leq |t| \sum_k |R_k| f(a_k) \leq |t| \left(\sum_{k \geq N+1} 2|a_k| f(a_k)+\sum_{k \leq N} \varepsilon f(a_k) \right)<3\varepsilon \times |t|$$

よって、（ア）の場合と同様にして、 $t \to 0$ のとき

$$\frac{1}{t} \times \ \{\varphi(t)-(1+\ it\mu)\} \to 0$$

となるから、

$$\varphi(t)=1+it\mu+o(t)$$

が得られた。

よって、解答は　⑱　**（L）**　⑲　**（F）**　⑳　**（B）**　㉑　**（A）**　㉒　**（N）**

（３）$X_1, X_2, \cdots$ は同じ確率分布を持つ独立な確率変数列であり、各 $X_m (m=1,2,\cdots)$ は $\{0,1,2,3,4,\cdots,99\}$ という値をそれぞれ $\frac{1}{100}$ の確率でとるものとする。

$$Y_n=\sum_{m=1}^{n} \frac{X_m}{100^m}$$

とおくと、まず、各 X_m の特性関数 $\varphi(t)$ は（１）での計算結果を利用して、

$$\varphi(t)=E\left[e^{itX_m}\right]=\frac{1}{100} \frac{1-e^{100it}}{1-e^{it}}$$

よって、$\tilde{X}_m = \dfrac{X_m}{100^m}$ の特性関数 $\tilde{\varphi}_m(t)$ は、

$$\tilde{\varphi}_m(t) = E\left[e^{it\tilde{X}_m}\right] = E\left[e^{itX_m \cdot 100^{-m}}\right] = \varphi(t \cdot 100^{-m}) = \frac{1}{100}\frac{1-e^{it\cdot 100^{-(m-1)}}}{1-e^{it\cdot 100^{-m}}}$$

Y_nの特性関数 $\varphi_n(t)$ は、

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \tilde{\varphi}_1(t)\tilde{\varphi}_2(t)\cdots\tilde{\varphi}_n(t)\\ &= \left(\frac{1}{100}\frac{1-e^{it\cdot 100^{0}}}{1-e^{it\cdot 100^{-1}}}\right)\left(\frac{1}{100}\frac{1-e^{it\cdot 100^{-1}}}{1-e^{it\cdot 100^{-2}}}\right)\cdots\left(\frac{1}{100}\frac{1-e^{it\cdot 100^{-(n-1)}}}{1-e^{it\cdot 100^{-n}}}\right)\\ &= \frac{1}{100^n}\frac{1-e^{it}}{1-e^{it\cdot 100^{-n}}}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}100^n\left(1-e^{it\cdot 100^{-n}}\right) &= 100^n\left\{1-\left\{1+\frac{it\cdot 100^{-n}}{1!}+\frac{(it\cdot 100^{-n})^2}{2!}+\frac{(it\cdot 100^{-n})^3}{3!}+\cdots\right\}\right\}\\ &= -\left\{\frac{it}{1!}+\frac{(it)^2\cdot 100^{-n}}{2!}+\frac{(it)^3\cdot 100^{-2n}}{3!}+\cdots\right\}\end{aligned}$$

であるので、$n\to\infty$ のとき、

$$\varphi_n(t) \to \frac{1-e^{it}}{-it} = \frac{e^{it}-1}{it}$$

である。

$$E[Y_n] = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{100^m}E[X_m] = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{100^m}\times\frac{0+1+\cdots+99}{100} = \frac{99}{2}\times\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{100^m}$$

よって、$n\to\infty$ のとき

$$E[Y_n] \to \frac{99}{2}\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{100^m} = \frac{99}{2}\times\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{2}$$

である。ここで、任意の複素数 z に対して、

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}$$

となることを用いて $n\to\infty$ のとき、

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) \to \frac{e^{it}-1}{it} &= \frac{1}{it}\left\{\left(\frac{(it)^0}{0!}+\frac{(it)^1}{1!}+\frac{(it)^2}{2!}+\frac{(it)^3}{3!}+\cdots\right)-1\right\}\\ &= 1+\frac{1}{2}it+\frac{1}{6}(it)^2+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}it+o(t)\end{aligned}$$

となり、（２）で示した式に基づいて計算した結果と一致することが分かる。

よって、解答は　㉓（Ｎ）　㉔（Ｅ）　㉕（Ｄ）　㉖（Ｊ）

問題４.

（１）ある母集団の母集団分布は、未知の母数 θ を持つ確率密度関数 $f(x;\theta)$ で与えられているとする。いま、帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$ を対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1\ (\neq \theta_0)$ に対して検定するために、大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をこの母集団から無作為に抽出したとする。

$0 < \varepsilon < 1$ を満たす実数 ε に対して、第 1 種の誤りの起こる確率

$$\int \cdots \int_R \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\, dx_1 \cdots dx_n$$

が ε になるように棄却域 R を定めようとすると、R の定め方はいろいろとあるが、このようなものの中で、さらに第 2 種の誤りの起こる確率

$$1 - \int \cdots \int_R \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\, dx_1 \cdots dx_n$$

が最小になるように棄却域 R を選び、これを改めて R^* と書く。そして、

標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in R^*$ 　ならば　H_0 を棄却し、

標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \notin R^*$ 　ならば　H_0 を採択する。

こうして定められた棄却域 R^* は有意水準 ε の最良棄却域とよばれ、これを棄却域とする検定法を、最有力検定法という。

上記で述べた最有力検定法を作るには、

$$領域\quad R_k = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \middle| \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)} \geq k \right\} \cdot\cdot\cdot \text{(A)}$$

とおき、

$$\int \cdots \int_{R_k} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\, dx_1 \cdots dx_n = \varepsilon \cdot\cdot\cdot \text{(B)}$$

となるように定数 k と領域 R_k を定めると、この R_k が有意水準 ε の最良棄却域 R^* となる。これを、ネイマン・ピアソン（Neyman-Pearson）の定理という。

実際、ネイマン・ピアソンの定理が成り立つことを証明しよう。

まず、(A) および (B) をともに満たす領域 R_k を改めて R^* 、(B) を満たす任意の領域 R_k を改めて R とそれぞれ書き、

$$r^* = 1 - \int \cdots \int_{R^*} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$r = 1 - \int \cdots \int_{R} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\, dx_1 \cdots dx_n$$

とおく。

$$\begin{aligned} r^* - r = &\int \cdots \int_{R-(R\cap R^*)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\, dx_1 \cdots dx_n + \int \cdots \int_{R\cap R^*} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\, dx_1 \cdots dx_n \\ &- \int \cdots \int_{R^*-(R\cap R^*)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\, dx_1 \cdots dx_n - \int \cdots \int_{R\cap R^*} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\, dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

$$= \int \cdots \int_{R-(R\cap R^*)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\,dx_1 \cdots dx_n - \int \cdots \int_{R^*-(R\cap R^*)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\,dx_1 \cdots dx_n$$

したがって、(A) より、

$$\text{領域}\quad R-(R\cap R^*)\quad \text{上では}\quad \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)} < k$$

$$\text{領域}\quad R^*-(R\cap R^*)\quad \text{上では}\quad \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)} \geq k$$

であるから、

$$\begin{aligned}
r^* - r &< k\left\{\int \cdots \int_{R-(R\cap R^*)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\,dx_1 \cdots dx_n - \int \cdots \int_{R^*-(R\cap R^*)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\,dx_1 \cdots dx_n\right\} \\
&= k\left\{\int \cdots \int_{R-(R\cap R^*)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\,dx_1 \cdots dx_n + \int \cdots \int_{R\cap R^*} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\,dx_1 \cdots dx_n\right. \\
&\qquad \left. - \int \cdots \int_{R^*-(R\cap R^*)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\,dx_1 \cdots dx_n - \int \cdots \int_{R\cap R^*} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\,dx_1 \cdots dx_n\right\} \\
&= k\left\{\int \cdots \int_{R} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\,dx_1 \cdots dx_n - \int \cdots \int_{R^*} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\,dx_1 \cdots dx_n\right\} \\
&= k(\varepsilon - \varepsilon) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、R^* が最良棄却域であることが分かる。

よって、解答は　①（**B**）　②（**H**）　③（**F**）　④（**B**）　⑤（**A**）　⑥（**H**）　⑦（**B**）　⑧（**E**）　⑨（**F**）　⑩（**A**）

（２）いま、平均 $\frac{1}{\theta}$ $(\theta > 0)$ の指数分布に従う母集団から、大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を無作為に抽出し、帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$ を対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1\ (< \theta_0)$ に対して検定することを考える。
ネイマン・ピアソンの定理より、最良棄却域 R_k は

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)} \geq k$$

なる不等式を満たす領域であるから、この不等式は、

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n e^{-(\theta_1-\theta_0)(x_1+x_2+\cdots+x_n)} \geq k$$

と書けるので、両辺の対数をとると、

$$n\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) - (\theta_1-\theta_0)(x_1+x_2+\cdots+x_n) \geq \log k$$

となる。$\theta_1 < \theta_0$ より、

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq \frac{\log\left\{k\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right\}}{\theta_0-\theta_1}$$

が成り立つ。

大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の和、$X_1+X_2+\cdots+X_n$ の積率母関数を $m_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t)$ とすると、$\theta > t$ に対し、

$$m_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = E\left[e^{(X_1+X_2+\cdots+X_n)t}\right] = \{E[e^{X_1 t}]\}^n = \left\{\int_0^\infty e^{xt}\theta e^{-\theta x}\,dx\right\}^n = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^n$$

一方、確率変数 Z の確率密度関数を

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\theta^n z^{n-1} e^{-\theta z} & (z>0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases}$$

として定めると、Z の積率母関数 $m_Z(t)$ は、

$$m_Z(t) = E[e^{Zt}] = \int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{(n-1)!}\theta^n z^{n-1}e^{-\theta z}\,dz = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^n$$

であるから、$X_1+X_2+\cdots+X_n$ と Z の確率分布は同分布となる。したがって、大きさ n の標本の和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ は、確率密度関数 $g(z)$ を持つ確率分布に従うことが分かる。

よって、$X_1+X_2+\cdots+X_n$ の分布関数は、$c>0$ に対し、

$$\begin{aligned} P(X_1+X_2+\cdots+X_n \leq c) &= \int_0^c \frac{1}{(n-1)!}\theta^n z^{n-1}e^{-\theta z}\,dz \\ &= -\frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!}c^{n-1}e^{-\theta c} + \int_0^c \frac{1}{(n-2)!}\theta^{n-1}z^{n-2}e^{-\theta z}\,dz \end{aligned}$$

と書けるので、これを繰り返していくと、

$$\begin{aligned} P(X_1+X_2+\cdots+X_n \leq c) &= -\frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!}c^{n-1}e^{-\theta c} - \frac{\theta^{n-2}}{(n-2)!}c^{n-2}e^{-\theta c} - \cdots - \theta c e^{-\theta c} - e^{-\theta c} + 1 \\ &= 1 - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(\theta c)^s}{s!}e^{-\theta c} \end{aligned}$$

と書くことができる。

よって、解答は ⑪ **（C）** ⑫ **（A）** ⑬ **（C）** ⑭ **（A）** ⑮ **（G）** ⑯ **（C）** ⑰ **（J）**

（３）（２）の結果を用い、$n=4, \theta_0=5, \theta_1=1, k=16$ のときの最良棄却域 R_k による有意水準 ε を求める。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= P\left(X_1+X_2+\cdots+X_n \geq \frac{\log\left\{k\left(\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right\}}{\theta_0-\theta_1} \,\middle|\, \theta=\theta_0\right) \\ &= 1 - P\left(X_1+X_2+\cdots+X_n \leq \frac{\log\left\{k\left(\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right\}}{\theta_0-\theta_1} \,\middle|\, \theta=\theta_0\right) \end{aligned}$$

が求める有意水準となるので、$n=4, \theta_0=5, \theta_1=1, k=16$ とすると、

$$\frac{\log\left\{k\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right\}}{\theta_0-\theta_1}=\frac{\log(16\times 5^4)}{5-1}=\frac{\log(2^4\times 5^4)}{4}=\frac{4\log 10}{4}=\log 10$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1-\left(1-e^{-5\log 10}\sum_{s=0}^{3}\frac{(5\log 10)^s}{s!}\right)\\ &= e^{-5\log 10}\sum_{s=0}^{3}\frac{(5\log 10)^s}{s!}\\ &= 10^{-5}\times\left\{1+5\log 10+\frac{(5\log 10)^2}{2!}+\frac{(5\log 10)^3}{3!}\right\}\\ &= 0.00001\times(1+11.513+66.274\ldots+254.339\ldots)\\ &= 0.00333\ldots\end{aligned}$$

となるので、求める有意水準に最も近い数値は、$\varepsilon=0.33\%$ となる。

よって、解答は　⑱　**（H）**　⑲　**（C）**

問題１.

（１）		**（Ｅ）**	５点	（８）	①	**（Ｉ）**	１点
（２）		**（Ｆ）**	５点		②	**（Ｉ）**	２点
（３）	①	**（Ｈ）**	２点		③	**（Ｄ）**	１点
	②	**（Ｃ）**	３点		④	**（Ｂ）**	１点
（４）	①	**（Ｃ）**	２点	（９）	①	**（Ｇ）**	２点
	②	**（Ｄ）**	１点		②	**（Ａ）**	２点
	③	**（Ｇ）**	２点		③	**（Ｄ）**	１点
（５）	①	**（Ｈ）**	２点	（１０）	①	**（Ｆ）**	２点
	②	**（Ｈ）**	３点		②	**（Ａ）**	１点
（６）	①	**（Ｆ）**	２点		③	**（Ｉ）**	２点
	②	**（Ｉ）**	１点	（１１）	①	**（Ｇ）**	３点
	③	**（Ａ）**	２点		②	**（Ｊ）**	２点
（７）	①	**（Ｇ）**	２点	（１２）	①	**（Ｈ）**	２点
	②	**（Ｉ）**	３点		②	**（Ｆ）**	２点
					③	**（Ｇ）**	完答で１点
					④	**（Ｃ）**	

問題２.

（１）	①	**（Ｔ）**	完答で２点	（１）	⑪	**（Ａ）**	完答で１点
	②	**（Ｉ）**			⑫	**（Ｓ）**	
	③	**（Ｆ）**			⑬	**（Ｌ）**	
	④	**（Ａ）**			⑭	**（Ｆ）**	
	⑤	**（Ｅ）**	完答で２点		⑮	**（Ｆ）**	完答で１点 ⑮⑯は順不同
	⑥	**（Ｍ）**			⑯	**（Ｎ）**	
	⑦	**（Ｃ）**		（２）	⑰	**（Ｈ）**	完答で１点
	⑧	**（Ｏ）**			⑱	**（Ｉ）**	
	⑨	**（Ｆ）**	完答で２点 ⑨⑩は順不同		⑲	**（Ｆ）**	完答で１点
	⑩	**（Ｂ）**			⑳	**（Ｃ）**	

問題３.

（１）	①	（Ｄ）	１点	（２）	⑬	（Ａ）	完答で１点
	②	（Ａ）	１点		⑭	（Ｂ）	
	③	（Ｊ）	３点		⑮	（Ｄ）	
（２）	④	（Ｄ）	完答で２点		⑯	（Ｌ）	
	⑤	（Ｆ）			⑰	（Ｃ）	
	⑥	（Ｌ）			⑱	（Ｌ）	完答で１点
	⑦	（Ｄ）			⑲	（Ｆ）	
	⑧	（Ｆ）	完答で１点		⑳	（Ｂ）	１点
	⑨	（Ｂ）			㉑	（Ａ）	完答で１点
	⑩	（Ｃ）	完答で１点		㉒	（Ｎ）	
	⑪	（Ｏ）		（３）	㉓	（Ｎ）	１点
	⑫	（Ｅ）			㉔	（Ｅ）	完答で１点
					㉕	（Ｄ）	
					㉖	（Ｊ）	

問題４.

（１）	①	（Ｂ）	１点	（２）	⑪	（Ｃ）	完答で１点
	②	（Ｈ）	１点		⑫	（Ａ）	
	③	（Ｆ）	１点		⑬	（Ｃ）	１点
	④	（Ｂ）	１点		⑭	（Ａ）	１点
	⑤	（Ａ）	１点		⑮	（Ｇ）	完答で１点
	⑥	（Ｈ）	完答で１点		⑯	（Ｃ）	
	⑦	（Ｂ）			⑰	（Ｊ）	
	⑧	（Ｅ）	１点	（３）	⑱	（Ｈ）	１点
	⑨	（Ｆ）	１点		⑲	（Ｃ）	１点
	⑩	（Ａ）	１点				

以上