# 数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

**問題１．** 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（１）白玉9個と赤玉1個が入った箱 A と、白玉と赤玉が5個ずつ入った箱 B がある。いま、以下のルール1およびルール2に従って、いずれか一方の箱から玉を１つ取り出し、色を確認したあとに玉を元に戻す試行を繰り返し行う。このとき、赤玉を 4 回取り出すまでに行った抽出回数の期待値は$\boxed{\phantom{xxxx}}$である。なお、箱 A、箱 B ともに、入っている玉を取り出す確率は互いに等しいものとする。

ルール1：1回目の抽出は箱 A から行う。
ルール2：$i+1$回目（$i \geq 1$）の抽出は、$i$ 回目の抽出で取り出した玉が白玉の場合は箱 A から、赤玉の場合は箱 B から行う。

（Ａ） 28.0　（Ｂ） 28.5　（Ｃ） 29.0　（Ｄ） 29.5　（Ｅ） 30.0

（Ｆ） 30.5　（Ｇ） 31.0　（Ｈ） 31.5　（Ｉ） 32.0　（Ｊ） 32.5

（２）区間 (0.5,6.5) 上の一様分布に従う確率変数を$X$とし、$X$ の小数点以下第１位を四捨五入して整数にしたものを確率変数 $Y$ とする。
このとき、$Y$ の平均 $E[Y] =$$\boxed{①}$、分散$V[Y] =$$\boxed{②}$であり、
$X, Y$ の共分散$Cov[X, Y] =$$\boxed{③}$である。

（Ａ）$\frac{35}{36}$　（Ｂ）$\frac{35}{24}$　（Ｃ）$\frac{7}{4}$　（Ｄ）$\frac{35}{12}$　（Ｅ）$\frac{7}{2}$

（Ｆ）$\frac{35}{6}$　（Ｇ）$\frac{91}{12}$　（Ｈ）$\frac{35}{3}$　（Ｉ）$\frac{49}{4}$　（Ｊ）$\frac{91}{6}$

（３）確率変数 $X$、$Y$ は互いに独立で、それぞれ平均$2\lambda$, $\dfrac{1}{3\lambda}$ $(\lambda > 0)$ の指数分布に従うとき確率変数 $Z = e^{\frac{X}{Y}}$ の確率密度関数は

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\boxed{\text{①}}}{\boxed{\text{②}}} & (z > 1) \\ 0 & (z \leq 1) \end{cases}$$

である。

[①の選択肢]

（Ａ）$1$　（Ｂ）$e^{z}$　（Ｃ）$e^{-z}$　（Ｄ）$1.5\lambda^2 e^{-z}$　（Ｅ）$1.5$

（Ｆ）$1.5e^{z}$　（Ｇ）$1.5e^{-z}$　（Ｈ）$6\lambda^2$　（Ｉ）$6\lambda^2 e^{z}$　（Ｊ）$6\lambda^2 e^{-z}$

[②の選択肢]

（Ａ）$z(1.5e^{z}+1)^2$　（Ｂ）$(1.5e^{z}+1)^2$　（Ｃ）$z(6\lambda^2 e^{z}+1)^2$

（Ｄ）$(6\lambda^2 e^{z}+1)^2$　（Ｅ）$z(\log z+1.5)^2$　（Ｆ）$(\log z+1.5)^2$

（Ｇ）$z(\log z+6\lambda^2)^2$　（Ｈ）$(\log z+6\lambda^2)^2$　（Ｉ）$(1.5z+1)^2$

（Ｊ）$(6\lambda^2 z+1)^2$

（4）区間 (0, 1) から無作為に実数を抽出する試行を考える。

（ア）個々の実数について、小数点以下第 1 位を四捨五入した場合の値と小数点以下第 1 位を七捨八入した場合の値の差の期待値に最も近い値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、値の差の分散に最も近い値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（イ）900個の実数を抽出し、その合計をとることを考える。個々の実数について小数点以下第 1 位を四捨五入してから合計する場合と、小数点以下第 1 位を七捨八入してから合計する場合を比較し、合計の差の絶対値が$\alpha$を超えない確率が0.85以上となるような最小の整数$\alpha$を中心極限定理を用いて求めると、$\alpha$に最も近い値は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。

[①、②の選択肢]

（A）0.21　（B）0.24　（C）0.27　（D）0.30　（E）0.33

（F）0.36　（G）0.39　（H）0.42　（I）0.45　（J）0.48

[③の選択肢]

（A）245　（B）250　（C）255　（D）260　（E）265

（F）270　（G）275　（H）280　（I）285　（J）290

（５）パラメータ $\alpha > 0$ , $0 < p < 1$ の負の二項分布

$$P(X = k) = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^{\alpha}(1 - p)^{k} \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

に従う母集団から次の標本値を得た。モーメント法によりパラメータ $\alpha$ 、$p$ を推定すると、$\alpha$ に最も近い数値は［　①　］であり、$p$ に最も近い数値は［　②　］である。

2,　8,　3,　12,　16,　26,　12,　14,　1,　6

[①の選択肢]

（A）1.7　（B）1.8　（C）1.9　（D）2.0　（E）2.1

（F）2.2　（G）2.3　（H）2.4　（I）2.5　（J）2.6

[②の選択肢]

（A）0.17　（B）0.18　（C）0.19　（D）0.20　（E）0.21

（F）0.22　（G）0.23　（H）0.24　（I）0.25　（J）0.26

（６）正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母平均 $\mu$ を信頼係数 95% で区間推定したとき、信頼区間の幅が $1.5\sigma$ より小さくなる確率が 95% 以上であるための最小の標本数は［　　　］である。
ただし、母分散 $\sigma^2$ は未知とする。

（A）10　（B）11　（C）12　（D）13　（E）14

（F）15　（G）16　（H）17　（I）18　（J）19

（７）互いに独立な 2 つの正規母集団 $N(\mu_X, 43)$ 、$N(\mu_Y, 392)$ がある。正規母集団 $N(\mu_X, 43)$ からの大きさ $n$ の標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とし、その標本平均を $\bar{X}$ とする。また、正規母集団 $N(\mu_Y, 392)$ からの大きさ $n$ の標本を $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ とし、その標本平均を $\bar{Y}$ とする。
いま、帰無仮説 $H_0$：$\mu_Y = \mu_X$ を対立仮説 $H_1$：$\mu_Y = \mu_X + 5$ に対して検定する。棄却域 $W$ は、ある定数 $c$ を用いて $W = \{\bar{Y} - \bar{X} > c\}$ で与えられるとする。第 1 種の誤りの起こる確率が 0.05 、第 2 種の誤りの起こる確率が 0.15 であるとき、標本の大きさ $n$ に最も近い数値は$\boxed{\phantom{00000}}$である。

（**A**）87　（**B**）100　（**C**）112　（**D**）125　（**E**）137

（**F**）150　（**G**）162　（**H**）175　（**I**）187　（**J**）200

（８）ある生産ラインにおける工業製品の重量は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。機械の老朽化等により重量が過大となっていないかについて、帰無仮説 $H_0$：$\mu = \mu_0$ を対立仮説 $H_1$：$\mu > \mu_0$ に対して、有意水準 5% で検定する。平均が $\mu_0$ より 10% 以上増加したとき、これを検出できる確率が 99% 以上であるためには、標本の大きさを$\boxed{\phantom{00000}}$以上とすればよい。
ただし、標準偏差は $\sigma = 0.143\mu_0$ とする。

（**A**）30　（**B**）31　（**C**）32　（**D**）33　（**E**）34

（**F**）35　（**G**）36　（**H**）37　（**I**）38　（**J**）39

（9）$(x, y)$のデータが下表のとおり与えられている。係数ダミーを用いて$t$が偶数の場合と奇数の場合で係数$\beta$を変えた回帰式 $y = \alpha + \beta x$ を推定する。
このとき、$\alpha$に最も近い数値は$\boxed{\quad ① \quad}$である。また、$\beta$に最も近い数値は、$t$が偶数の場合は$\boxed{\quad ② \quad}$であり、$t$が奇数の場合は$\boxed{\quad ③ \quad}$である。

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 21 | 18 | 15 | 22 |
| $x$ | 2 | $-1$ | $-2$ | 1 |

［①の選択肢］

（A） 16　（B） 17　（C） 18　（D） 19　（E） 20

（F） 21　（G） 22　（H） 23　（I） 24　（J） 25

［②、③の選択肢］

（A）0.50　（B）0.75　（C）1.00　（D）1.25　（E）1.50

（F）1.75　（G）2.00　（H）2.25　（I）2.50　（J）2.75

（１０）定常$AR(2)$モデル

$Y_t = 1.5 + 0.9Y_{t-1} - 0.14Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (E[\varepsilon_t] = 0, V[\varepsilon_t] = 0.6)$

を$MA(\infty)$モデル$(Y_t = \xi_0 + \varepsilon_t + \xi_1\varepsilon_{t-1} + \xi_2\varepsilon_{t-2} + \xi_3\varepsilon_{t-3} \ldots)$として表現したとき、

$\xi_0 = \boxed{①}$

$$\xi_i = \frac{1}{\boxed{②}}\left(\boxed{③}^{i+1} - \boxed{④}^{i+1}\right) \quad (i = 1,2,3,\ldots)$$

である。

さらに上記のモデルについて、条件付分散$V\left[Y_{t+5}\middle|Y_t, Y_{t-1}, \ldots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1,} \ldots\right]$（時刻$t$までの時系列データが与えられている場合における$Y_{t+5}$の分散）に最も近い値は$\boxed{⑤}$である。

[①の選択肢]

（Ａ）6.00　（Ｂ）6.25　（Ｃ）6.50　（Ｄ）6.75　（Ｅ）7.00

（Ｆ）7.25　（Ｇ）7.50　（Ｈ）7.75　（Ｉ）8.00　（Ｊ）8.25

[②、③、④の選択肢]

（Ａ）0.1　（Ｂ）0.2　（Ｃ）0.3　（Ｄ）0.4　（Ｅ）0.5

（Ｆ）0.6　（Ｇ）0.7　（Ｈ）0.8　（Ｉ）0.9　（Ｊ）1.0

[⑤の選択肢]

（Ａ）1.48　（Ｂ）1.52　（Ｃ）1.56　（Ｄ）1.60　（Ｅ）1.64

（Ｆ）1.68　（Ｇ）1.72　（Ｈ）1.76　（Ｉ）1.80　（Ｊ）1.84

（１１）ある四角形$ABCD$は各頂点が互いに線でつながれている。点$P$が無作為に選んだいずれかの頂点から出発し、以下のルールに従って頂点間を移動するものとする。

・ルール①：頂点$A$または頂点$B$にいる場合、点$P$は移動せずにその頂点にとどまる。

・ルール②：頂点$C$にいる場合、1分後に次の確率で移動する。

頂点$C$から$A$へ…$\frac{1}{3}$ 、 頂点$C$から$B$へ…$\frac{1}{6}$、 頂点$C$にとどまる…$\frac{1}{2}$

・ルール③：頂点$D$にいる場合、1分後に次の確率で移動する。

頂点$D$から$A$へ…$\frac{4}{15}$ 、頂点$D$から$B$へ…$\frac{1}{15}$、頂点$D$にとどまる…$\frac{2}{3}$

・ルール④：頂点$C$と頂点$D$の間を移動することはできない。

ア）3分後に観察したところ、頂点$B$に点$P$が位置していた。このとき、最初に点$P$が位置していた頂点が$C$であった確率に最も近い値は$\boxed{\quad ① \quad}$である。

イ）十分な時間をおいて観察したところ、頂点$A$に点$P$が位置していた。このとき、最初に点$P$が位置していた頂点が$C$であった確率に最も近い値は$\boxed{\quad ② \quad}$である。

【ヒント】

4行4列の行列$X$について左上の2行2列の行列が単位行列$E$、右上の2行2列の行列が零行列$O$である、すなわち、$X = \begin{pmatrix} E & O \\ U & R \end{pmatrix}$（$R$, $U$は2行2列の行列）と表される場合、$X^n = \begin{pmatrix} E & O \\ (E-R^n)(E-R)^{-1}U & R^n \end{pmatrix}$となる。

［①の選択肢］

（A）0.098　（B）0.116　（C）0.141　（D）0.174　（E）0.204

（F）0.272　（G）0.292　（H）0.323　（I）0.427　（J）0.668

［②の選択肢］

（A）0.079　（B）0.132　（C）0.200　（D）0.270　（E）0.324

（F）0.333　（G）0.395　（H）0.405　（I）0.667　（J）0.800

（１２）$\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$ を、区間 $(0,1)$ 上の 32 個の一様乱数 $U_1, U_2, \cdots, U_{32}$ を用いてモンテカルロシミュレーションしたときの誤差の分散に最も近い値は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、負の相関法により、$U_1, U_2, \cdots, U_{16}, 1-U_1, 1-U_2, \cdots, 1-U_{16}$ を用いてモンテカルロシミュレーションしたときの誤差の分散に最も近い値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。なお、必要であれば、$e = 2.718$ を用いてよい。

［①の選択肢］

（Ａ）0.050　（Ｂ）0.055　（Ｃ）0.060　（Ｄ）0.065　（Ｅ）0.070

（Ｆ）0.075　（Ｇ）0.080　（Ｈ）0.085　（Ｉ）0.090　（Ｊ）0.095

［②の選択肢］

（Ａ）0.001　（Ｂ）0.002　（Ｃ）0.003　（Ｄ）0.004　（Ｅ）0.005

（Ｆ）0.006　（Ｇ）0.007　（Ｈ）0.008　（Ｉ）0.009　（Ｊ）0.010

**問題２．** 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

クイズを全問正解するまで解答する試行を考える。このクイズについては次のことが分かっている。
・クイズは第1問から順に第$N$問まで出題される。($N \geq 2$)
・各問題には$M$個の選択肢が用意されており、このうち1つを選んで解答する。($M \geq 2$)
　なお、$M$個のうち正解はただ1つであり、その他の選択肢は不正解である。
・解答すると自動的に採点され、正解の場合は次の問題が出題される。
　ただし、不正解の場合は第1問が出題される。（つまり、不正解の場合は第1問から再度解答する。）
・一度解答した問題についてはその正解を知ることができる。
　また、第1問から再度解答する場合でも各問題は変更されず、毎回同じ問題が出題される。

なお、このクイズに第1問から解答することを「挑戦」と表現することとする。

（１）$A$さんはこのクイズに次の戦略で挑むこととした。

＜$A$さんの戦略＞
・どの問題も解答回数に関わらず$M$個の選択肢のうち1つを無作為に選び解答する。

このとき、$A$さんが全問正解するまでに要した挑戦の回数を表す確率変数を$X_A$とし、$X_A$の期待値、分散を求めたい。

まず、$k = 1,2,\cdots$とし、$X_A = k$となる確率$P(X_A = k)$を求める。

$X_A = 1$となる確率を考えると、

$P(X_A = 1) = \boxed{①}$

である。

また、$X_A = 2$となるのは、1回目の挑戦で全問正解せず、2回目の挑戦で初めて全問正解する場合であるから、

$P(X_A = 2) = \boxed{②} \times \boxed{③}$　（②と③の解答は順不同）

となる。

同様に考えると、$X_A = k$となる確率は、

$$P(X_A = k) = \left(\boxed{④}\right)^{\boxed{⑤}} \times \boxed{⑥}$$

と表せる。

以上より、$X_A$の期待値$E[X_A]$および分散$V[X_A]$は、

$E[X_A] = \boxed{⑦}$ 、$V[X_A] = \boxed{⑧}$

となる。

（２）$B$さんはこのクイズに次の戦略で挑むこととした。

| |
|---|
| ＜$B$さんの戦略＞<br>・初めて解答する問題については、$M$個の選択肢のうち1つを無作為に選び解答する。<br>・解答したことのある問題については、必ず正解を選び解答する。 |

このとき、$B$さんが全問正解するまでに要した挑戦の回数を表す確率変数を$X_B$とし、$X_B$の期待値を求めたい。

まず、$k = 1,2,\cdots$とし、$X_B = k$となる確率$P(X_B = k)$を求める。

初めに、$P(X_B = k) > 0$となる$k$の範囲を考えると、$B$さんの戦略から$1 \leq k \leq \boxed{⑨}$ となることが分かる。
また、定義より、$X_B = 1$となる確率は$X_A = 1$となる確率に等しいことから、

$P(X_B = 1) = \boxed{①}$

となる。

次に、$2 \leq k \leq \boxed{⑨}$ の場合を考える。
ここで、確率変数$Z_i (1 \leq i \leq k)$を次のとおり定義する。

・$i$回目の挑戦において第$n$問目で不正解となった場合、$Z_i = n\ (i \leq n \leq N)$
・$i$回目の挑戦において全問正解した場合、$Z_i = N + 1$

このとき、例えば、4回目の挑戦で第5問に不正解となった場合は$Z_4 = 5$となり、6回目の挑戦で全問正解した場合は$Z_6 = N + 1$となる。

さて、$X_B$の定義より、$X_B = k$となるのは「$B$さんがこのクイズに、1回目から$(k-1)$回目までの挑戦ではいずれも全問正解せず、$k$回目の挑戦で初めて全問正解する場合」である。
よって、まずは、

$$Z_s = n_s \quad (s = 1,2,\cdots,k-1)\ (1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} \leq N)$$

となる確率を考える。

まず、1回目の挑戦で第$n_1$問に不正解となる確率は、

$$P(Z_1 = n_1) = \left(\boxed{⑩}\right)^{\boxed{⑪}} \times \boxed{⑫}$$

と表せる。

次に、$2 \leq s \leq k-1\ (k \geq 3)$のとき、

$$P(Z_s = n_s | Z_{s-1} = n_{s-1},\cdots,Z_1 = n_1) = \left(\boxed{⑬}\right)^{\boxed{⑭}} \times \boxed{⑮}$$

と表せる。
よって、$Z_s = n_s \quad (s = 1,2,\cdots,k-1)\ (1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} \leq N)$となる確率は、

$$P(Z_{k-1} = n_{k-1}, Z_{k-2} = n_{k-2},\cdots,Z_1 = n_1) = \frac{\boxed{⑯}}{\boxed{⑰}} \quad \left(2 \leq k \leq \boxed{⑨}\right)$$

となる。

以上より、

$$P(X_B = k) = \boxed{⑱} \times \frac{\boxed{⑲}}{\boxed{⑳}} \quad \left(1 \leq k \leq \boxed{⑨}\right)$$

と表せる。

これより、$X_B$の期待値$E[X_B]$は、

$$E[X_B] = \boxed{㉑}$$

となる。

（３）$C$さんはこのクイズに次の戦略で挑むこととした。

＜$C$さんの戦略＞
・初めて解答する問題については、$M$個の選択肢のうち1つを無作為に選び解答する。
・解答したことのある問題については、第1問から第$N_0$問までは必ず正解を選び解答し、第$(N_0+1)$問から第$N$問までは解答回数に関わらず$M$個の選択肢のうち1つを無作為に選び解答する。$(1 \leq N_0 \leq N-1)$

このとき、$C$さんが全問正解するまでに要した挑戦の回数を表す確率変数を$X_C$とし、$X_C = k$となる確率を$P(X_C = k)$を求めたい。$(k = 1,2,\cdots)$
まず、定義より、$X_C = 1$となる確率は$X_A = 1$となる確率に等しいことから、

$$P(X_C = 1) = \boxed{①}$$

である。

次に、$X_C = 2$となる確率を考える。
1回目の挑戦で間違えた問題番号に着目すると、

$$P(X_C = 2) = \boxed{㉒} \times \left\{\boxed{㉓} + \boxed{㉔}\right\}$$

となる。

よって、$k > 2$の場合についても同様に考えると、$P(X_C = k)$は、
$1 \leq k \leq N_0 + 1$の場合、

$$P(X_C = k) = \sum_{j=0}^{k-1} \left\{\boxed{㉕} \times \boxed{㉖} \times \boxed{㉗}\right\}$$ （㉖と㉗の解答は順不同）

また、$k > N_0 + 1$の場合、

$$P(X_C = k) = \boxed{㉘} \times \boxed{㉙} \times \boxed{㉚}$$ （㉙と㉚の解答は順不同）

となる。

[①～④、⑥、⑩、⑫、⑬、⑮の選択肢]

| | | | |
|---|---|---|---|
| （A） $0$ | （B） $1$ | （C） $\frac{1}{M}$ | （D） $\frac{1}{M^{N-1}}$ |
| （E） $\frac{M-1}{M^{N-1}}$ | （F） $\frac{(M-1)^{N-1}}{M^{N-1}}$ | （G） $\frac{1}{M^N}$ | （H） $\frac{M-1}{M^N}$ |
| （I） $\frac{(M-1)^N}{M^N}$ | （J） $\frac{M-1}{M}$ | （K） $1-\frac{1}{M^{N-1}}$ | （L） $1-\frac{M-1}{M^{N-1}}$ |
| （M） $1-\frac{(M-1)^{N-1}}{M^{N-1}}$ | （N） $1-\frac{1}{M^N}$ | （O） $1-\frac{M-1}{M^N}$ | （P） $1-\frac{(M-1)^N}{M^N}$ |

[⑤、⑨の選択肢]

| | | | |
|---|---|---|---|
| （A） $k-2$ | （B） $k-1$ | （C） $k$ | （D） $k+1$ |
| （E） $N-k-1$ | （F） $N-k$ | （G） $N-k+1$ | （H） $N+k-1$ |
| （I） $N-1$ | （J） $N$ | （K） $N+1$ | （L） $N^2-1$ |
| （M） $N^2$ | （N） $N^2+1$ | （O） $N(N-1)$ | （P） $N(N+1)$ |

[⑦、⑧の選択肢]

| | | | |
|---|---|---|---|
| （A） $M^{N-1}-1$ | （B） $M^{N-1}$ | （C） $M^N-1$ | （D） $M^N$ |
| （E） $M^N+1$ | （F） $2M^N$ | （G） $M^{2N}$ | （H） $2M^{2N}-M^N$ |
| （I） $2M^{2N}+M^N$ | （J） $M^{2N}-1$ | （K） $M^{2N}+1$ | （L） $M^{2N}-M^N$ |

［⑪、⑭の選択肢］

（A）$n_1-2$　（B）$n_1-1$　（C）$n_1$　（D）$n_1+1$

（E）$N-n_1$　（F）$N-n_1+1$　（G）$Nn_1-1$　（H）$Nn_1$

（I）$n_s - n_{s-1}-1$　（J）$n_s - n_{s-1}$　（K）$n_s$　（L）$n_s-1$

（M）$n_{s-1}$　（N）$n_{s-1}-1$　（O）$n_{s-1}-n_1$　（P）$n_s-n_1$

［⑯、⑰、⑲、⑳の選択肢］

（A）$1$　（B）$(M-1)^{n_{k-1}-1}$　（C）$(M-1)^{n_{k-1}}$　（D）$(M-1)^{k-1}$

（E）$(M-1)^k$　（F）$(M-1)^{N-1}$　（G）$(M-1)^N$　（H）$M^{n_{k-1}-1}$

（I）$M^{n_{k-1}}$　（J）$M^{k-1}$　（K）$M^k$　（L）$M^{N-1}$

（M）$M^N$　（N）$M^{n_{k-1}}-1$　（O）$M^k-1$　（P）$M^N-1$

［⑱の選択肢］

（A）$\binom{N-1}{k-1}$　（B）$\binom{N-1}{k}$　（C）$\binom{N-1}{k+1}$　（D）$\binom{N}{k-1}$

（E）$\binom{N}{k}$　（F）$\binom{N}{k+1}$　（G）$\binom{N+1}{k-1}$　（H）$\binom{N+1}{k}$

［㉑の選択肢］

（A）$M^N$　（B）$M^N-1$　（C）$N-1-\frac{N}{M}$　（D）$N-1+\frac{N}{M}$

（E）$N+1-\frac{N}{M}$　（F）$N+1+\frac{N}{M}$　（G）$N-\frac{N}{M}$　（H）$N+\frac{N}{M}$

［㉒、㉔、㉘の選択肢］

（A）$\frac{1}{M^N}$　（B）$\frac{1}{M^{N_0}}$　（C）$\frac{1}{M^{N-N_0}}$　（D）$\frac{1}{M^{N-N_0-1}}$

（E）$1-\frac{1}{M^N}$　（F）$1-\frac{1}{M^{N_0}}$　（G）$1-\frac{1}{M^{N-N_0}}$　（H）$1-\frac{1}{M^{N-N_0-1}}$

［㉓の選択肢］

（A）$N(M-1)$　（B）$NM$　（C）$NM-1$　（D）$M^{N-1}$

（E）$M^N-1$　（F）$M^N$　（G）$N_0(M-1)$　（H）$N_0M$

（I）$N_0M-1$　（J）$M^{N_0-1}$　（K）$M^{N_0}-1$　（L）$M^{N_0}$

［㉕の選択肢］

（A）$\binom{N-N_0}{j}$　（B）$\binom{N-N_0}{j+1}$　（C）$\binom{N-N_0+1}{j}$　（D）$\binom{N-N_0+1}{j+1}$

（E）$\binom{N_0}{j}$　（F）$\binom{N_0}{j+1}$　（G）$\binom{N_0+1}{j}$　（H）$\binom{N_0+1}{j+1}$

［㉖、㉗の選択肢］

（A）$\frac{(M-1)^j}{M^N}$　（B）$\frac{(M-1)^{k-j-1}}{M^N}$　（C）$\frac{(M-1)^{k-j}}{M^N}$

（D）$\frac{(M-1)^j}{M^{N-N_0}}$　（E）$\frac{(M-1)^{j+1}}{M^{N-N_0}}$　（F）$\frac{(M-1)^{k-j}}{M^{N-N_0}}$

（G）$\left(1-\frac{1}{M^N}\right)^j$　（H）$\left(1-\frac{1}{M^N}\right)^{j+1}$　（I）$\left(1-\frac{1}{M^N}\right)^{k-j}$

（J）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^j$　（K）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-j-1}$　（L）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-j}$

［㉙、㉚の選択肢］

（A）$\dfrac{(M-1)^{k-N_0-1}}{M^N}$　（B）$\dfrac{(M-1)^{k-N_0}}{M^N}$　（C）$\dfrac{(M-1)^{N_0-1}}{M^N}$

（D）$\dfrac{(M-1)^{N_0}}{M^N}$　（E）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-N_0-1}$　（F）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-N_0}$

（G）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{N_0-1}$　（H）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{N_0}$　（I）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0+1}}\right)^{k-N_0-1}$

（J）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0+1}}\right)^{k-N_0}$　（K）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0+1}}\right)^{N_0-1}$　（L）$\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0+1}}\right)^{N_0}$

**問題３．** 互いに独立な２つの正規母集団からの標本値を用いて、尤度比検定法により両者の母分散が等しいことを検定したい。このとき、次の（1）～（3）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。また、空欄のうち㉖および㉗については、最も近い値を選択しなさい。

（２０点）

注：以下の各問において、次のとおり記号を定義する。

| | |
|---|---|
| $\mu_x$、$\mu_y$ | ：２つの正規母集団の母平均 |
| $\sigma_x^2$、$\sigma_y^2$ | ：２つの正規母集団の母分散 |
| $x_i\ (i=1,\cdots,n_x)$ | ：正規母集団$N(\mu_x,\sigma_x^2)$からの標本値 |
| $y_i\ \left(i=1,\cdots,n_y\right)$ | ：正規母集団$N\left(\mu_y,\sigma_y^2\right)$からの標本値 |
| $\bar{x}$、$\bar{y}$ | ：$\bar{x}=\dfrac{1}{n_x}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_x}x_i$、$\bar{y}=\dfrac{1}{n_y}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_y}y_i$ |
| $s_x$ 、$s_y$ | ：$s_x=\sqrt{\dfrac{1}{n_x}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2}$、$s_y=\sqrt{\dfrac{1}{n_y}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2}$ |

（1）帰無仮説$H_0{:}\,\sigma_x^2=\sigma_y^2$を対立仮説$H_1{:}\,\sigma_x^2\neq\sigma_y^2$に対して検定するために、まず帰無仮説と対立仮説の両仮説における母数$\mu_x$、$\mu_y$、$\sigma_x^2$、$\sigma_y^2$の最尤推定値を求める。

標本値として$x_i\ (i=1,\cdots,n_x)$と$y_i\ \left(i=1,\cdots,n_y\right)$を用いる場合、尤度関数$l$は、母数$\mu_x$、$\mu_y$、$\sigma_x^2$、$\sigma_y^2$をパラメータとして、

$$l\left(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2\right)=\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)^{\frac{n_x}{2}}\left(\boxed{\quad ② \quad}\right)^{\frac{n_y}{2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i-\boxed{\quad ③ \quad}\right)^2-\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\boxed{\quad ④ \quad}\right)^2\right\}$$

で表されるので、帰無仮説$H_0{:}\,\sigma_x^2=\sigma_y^2(=\sigma^2)$のもとでの母数$\mu_x$、$\mu_y$、$\sigma^2$の最尤推定値は、それぞれ、

$$\hat{\mu}_x=\boxed{\quad ⑤ \quad}、\hat{\mu}_y=\boxed{\quad ⑥ \quad}、$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n_x+n_y}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i-\boxed{\quad ⑦ \quad}\right)^2+\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\boxed{\quad ⑧ \quad}\right)^2\right\}$$

である。

同様に、対立仮説$H_1{:}\,\sigma_x^2\neq\sigma_y^2$のもとでの母数$\mu_x$、$\mu_y$、$\sigma_x^2$、$\sigma_y^2$の最尤推定値は、

$$\tilde{\mu}_x=\boxed{\quad ⑨ \quad}、\tilde{\mu}_y=\boxed{\quad ⑩ \quad}、\tilde{\sigma}_x^2=\boxed{\quad ⑪ \quad}、\tilde{\sigma}_y^2=\boxed{\quad ⑫ \quad}$$

である。

（２）次に、（１）の結果をもとに、尤度比検定法を用いて検定するときの棄却域を求める。

棄却域$R_k$は、尤度比$\lambda$を用いて、

$$R_k = \left\{\left(x_1, x_2, \cdots, x_{n_x}, y_1, y_2, \cdots, y_{n_y}\right);\ \lambda \leq k\right\} \quad (k\text{は}0 < k < 1\text{をみたす定数})$$

によって与えられる。ここで、尤度比$\lambda$は（１）の尤度関数$l$および最尤推定値を用いて、

$$\lambda = \frac{\boxed{⑬}}{\boxed{⑭}}$$

である。これを$\hat{\sigma}^2$、$\tilde{\sigma}_x^2$および$\tilde{\sigma}_y^2$で表すと、

$$\lambda = \frac{\boxed{⑮}}{\boxed{⑯}}$$

となる。

さらに、（１）で求めた最尤推定値を代入し、$t = \frac{n_x s_x^2}{n_y s_y^2} (> 0)$とおくと、

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\boxed{⑰}\right)^{\frac{n_x}{2}} \left(\boxed{⑱}\right)^{\frac{n_y}{2}} \left(\boxed{⑲}\right)^{\frac{n_x}{2}} \left(\boxed{⑳}\right)^{\frac{n_y}{2}}$$

と表せる。

右辺を$\varphi(t)\ (t > 0)$とし、これを用いて尤度比$\lambda$の挙動を考察すると、$\lambda$は、$0 < t < \boxed{㉑}$で単調増加、$t > \boxed{㉑}$で単調減少である。

また、$t = \boxed{㉑}$での$\lambda$の値と$t \to +0$および$t \to \infty$の場合の挙動も考慮すると、$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \dfrac{1}{k}$をみたす$0 < a_1 = a_1(k) < \boxed{㉑}$および$a_2 = a_2(k) > \boxed{㉑}$に対して、

$$\lambda \leq k \Leftrightarrow t \leq a_1(k) \text{ または } t \geq a_2(k)$$

が成り立つ。

さらに、$f = \frac{n_x s_x^2/(n_x - 1)}{n_y s_y^2/(n_y - 1)} = \frac{n_y - 1}{n_x - 1} t$とすると、$K_1(k) = \frac{n_y - 1}{n_x - 1} a_1(k)$および$K_2(k) = \frac{n_y - 1}{n_x - 1} a_2(k)$に対して

$$\lambda \leq k \Leftrightarrow f \leq K_1(k) \text{ または } f \geq K_2(k)$$

となるから、

$$R_k = \left\{\left(x_1, x_2, \cdots, x_{n_x}, y_1, y_2, \cdots, y_{n_y}\right);\ f \leq K_1(k) \text{ または } f \geq K_2(k)\right\}$$

である。

一方、統計値$f$を実現する統計量$F$は、$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$のもとで、ある特定の$F$分布に従うことが知られているから、有意水準$\varepsilon$の両側検定を行うには、

$$f \leq \boxed{㉒} \text{ または } f \geq \boxed{㉓}$$

のときに$H_0$を棄却すればよい。
なお、$F$分布表を用いて検定する場合は、

$$P\left(F \leq \boxed{㉒}\right) = P\left(\frac{1}{F} \geq \boxed{㉔}\right)$$

であることを用いて、

$$f \geq 1 \text{ ならば } f \geq \boxed{㉓}$$

$$\frac{1}{f} \geq 1 \text{ ならば } \frac{1}{f} \geq \boxed{㉔}$$

のいずれかの場合に$H_0$を棄却する。

（３）あるグループを X 班と Y 班に分けて同じ問題で試験を行ったところ、X 班 10 名、Y 班 8 名の各生徒の得点は以下のようになった。

| 生徒 No. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X 班 | 59 | 80 | 67 | 71 | 67 | 81 | 65 | 66 | 82 | 62 |
| Y 班 | 71 | 93 | 60 | 63 | 74 | 59 | 48 | 68 | ― | ― |

得点のバラツキについて X、Y 両班に差があるといえるかを、X、Y の両班における各生徒の得点がいずれも正規分布に従うものとして、有意水準0.05で検定したい。
いま、X、Y 両班における各生徒の得点が、それぞれ正規分布$N(\mu_x, \sigma_x^2)$、$N(\mu_y, \sigma_y^2)$に従うものとし、帰無仮説$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$を対立仮説$H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$に対して検定する。

このとき、（２）で定めた統計値$f$または$\dfrac{1}{f}$のうち、1以上となるものは$\boxed{㉕}$であり、その値は$\boxed{㉖}$である。一方、$\boxed{㉕} \geq 1$の場合に$H_0$を棄却するための条件は$\boxed{㉕} \geq \boxed{㉗}$であり、$H_0$は$\boxed{㉘}$される。

［①、②の選択肢］

（A）$\frac{1}{\pi}$　（B）$\frac{2}{\pi}$　（C）$\frac{1}{2\pi}$　（D）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

（E）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}$　（F）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}$　（G）$\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}$　（H）$\frac{1}{2\pi\sigma_y^2}$

［③、④の選択肢］

（A）$\mu_x$　（B）$\mu_y$　（C）$2\mu_x$　（D）$2\mu_y$

（E）$\mu_x+\mu_y$　（F）$\frac{\mu_x+\mu_y}{2}$　（G）$\sqrt{\mu_x\cdot\mu_y}$　（H）$2\sqrt{\mu_x\cdot\mu_y}$

（I）$\frac{n_x\mu_x+n_y\mu_y}{n_x+n_y}$　（J）$\frac{n_y\mu_x+n_x\mu_y}{n_x+n_y}$　（K）$\frac{n_y}{n_x}\mu_x+\frac{n_x}{n_y}\mu_y$　（L）$\frac{n_x}{n_y}\mu_x+\frac{n_y}{n_x}\mu_y$

［⑤～⑩の選択肢］

（A）$\bar{x}$　（B）$\bar{y}$　（C）$2\bar{x}$　（D）$2\bar{y}$

（E）$\bar{x}+\bar{y}$　（F）$\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$　（G）$\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{y}}$　（H）$2\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{y}}$

（I）$\frac{n_x\bar{x}+n_y\bar{y}}{n_x+n_y}$　（J）$\frac{n_y\bar{x}+n_x\bar{y}}{n_x+n_y}$　（K）$\frac{n_y}{n_x}\bar{x}+\frac{n_x}{n_y}\bar{y}$　（L）$\frac{n_x}{n_y}\bar{x}+\frac{n_y}{n_x}\bar{y}$

［⑪、⑫の選択肢］

（A）$s_x$　（B）$s_y$　（C）$s_x^2$　（D）$s_y^2$

（E）$\sqrt{\frac{n_x s_x^2}{n_x-1}}$　（F）$\sqrt{\frac{n_y s_y^2}{n_y-1}}$　（G）$\frac{n_x s_x^2}{n_x-1}$　（H）$\frac{n_y s_y^2}{n_y-1}$

（I）$\sqrt{\frac{n_x s_x^2+n_y s_y^2}{n_x+n_y-2}}$　（J）$\sqrt{\frac{n_x s_x^2+n_y s_y^2}{n_x+n_y}}$　（K）$\frac{n_x s_x^2+n_y s_y^2}{n_x+n_y-2}$　（L）$\frac{n_x s_x^2+n_y s_y^2}{n_x+n_y}$

［⑬、⑭の選択肢］

（A）$l(\hat{\mu}_x, \tilde{\mu}_y, \hat{\sigma}^2, \tilde{\sigma}_y^2)$ （B）$l(\tilde{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \tilde{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}^2)$ （C）$l(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2)$

（D）$l(\mu_x, \mu_y, \hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}^2)$ （E）$l(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}^2)$ （F）$l(\tilde{\mu}_x, \tilde{\mu}_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2)$

（G）$l(\tilde{\mu}_x, \tilde{\mu}_y, \sigma^2, \sigma^2)$ （H）$l(\mu_x, \mu_y, \tilde{\sigma}_x^2, \tilde{\sigma}_y^2)$ （I）$l(\tilde{\mu}_x, \tilde{\mu}_y, \tilde{\sigma}_x^2, \tilde{\sigma}_y^2)$

［⑮、⑯の選択肢］

（A）$\hat{\sigma}^2$ （B）$\tilde{\sigma}_x^2\tilde{\sigma}_y^2$ （C）$\tilde{\sigma}_x^2 + \tilde{\sigma}_y^2$

（D）$\hat{\sigma}^2\tilde{\sigma}_x^2\tilde{\sigma}_y^2$ （E）$\hat{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_x^2 + \tilde{\sigma}_y^2$ （F）$(\hat{\sigma}^2)^{\frac{n_x+n_y}{2}}$

（G）$(\hat{\sigma}^2)^{\frac{n_x n_y}{4}}$ （H）$(\tilde{\sigma}_x^2)^{\frac{n_x}{2}}(\tilde{\sigma}_y^2)^{\frac{n_y}{2}}$ （I）$(\tilde{\sigma}_x^2)^{\frac{n_x}{2}} + (\tilde{\sigma}_y^2)^{\frac{n_y}{2}}$

（J）$(\hat{\sigma}^2)^{n_x+n_y}$ （K）$(\tilde{\sigma}_x^2 + \tilde{\sigma}_y^2)^{n_x+n_y}$ （L）$(\tilde{\sigma}_x^2)^{n_x}(\tilde{\sigma}_y^2)^{n_y}$

（M）$(\hat{\sigma}^2\tilde{\sigma}_x^2\tilde{\sigma}_y^2)^{n_x+n_y}$ （N）$(\hat{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_x^2 + \tilde{\sigma}_y^2)^{n_x+n_y}$

［⑰、⑱、㉑の選択肢］

（A）$n_x$ （B）$n_x + 1$ （C）$n_y$ （D）$n_y + 1$

（E）$\frac{n_x}{n_y}$ （F）$\frac{n_x}{n_y} + 1$ （G）$\frac{n_x}{n_x+n_y}$ （H）$\frac{n_x}{n_x+n_y} + 1$

（I）$\frac{n_y}{n_x}$ （J）$\frac{n_y}{n_x} + 1$ （K）$\frac{n_y}{n_x+n_y}$ （L）$\frac{n_y}{n_x+n_y} + 1$

（M）$n_x + n_y$ （N）${n_x}^2 + {n_y}^2$ （O）$(n_x + n_y)^2$ （P）$n_x n_y$

（Q）$(n_x n_y)^2$ （R）$\left(\frac{n_x}{n_y}\right)^2$ （S）$\left(\frac{n_y}{n_x}\right)^2$

［⑲、⑳の選択肢］

（A）$t$　（B）$t^2$　（C）$t+1$　（D）$t^2+1$

（E）$t^2+t+1$　（F）$\frac{1}{t}$　（G）$\frac{1}{t^2}$　（H）$\frac{1}{t}+1$

（I）$\frac{1}{t^2}+1$　（J）$\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1$

［㉒の選択肢］

（A）$F_{n_y}^{n_x}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（B）$F_{n_x}^{n_y}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（C）$F_{n_y-1}^{n_x-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（D）$F_{n_x-1}^{n_y-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

（E）$F_{n_y-2}^{n_x-2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（F）$F_{n_x-2}^{n_y-2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（G）$F_{n_y+1}^{n_x+1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（H）$F_{n_x+1}^{n_y+1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

（I）$F_{n_y+2}^{n_x+2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（J）$F_{n_x+2}^{n_y+2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

［㉓、㉔の選択肢］

（A）$F_{n_y}^{n_x}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（B）$F_{n_x}^{n_y}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（C）$F_{n_y-1}^{n_x-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（D）$F_{n_x-1}^{n_y-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

（E）$F_{n_y-2}^{n_x-2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（F）$F_{n_x-2}^{n_y-2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（G）$F_{n_y+1}^{n_x+1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（H）$F_{n_x+1}^{n_y+1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

（I）$F_{n_y+2}^{n_x+2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$　（J）$F_{n_x+2}^{n_y+2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

［㉕の選択肢］

（A）$f$　（B）$\frac{1}{f}$

［㉖の選択肢］

（Ａ）1.7949　（Ｂ）1.9185　（Ｃ）2.0267　（Ｄ）2.1594

（Ｅ）2.2648　（Ｆ）2.3691　（Ｇ）2.4944　（Ｈ）2.5967

（Ｉ）2.7028　（Ｊ）2.8273　（Ｋ）2.9402　（Ｌ）3.0537

［㉗の選択肢］

（Ａ）3.6767　（Ｂ）3.8549　（Ｃ）3.9121　（Ｄ）4.1970

（Ｅ）4.2951　（Ｆ）4.6517　（Ｇ）4.8232　（Ｈ）4.9927

（Ｉ）5.0736　（Ｊ）5.2879　（Ｋ）5.3209　（Ｌ）5.5996

［㉘の選択肢］

（Ａ）採択　（Ｂ）棄却

# (付表)

## Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側$\varepsilon$点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

| $u(\varepsilon) \to \varepsilon$ | * = 0 | * = 1 | * = 2 | * = 3 | * = 4 | * = 5 | * = 6 | * = 7 | * = 8 | * = 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0* | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |
| 0.1* | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| 0.2* | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| 0.3* | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| 0.4* | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| 0.5* | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| 0.6* | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| 0.7* | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| 0.8* | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| 0.9* | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| 1.0* | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| 1.1* | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| 1.2* | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| 1.3* | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| 1.4* | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| 1.5* | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| 1.6* | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| 1.7* | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| 1.8* | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| 1.9* | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| 2.0* | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| 2.1* | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| 2.2* | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| 2.3* | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| 2.4* | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| 2.5* | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| 2.6* | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| 2.7* | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| 2.8* | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| 2.9* | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

| $\varepsilon \to u(\varepsilon)$ | * = 0 | * = 1 | * = 2 | * = 3 | * = 4 | * = 5 | * = 6 | * = 7 | * = 8 | * = 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00* | ∞ | 3.0902 | 2.8782 | 2.7478 | 2.6521 | 2.5758 | 2.5121 | 2.4573 | 2.4089 | 2.3656 |
| 0.01* | 2.3263 | 2.2904 | 2.2571 | 2.2262 | 2.1973 | 2.1701 | 2.1444 | 2.1201 | 2.0969 | 2.0749 |
| 0.02* | 2.0537 | 2.0335 | 2.0141 | 1.9954 | 1.9774 | 1.9600 | 1.9431 | 1.9268 | 1.9110 | 1.8957 |
| 0.03* | 1.8808 | 1.8663 | 1.8522 | 1.8384 | 1.8250 | 1.8119 | 1.7991 | 1.7866 | 1.7744 | 1.7624 |
| 0.04* | 1.7507 | 1.7392 | 1.7279 | 1.7169 | 1.7060 | 1.6954 | 1.6849 | 1.6747 | 1.6646 | 1.6546 |
| 0.05* | 1.6449 | 1.6352 | 1.6258 | 1.6164 | 1.6072 | 1.5982 | 1.5893 | 1.5805 | 1.5718 | 1.5632 |
| 0.06* | 1.5548 | 1.5464 | 1.5382 | 1.5301 | 1.5220 | 1.5141 | 1.5063 | 1.4985 | 1.4909 | 1.4833 |
| 0.07* | 1.4758 | 1.4684 | 1.4611 | 1.4538 | 1.4466 | 1.4395 | 1.4325 | 1.4255 | 1.4187 | 1.4118 |
| 0.08* | 1.4051 | 1.3984 | 1.3917 | 1.3852 | 1.3787 | 1.3722 | 1.3658 | 1.3595 | 1.3532 | 1.3469 |
| 0.09* | 1.3408 | 1.3346 | 1.3285 | 1.3225 | 1.3165 | 1.3106 | 1.3047 | 1.2988 | 1.2930 | 1.2873 |
| 0.10* | 1.2816 | 1.2759 | 1.2702 | 1.2646 | 1.2591 | 1.2536 | 1.2481 | 1.2426 | 1.2372 | 1.2319 |
| 0.11* | 1.2265 | 1.2212 | 1.2160 | 1.2107 | 1.2055 | 1.2004 | 1.1952 | 1.1901 | 1.1850 | 1.1800 |
| 0.12* | 1.1750 | 1.1700 | 1.1650 | 1.1601 | 1.1552 | 1.1503 | 1.1455 | 1.1407 | 1.1359 | 1.1311 |
| 0.13* | 1.1264 | 1.1217 | 1.1170 | 1.1123 | 1.1077 | 1.1031 | 1.0985 | 1.0939 | 1.0893 | 1.0848 |
| 0.14* | 1.0803 | 1.0758 | 1.0714 | 1.0669 | 1.0625 | 1.0581 | 1.0537 | 1.0494 | 1.0450 | 1.0407 |
| 0.15* | 1.0364 | 1.0322 | 1.0279 | 1.0237 | 1.0194 | 1.0152 | 1.0110 | 1.0069 | 1.0027 | 0.9986 |
| 0.16* | 0.9945 | 0.9904 | 0.9863 | 0.9822 | 0.9782 | 0.9741 | 0.9701 | 0.9661 | 0.9621 | 0.9581 |
| 0.17* | 0.9542 | 0.9502 | 0.9463 | 0.9424 | 0.9385 | 0.9346 | 0.9307 | 0.9269 | 0.9230 | 0.9192 |
| 0.18* | 0.9154 | 0.9116 | 0.9078 | 0.9040 | 0.9002 | 0.8965 | 0.8927 | 0.8890 | 0.8853 | 0.8816 |
| 0.19* | 0.8779 | 0.8742 | 0.8705 | 0.8669 | 0.8633 | 0.8596 | 0.8560 | 0.8524 | 0.8488 | 0.8452 |
| 0.20* | 0.8416 | 0.8381 | 0.8345 | 0.8310 | 0.8274 | 0.8239 | 0.8204 | 0.8169 | 0.8134 | 0.8099 |
| 0.21* | 0.8064 | 0.8030 | 0.7995 | 0.7961 | 0.7926 | 0.7892 | 0.7858 | 0.7824 | 0.7790 | 0.7756 |
| 0.22* | 0.7722 | 0.7688 | 0.7655 | 0.7621 | 0.7588 | 0.7554 | 0.7521 | 0.7488 | 0.7454 | 0.7421 |
| 0.23* | 0.7388 | 0.7356 | 0.7323 | 0.7290 | 0.7257 | 0.7225 | 0.7192 | 0.7160 | 0.7128 | 0.7095 |
| 0.24* | 0.7063 | 0.7031 | 0.6999 | 0.6967 | 0.6935 | 0.6903 | 0.6871 | 0.6840 | 0.6808 | 0.6776 |
| 0.25* | 0.6745 | 0.6713 | 0.6682 | 0.6651 | 0.6620 | 0.6588 | 0.6557 | 0.6526 | 0.6495 | 0.6464 |
| 0.26* | 0.6433 | 0.6403 | 0.6372 | 0.6341 | 0.6311 | 0.6280 | 0.6250 | 0.6219 | 0.6189 | 0.6158 |
| 0.27* | 0.6128 | 0.6098 | 0.6068 | 0.6038 | 0.6008 | 0.5978 | 0.5948 | 0.5918 | 0.5888 | 0.5858 |
| 0.28* | 0.5828 | 0.5799 | 0.5769 | 0.5740 | 0.5710 | 0.5681 | 0.5651 | 0.5622 | 0.5592 | 0.5563 |
| 0.29* | 0.5534 | 0.5505 | 0.5476 | 0.5446 | 0.5417 | 0.5388 | 0.5359 | 0.5330 | 0.5302 | 0.5273 |
| 0.30* | 0.5244 | 0.5215 | 0.5187 | 0.5158 | 0.5129 | 0.5101 | 0.5072 | 0.5044 | 0.5015 | 0.4987 |
| 0.31* | 0.4959 | 0.4930 | 0.4902 | 0.4874 | 0.4845 | 0.4817 | 0.4789 | 0.4761 | 0.4733 | 0.4705 |
| 0.32* | 0.4677 | 0.4649 | 0.4621 | 0.4593 | 0.4565 | 0.4538 | 0.4510 | 0.4482 | 0.4454 | 0.4427 |
| 0.33* | 0.4399 | 0.4372 | 0.4344 | 0.4316 | 0.4289 | 0.4261 | 0.4234 | 0.4207 | 0.4179 | 0.4152 |
| 0.34* | 0.4125 | 0.4097 | 0.4070 | 0.4043 | 0.4016 | 0.3989 | 0.3961 | 0.3934 | 0.3907 | 0.3880 |
| 0.35* | 0.3853 | 0.3826 | 0.3799 | 0.3772 | 0.3745 | 0.3719 | 0.3692 | 0.3665 | 0.3638 | 0.3611 |
| 0.36* | 0.3585 | 0.3558 | 0.3531 | 0.3505 | 0.3478 | 0.3451 | 0.3425 | 0.3398 | 0.3372 | 0.3345 |
| 0.37* | 0.3319 | 0.3292 | 0.3266 | 0.3239 | 0.3213 | 0.3186 | 0.3160 | 0.3134 | 0.3107 | 0.3081 |
| 0.38* | 0.3055 | 0.3029 | 0.3002 | 0.2976 | 0.2950 | 0.2924 | 0.2898 | 0.2871 | 0.2845 | 0.2819 |
| 0.39* | 0.2793 | 0.2767 | 0.2741 | 0.2715 | 0.2689 | 0.2663 | 0.2637 | 0.2611 | 0.2585 | 0.2559 |
| 0.40* | 0.2533 | 0.2508 | 0.2482 | 0.2456 | 0.2430 | 0.2404 | 0.2378 | 0.2353 | 0.2327 | 0.2301 |
| 0.41* | 0.2275 | 0.2250 | 0.2224 | 0.2198 | 0.2173 | 0.2147 | 0.2121 | 0.2096 | 0.2070 | 0.2045 |
| 0.42* | 0.2019 | 0.1993 | 0.1968 | 0.1942 | 0.1917 | 0.1891 | 0.1866 | 0.1840 | 0.1815 | 0.1789 |
| 0.43* | 0.1764 | 0.1738 | 0.1713 | 0.1687 | 0.1662 | 0.1637 | 0.1611 | 0.1586 | 0.1560 | 0.1535 |
| 0.44* | 0.1510 | 0.1484 | 0.1459 | 0.1434 | 0.1408 | 0.1383 | 0.1358 | 0.1332 | 0.1307 | 0.1282 |
| 0.45* | 0.1257 | 0.1231 | 0.1206 | 0.1181 | 0.1156 | 0.1130 | 0.1105 | 0.1080 | 0.1055 | 0.1030 |
| 0.46* | 0.1004 | 0.0979 | 0.0954 | 0.0929 | 0.0904 | 0.0878 | 0.0853 | 0.0828 | 0.0803 | 0.0778 |
| 0.47* | 0.0753 | 0.0728 | 0.0702 | 0.0677 | 0.0652 | 0.0627 | 0.0602 | 0.0577 | 0.0552 | 0.0527 |
| 0.48* | 0.0502 | 0.0476 | 0.0451 | 0.0426 | 0.0401 | 0.0376 | 0.0351 | 0.0326 | 0.0301 | 0.0276 |
| 0.49* | 0.0251 | 0.0226 | 0.0201 | 0.0175 | 0.0150 | 0.0125 | 0.0100 | 0.0075 | 0.0050 | 0.0025 |

II.自由度$\varphi$の$\chi^2$分布の上側$\varepsilon$点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

| $\varphi$ ＼ $\varepsilon$ | 0.990 | 0.975 | 0.950 | 0.900 | 0.500 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0002 | 0.0010 | 0.0039 | 0.0158 | 0.4549 | 2.7055 | 3.8415 | 5.0239 | 6.6349 |
| 2 | 0.0201 | 0.0506 | 0.1026 | 0.2107 | 1.3863 | 4.6052 | 5.9915 | 7.3778 | 9.2103 |
| 3 | 0.1148 | 0.2158 | 0.3518 | 0.5844 | 2.3660 | 6.2514 | 7.8147 | 9.3484 | 11.3449 |
| 4 | 0.2971 | 0.4844 | 0.7107 | 1.0636 | 3.3567 | 7.7794 | 9.4877 | 11.1433 | 13.2767 |
| 5 | 0.5543 | 0.8312 | 1.1455 | 1.6103 | 4.3515 | 9.2364 | 11.0705 | 12.8325 | 15.0863 |
| 6 | 0.8721 | 1.2373 | 1.6354 | 2.2041 | 5.3481 | 10.6446 | 12.5916 | 14.4494 | 16.8119 |
| 7 | 1.2390 | 1.6899 | 2.1673 | 2.8331 | 6.3458 | 12.0170 | 14.0671 | 16.0128 | 18.4753 |
| 8 | 1.6465 | 2.1797 | 2.7326 | 3.4895 | 7.3441 | 13.3616 | 15.5073 | 17.5345 | 20.0902 |
| 9 | 2.0879 | 2.7004 | 3.3251 | 4.1682 | 8.3428 | 14.6837 | 16.9190 | 19.0228 | 21.6660 |
| 10 | 2.5582 | 3.2470 | 3.9403 | 4.8652 | 9.3418 | 15.9872 | 18.3070 | 20.4832 | 23.2093 |
| 11 | 3.0535 | 3.8157 | 4.5748 | 5.5778 | 10.3410 | 17.2750 | 19.6751 | 21.9200 | 24.7250 |
| 12 | 3.5706 | 4.4038 | 5.2260 | 6.3038 | 11.3403 | 18.5493 | 21.0261 | 23.3367 | 26.2170 |
| 13 | 4.1069 | 5.0088 | 5.8919 | 7.0415 | 12.3398 | 19.8119 | 22.3620 | 24.7356 | 27.6882 |
| 14 | 4.6604 | 5.6287 | 6.5706 | 7.7895 | 13.3393 | 21.0641 | 23.6848 | 26.1189 | 29.1412 |
| 15 | 5.2293 | 6.2621 | 7.2609 | 8.5468 | 14.3389 | 22.3071 | 24.9958 | 27.4884 | 30.5779 |
| 16 | 5.8122 | 6.9077 | 7.9616 | 9.3122 | 15.3385 | 23.5418 | 26.2962 | 28.8454 | 31.9999 |
| 17 | 6.4078 | 7.5642 | 8.6718 | 10.0852 | 16.3382 | 24.7690 | 27.5871 | 30.1910 | 33.4087 |
| 18 | 7.0149 | 8.2307 | 9.3905 | 10.8649 | 17.3379 | 25.9894 | 28.8693 | 31.5264 | 34.8053 |
| 19 | 7.6327 | 8.9065 | 10.1170 | 11.6509 | 18.3377 | 27.2036 | 30.1435 | 32.8523 | 36.1909 |
| 20 | 8.2604 | 9.5908 | 10.8508 | 12.4426 | 19.3374 | 28.4120 | 31.4104 | 34.1696 | 37.5662 |
| 21 | 8.8972 | 10.2829 | 11.5913 | 13.2396 | 20.3372 | 29.6151 | 32.6706 | 35.4789 | 38.9322 |
| 22 | 9.5425 | 10.9823 | 12.3380 | 14.0415 | 21.3370 | 30.8133 | 33.9244 | 36.7807 | 40.2894 |
| 23 | 10.1957 | 11.6886 | 13.0905 | 14.8480 | 22.3369 | 32.0069 | 35.1725 | 38.0756 | 41.6384 |
| 24 | 10.8564 | 12.4012 | 13.8484 | 15.6587 | 23.3367 | 33.1962 | 36.4150 | 39.3641 | 42.9798 |
| 25 | 11.5240 | 13.1197 | 14.6114 | 16.4734 | 24.3366 | 34.3816 | 37.6525 | 40.6465 | 44.3141 |
| 26 | 12.1981 | 13.8439 | 15.3792 | 17.2919 | 25.3365 | 35.5632 | 38.8851 | 41.9232 | 45.6417 |
| 27 | 12.8785 | 14.5734 | 16.1514 | 18.1139 | 26.3363 | 36.7412 | 40.1133 | 43.1945 | 46.9629 |
| 28 | 13.5647 | 15.3079 | 16.9279 | 18.9392 | 27.3362 | 37.9159 | 41.3371 | 44.4608 | 48.2782 |
| 29 | 14.2565 | 16.0471 | 17.7084 | 19.7677 | 28.3361 | 39.0875 | 42.5570 | 45.7223 | 49.5879 |
| 30 | 14.9535 | 16.7908 | 18.4927 | 20.5992 | 29.3360 | 40.2560 | 43.7730 | 46.9792 | 50.8922 |
| 31 | 15.6555 | 17.5387 | 19.2806 | 21.4336 | 30.3359 | 41.4217 | 44.9853 | 48.2319 | 52.1914 |
| 32 | 16.3622 | 18.2908 | 20.0719 | 22.2706 | 31.3359 | 42.5847 | 46.1943 | 49.4804 | 53.4858 |
| 33 | 17.0735 | 19.0467 | 20.8665 | 23.1102 | 32.3358 | 43.7452 | 47.3999 | 50.7251 | 54.7755 |
| 34 | 17.7891 | 19.8063 | 21.6643 | 23.9523 | 33.3357 | 44.9032 | 48.6024 | 51.9660 | 56.0609 |
| 35 | 18.5089 | 20.5694 | 22.4650 | 24.7967 | 34.3356 | 46.0588 | 49.8018 | 53.2033 | 57.3421 |
| 36 | 19.2327 | 21.3359 | 23.2686 | 25.6433 | 35.3356 | 47.2122 | 50.9985 | 54.4373 | 58.6192 |
| 37 | 19.9602 | 22.1056 | 24.0749 | 26.4921 | 36.3355 | 48.3634 | 52.1923 | 55.6680 | 59.8925 |
| 38 | 20.6914 | 22.8785 | 24.8839 | 27.3430 | 37.3355 | 49.5126 | 53.3835 | 56.8955 | 61.1621 |
| 39 | 21.4262 | 23.6543 | 25.6954 | 28.1958 | 38.3354 | 50.6598 | 54.5722 | 58.1201 | 62.4281 |
| 40 | 22.1643 | 24.4330 | 26.5093 | 29.0505 | 39.3353 | 51.8051 | 55.7585 | 59.3417 | 63.6907 |
| 41 | 22.9056 | 25.2145 | 27.3256 | 29.9071 | 40.3353 | 52.9485 | 56.9424 | 60.5606 | 64.9501 |
| 42 | 23.6501 | 25.9987 | 28.1440 | 30.7654 | 41.3352 | 54.0902 | 58.1240 | 61.7768 | 66.2062 |
| 43 | 24.3976 | 26.7854 | 28.9647 | 31.6255 | 42.3352 | 55.2302 | 59.3035 | 62.9904 | 67.4593 |
| 44 | 25.1480 | 27.5746 | 29.7875 | 32.4871 | 43.3352 | 56.3685 | 60.4809 | 64.2015 | 68.7095 |
| 45 | 25.9013 | 28.3662 | 30.6123 | 33.3504 | 44.3351 | 57.5053 | 61.6562 | 65.4102 | 69.9568 |
| 46 | 26.6572 | 29.1601 | 31.4390 | 34.2152 | 45.3351 | 58.6405 | 62.8296 | 66.6165 | 71.2014 |
| 47 | 27.4158 | 29.9562 | 32.2676 | 35.0814 | 46.3350 | 59.7743 | 64.0011 | 67.8206 | 72.4433 |
| 48 | 28.1770 | 30.7545 | 33.0981 | 35.9491 | 47.3350 | 60.9066 | 65.1708 | 69.0226 | 73.6826 |
| 49 | 28.9406 | 31.5549 | 33.9303 | 36.8182 | 48.3350 | 62.0375 | 66.3386 | 70.2224 | 74.9195 |
| 50 | 29.7067 | 32.3574 | 34.7643 | 37.6886 | 49.3349 | 63.1671 | 67.5048 | 71.4202 | 76.1539 |

III．分母の自由度$n$、分子の自由度$m$の$F$分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8.5263 | 9.0000 | 9.1618 | 9.2434 | 9.2926 | 9.3255 | 9.3491 | 9.3668 | 9.3805 | 9.3916 |
| 3 | 5.5383 | 5.4624 | 5.3908 | 5.3426 | 5.3092 | 5.2847 | 5.2662 | 5.2517 | 5.2400 | 5.2304 |
| 4 | 4.5448 | 4.3246 | 4.1909 | 4.1072 | 4.0506 | 4.0097 | 3.9790 | 3.9549 | 3.9357 | 3.9199 |
| 5 | 4.0604 | 3.7797 | 3.6195 | 3.5202 | 3.4530 | 3.4045 | 3.3679 | 3.3393 | 3.3163 | 3.2974 |
| 6 | 3.7759 | 3.4633 | 3.2888 | 3.1808 | 3.1075 | 3.0546 | 3.0145 | 2.9830 | 2.9577 | 2.9369 |
| 7 | 3.5894 | 3.2574 | 3.0741 | 2.9605 | 2.8833 | 2.8274 | 2.7849 | 2.7516 | 2.7247 | 2.7025 |
| 8 | 3.4579 | 3.1131 | 2.9238 | 2.8064 | 2.7264 | 2.6683 | 2.6241 | 2.5893 | 2.5612 | 2.5380 |
| 9 | 3.3603 | 3.0065 | 2.8129 | 2.6927 | 2.6106 | 2.5509 | 2.5053 | 2.4694 | 2.4403 | 2.4163 |
| 10 | 3.2850 | 2.9245 | 2.7277 | 2.6053 | 2.5216 | 2.4606 | 2.4140 | 2.3772 | 2.3473 | 2.3226 |

$\varepsilon =$ 0.050

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 18.5128 | 19.0000 | 19.1643 | 19.2468 | 19.2964 | 19.3295 | 19.3532 | 19.3710 | 19.3848 | 19.3959 |
| 3 | 10.1280 | 9.5521 | 9.2766 | 9.1172 | 9.0135 | 8.9406 | 8.8867 | 8.8452 | 8.8123 | 8.7855 |
| 4 | 7.7086 | 6.9443 | 6.5914 | 6.3882 | 6.2561 | 6.1631 | 6.0942 | 6.0410 | 5.9988 | 5.9644 |
| 5 | 6.6079 | 5.7861 | 5.4095 | 5.1922 | 5.0503 | 4.9503 | 4.8759 | 4.8183 | 4.7725 | 4.7351 |
| 6 | 5.9874 | 5.1433 | 4.7571 | 4.5337 | 4.3874 | 4.2839 | 4.2067 | 4.1468 | 4.0990 | 4.0600 |
| 7 | 5.5914 | 4.7374 | 4.3468 | 4.1203 | 3.9715 | 3.8660 | 3.7870 | 3.7257 | 3.6767 | 3.6365 |
| 8 | 5.3177 | 4.4590 | 4.0662 | 3.8379 | 3.6875 | 3.5806 | 3.5005 | 3.4381 | 3.3881 | 3.3472 |
| 9 | 5.1174 | 4.2565 | 3.8625 | 3.6331 | 3.4817 | 3.3738 | 3.2927 | 3.2296 | 3.1789 | 3.1373 |
| 10 | 4.9646 | 4.1028 | 3.7083 | 3.4780 | 3.3258 | 3.2172 | 3.1355 | 3.0717 | 3.0204 | 2.9782 |

$\varepsilon =$ 0.025

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 38.5063 | 39.0000 | 39.1655 | 39.2484 | 39.2982 | 39.3315 | 39.3552 | 39.3730 | 39.3869 | 39.3980 |
| 3 | 17.4434 | 16.0441 | 15.4392 | 15.1010 | 14.8848 | 14.7347 | 14.6244 | 14.5399 | 14.4731 | 14.4189 |
| 4 | 12.2179 | 10.6491 | 9.9792 | 9.6045 | 9.3645 | 9.1973 | 9.0741 | 8.9796 | 8.9047 | 8.8439 |
| 5 | 10.0070 | 8.4336 | 7.7636 | 7.3879 | 7.1464 | 6.9777 | 6.8531 | 6.7572 | 6.6811 | 6.6192 |
| 6 | 8.8131 | 7.2599 | 6.5988 | 6.2272 | 5.9876 | 5.8198 | 5.6955 | 5.5996 | 5.5234 | 5.4613 |
| 7 | 8.0727 | 6.5415 | 5.8898 | 5.5226 | 5.2852 | 5.1186 | 4.9949 | 4.8993 | 4.8232 | 4.7611 |
| 8 | 7.5709 | 6.0595 | 5.4160 | 5.0526 | 4.8173 | 4.6517 | 4.5286 | 4.4333 | 4.3572 | 4.2951 |
| 9 | 7.2093 | 5.7147 | 5.0781 | 4.7181 | 4.4844 | 4.3197 | 4.1970 | 4.1020 | 4.0260 | 3.9639 |
| 10 | 6.9367 | 5.4564 | 4.8256 | 4.4683 | 4.2361 | 4.0721 | 3.9498 | 3.8549 | 3.7790 | 3.7168 |

$\varepsilon =$ 0.010

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 98.5025 | 99.0000 | 99.1662 | 99.2494 | 99.2993 | 99.3326 | 99.3564 | 99.3742 | 99.3881 | 99.3992 |
| 3 | 34.1162 | 30.8165 | 29.4567 | 28.7099 | 28.2371 | 27.9107 | 27.6717 | 27.4892 | 27.3452 | 27.2287 |
| 4 | 21.1977 | 18.0000 | 16.6944 | 15.9770 | 15.5219 | 15.2069 | 14.9758 | 14.7989 | 14.6591 | 14.5459 |
| 5 | 16.2582 | 13.2739 | 12.0600 | 11.3919 | 10.9670 | 10.6723 | 10.4555 | 10.2893 | 10.1578 | 10.0510 |
| 6 | 13.7450 | 10.9248 | 9.7795 | 9.1483 | 8.7459 | 8.4661 | 8.2600 | 8.1017 | 7.9761 | 7.8741 |
| 7 | 12.2464 | 9.5466 | 8.4513 | 7.8466 | 7.4604 | 7.1914 | 6.9928 | 6.8400 | 6.7188 | 6.6201 |
| 8 | 11.2586 | 8.6491 | 7.5910 | 7.0061 | 6.6318 | 6.3707 | 6.1776 | 6.0289 | 5.9106 | 5.8143 |
| 9 | 10.5614 | 8.0215 | 6.9919 | 6.4221 | 6.0569 | 5.8018 | 5.6129 | 5.4671 | 5.3511 | 5.2565 |
| 10 | 10.0443 | 7.5594 | 6.5523 | 5.9943 | 5.6363 | 5.3858 | 5.2001 | 5.0567 | 4.9424 | 4.8491 |

$\varepsilon =$ 0.005

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 198.5013 | 199.0000 | 199.1664 | 199.2497 | 199.2996 | 199.3330 | 199.3568 | 199.3746 | 199.3885 | 199.3996 |
| 3 | 55.5520 | 49.7993 | 47.4672 | 46.1946 | 45.3916 | 44.8385 | 44.4341 | 44.1256 | 43.8824 | 43.6858 |
| 4 | 31.3328 | 26.2843 | 24.2591 | 23.1545 | 22.4564 | 21.9746 | 21.6217 | 21.3520 | 21.1391 | 20.9667 |
| 5 | 22.7848 | 18.3138 | 16.5298 | 15.5561 | 14.9396 | 14.5133 | 14.2004 | 13.9610 | 13.7716 | 13.6182 |
| 6 | 18.6350 | 14.5441 | 12.9166 | 12.0275 | 11.4637 | 11.0730 | 10.7859 | 10.5658 | 10.3915 | 10.2500 |
| 7 | 16.2356 | 12.4040 | 10.8824 | 10.0505 | 9.5221 | 9.1553 | 8.8854 | 8.6781 | 8.5138 | 8.3803 |
| 8 | 14.6882 | 11.0424 | 9.5965 | 8.8051 | 8.3018 | 7.9520 | 7.6941 | 7.4959 | 7.3386 | 7.2106 |
| 9 | 13.6136 | 10.1067 | 8.7171 | 7.9559 | 7.4712 | 7.1339 | 6.8849 | 6.6933 | 6.5411 | 6.4172 |
| 10 | 12.8265 | 9.4270 | 8.0807 | 7.3428 | 6.8724 | 6.5446 | 6.3025 | 6.1159 | 5.9676 | 5.8467 |

Ⅳ．自由度$\varphi$の$t$分布の上側ε点：$t_\varphi(\varepsilon)$

| $\varphi$ ＼$\varepsilon$ | 0.100 | 0.050 | 0.025 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3.0777 | 6.3138 | 12.7062 |
| 2 | 1.8856 | 2.9200 | 4.3027 |
| 3 | 1.6377 | 2.3534 | 3.1824 |
| 4 | 1.5332 | 2.1318 | 2.7764 |
| 5 | 1.4759 | 2.0150 | 2.5706 |
| 6 | 1.4398 | 1.9432 | 2.4469 |
| 7 | 1.4149 | 1.8946 | 2.3646 |
| 8 | 1.3968 | 1.8595 | 2.3060 |
| 9 | 1.3830 | 1.8331 | 2.2622 |
| 10 | 1.3722 | 1.8125 | 2.2281 |
| 11 | 1.3634 | 1.7959 | 2.2010 |
| 12 | 1.3562 | 1.7823 | 2.1788 |
| 13 | 1.3502 | 1.7709 | 2.1604 |
| 14 | 1.3450 | 1.7613 | 2.1448 |
| 15 | 1.3406 | 1.7531 | 2.1314 |
| 16 | 1.3368 | 1.7459 | 2.1199 |
| 17 | 1.3334 | 1.7396 | 2.1098 |
| 18 | 1.3304 | 1.7341 | 2.1009 |
| 19 | 1.3277 | 1.7291 | 2.0930 |
| 20 | 1.3253 | 1.7247 | 2.0860 |
| 21 | 1.3232 | 1.7207 | 2.0796 |
| 22 | 1.3212 | 1.7171 | 2.0739 |
| 23 | 1.3195 | 1.7139 | 2.0687 |
| 24 | 1.3178 | 1.7109 | 2.0639 |
| 25 | 1.3163 | 1.7081 | 2.0595 |

Ⅴ．自然対数表

| $x$ | $\log x$ |
|---|---|
| 1.1 | 0.0953 |
| 1.2 | 0.1823 |
| 1.3 | 0.2624 |
| 1.4 | 0.3365 |
| 1.5 | 0.4055 |
| 1.6 | 0.4700 |
| 1.7 | 0.5306 |
| 1.8 | 0.5878 |
| 1.9 | 0.6419 |
| 2.0 | 0.6931 |
| 2.5 | 0.9163 |
| 3.0 | 1.0986 |
| 3.5 | 1.2528 |
| 4.0 | 1.3863 |
| 4.5 | 1.5041 |
| 5.0 | 1.6094 |
| 5.5 | 1.7047 |
| 6.0 | 1.7918 |
| 6.5 | 1.8718 |
| 7.0 | 1.9459 |
| 7.5 | 2.0149 |
| 8.0 | 2.0794 |
| 8.5 | 2.1401 |
| 9.0 | 2.1972 |
| 9.5 | 2.2513 |
| 10.0 | 2.3026 |

Ⅵ．指数関数表

| $x$ | $\exp(x)$ |
|---|---|
| -0.10 | 0.9048 |
| -0.09 | 0.9139 |
| -0.08 | 0.9231 |
| -0.07 | 0.9324 |
| -0.06 | 0.9418 |
| -0.05 | 0.9512 |
| -0.04 | 0.9608 |
| -0.03 | 0.9704 |
| -0.02 | 0.9802 |
| -0.01 | 0.9900 |
| 0.00 | 1.0000 |
| 0.01 | 1.0101 |
| 0.02 | 1.0202 |
| 0.03 | 1.0305 |
| 0.04 | 1.0408 |
| 0.05 | 1.0513 |
| 0.06 | 1.0618 |
| 0.07 | 1.0725 |
| 0.08 | 1.0833 |
| 0.09 | 1.0942 |
| 0.10 | 1.1052 |

以上

# 数学（解答例）

**問題１**

（１）

$X_i$ $(i \geq 1)$を$i-1$個目の赤玉を抽出した状態から、$i$個目の赤玉を抽出するまでに行った抽出回数を表す確率変数とする。

まず、$E[X_1]$を求める。

ルール１より、1回目は箱Ａから抽出を行うことから、$E[X_1]$ に関して次の式が成り立つ。

$$E[X_1] = 1 + \frac{9}{10}E[X_1] + \frac{1}{10} \times 0$$

よって、

$$E[X_1] = 10$$

次に、$E[X_i](i \geq 2)$を求める。

ルール ２ より、赤玉が出た直後の抽出は箱Ｂから行うことに注意すると、$E[X_i]$ $(i \geq 2)$に関して次式が成り立つ。

$$E[X_i] = 1 + \frac{5}{10}E[X_1] + \frac{5}{10} \times 0 = 1 + \frac{5}{10} \times 10 = 6$$

さて、定義より各$X_i$ $(i \geq 1)$は互いに独立であることから、求める期待値は、

$$E[X_1 + X_2 + X_3 + X_4] = \sum_{i=1}^{4} E[X_i] = 10 + 3 \times 6 = 28$$

よって、解答は　**（A）**

（２）

$Y$ は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ の各値を $1/6$ ずつの確率でとり得る離散確率変数なので、

$$E[Y] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E[Y^2] = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

また、

$$E[X]=\int_{0.5}^{6.5}\frac{x}{6}dx=\frac{7}{2}$$

$$E[XY]=E\big[X\cdot(X+0.5\text{ の整数部分})\big]=\sum_{k=1}^{6}\int_{k-0.5}^{k+0.5}\frac{k}{6}x\,dx=\sum_{k=1}^{6}\left[\frac{k}{12}x^2\right]_{k-0.5}^{k+0.5}=\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{12}\cdot 2k$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13=\frac{91}{6}$$

より、

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{91}{6}-\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{35}{12}$$

よって、解答は ①（Ｅ） ②（Ｄ） ③（Ｄ）

（３）確率変数$X$，$Y$の確率密度関数をそれぞれ$f_X(x), f_Y(y)$とすると、

$$f_X(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{1}{2\lambda}x}(x>0)$$

$$f_Y(y)=3\lambda e^{-3\lambda y}(y>0)$$

となる。

$X$，$Y$の結合確率密度関数を$f_{X,Y}(x,y)$とおくと、

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{3}{2}e^{-\left(\frac{1}{2\lambda}x+3\lambda y\right)}$$

ここで$z=e^{\frac{x}{y}}, w=y$とおくと、この変換は$xy$平面の$x>0, y>0$なる部分を$zw$平面の$z>1, w>0$なる部分に移す１対１の変換である。また、$x=w\log z\,, y=w$より、ヤコビアン$J$を求めると、

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}=\begin{vmatrix}\frac{w}{z} & \log z\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{w}{z}(>0)$$

である。

よって、$Z,W$の結合確率密度関数を$f_{Z,W}(z,w)$とすると、

$$f_{Z,W}(z,w)=\frac{3}{2}e^{-w\left(\frac{1}{2\lambda}\log z+3\lambda\right)}|J|=\frac{3w}{2z}e^{-w\left(\frac{1}{2\lambda}\log z+3\lambda\right)}$$

これより、$Z$の確率密度関数$f(z)$を求めると、

$$f(z)=\int_0^{\infty}f_{Z,W}(z,w)dw=\int_0^{\infty}\frac{3w}{2z}e^{-w\left(\frac{1}{2\lambda}\log z+3\lambda\right)}dw$$

いま、$w\left(\frac{1}{2\lambda}\log z+3\lambda\right)=t$とおくと、

$$f(z)=\int_0^{\infty}\frac{3}{2z}\frac{t}{\frac{1}{2\lambda}\log z+3\lambda}e^{-t}\frac{dt}{\frac{1}{2\lambda}\log z+3\lambda}=\frac{3}{2z}\frac{1}{\left(\frac{1}{2\lambda}\log z+3\lambda\right)^2}\int_0^{\infty}te^{-t}dt$$

ここで、$\int_0^{\infty}t^ne^{-t}dt=n!$より、$\int_0^{\infty}te^{-t}dt=1$

であるので、

$$f(z)=\frac{3}{2z}\frac{1}{\left(\frac{1}{2\lambda}\log z+3\lambda\right)^2}=\frac{6\lambda^2}{z(\log z+6\lambda^2)^2}$$

よって、解答は　①　（H）　②　（G）

（別解）

確率変数$Z$の分布関数を$F_Z(z)$とすると、

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)=P(X\le Y\log z)\\&=\int_0^\infty P(X\le y\log z)f_Y(y)dy=\int_0^\infty\left(\int_o^{y\log z}\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{1}{2\lambda}x}\,dx\right)3\lambda e^{-3\lambda y}dy\\&=\int_0^\infty\left(1-e^{-\frac{1}{2\lambda}y\log z}\right)3\lambda e^{-3\lambda y}dy=\int_0^\infty 3\lambda e^{-3\lambda y}dy-\int_0^\infty 3\lambda\exp\left\{-y\left(3\lambda+\frac{\log z}{2\lambda}\right)\right\}dy\\&=1-\frac{3\lambda}{3\lambda+\frac{\log z}{2\lambda}}=\frac{\log z}{\log z+6\lambda^2}\end{aligned}$$

これより、

$$f(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\frac{6\lambda^2}{z(\log z+6\lambda^2)^2}$$

（4）

（ア）　$k$番目に抽出した実数を$a_k$とする。

また、端数処理後の数値を四捨五入の場合を$A_k(4/5)$、七捨八入の場合を$A_k(7/8)$とする。

$0<a_k<0.5$のとき、$A_k(4/5)=A_k(7/8)=0$

$0.5\le a_k<0.8$のとき、$A_k(4/5)=1$，　$A_k(7/8)=0$

$0.8\le a_k<1$のとき、$A_k(4/5)=A_k(7/8)=1$

である。

ここで、$X_k=A_k(4/5)-A_k(7/8)$とすると、

$$X_k=\begin{cases}1 & (0.5\le a_k<0.8)\\0 & (otherwise)\end{cases}$$

無作為に実数$a_k$を抽出することから、

$$P(0.5\le a_k<0.8)=\frac{3}{10}$$

となり、

$$P(X_k=1)=\frac{3}{10}\qquad P(X_k=0)=\frac{7}{10}$$

したがって、

$$E[X_k]=\frac{3}{10}\times1+\frac{7}{10}\times0=\frac{3}{10}=0.30$$

$$V[X_k]=E[{X_k}^2]-E[X_k]^2=\left(\frac{3}{10}\times 1^2+\frac{7}{10}\times 0^2\right)-\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{21}{100}=0.21$$

（イ）

$$Y=\sum_{k=1}^{900}X_k$$

とすると、中心極限定理から

$$Z=\frac{Y-900\times\frac{3}{10}}{\sqrt{900}\times\sqrt{\frac{21}{100}}}=\frac{Y-270}{3\sqrt{21}}\sim N(0,1)$$

よって、

$$P(Y<\alpha)=P\left(\frac{Y-270}{3\sqrt{21}}<\frac{\alpha-270}{3\sqrt{21}}\right)\geq 0.85$$

これより、

$$\frac{\alpha-270}{3\sqrt{21}}\geq u(0.15)=1.0364$$

これを解いて、$\alpha\geq 284.248\ldots$

以上より、最小の整数$\alpha$は285

よって、解答は　①　（D）　②　（A）　③　（I）

（５）

パラメータ $\alpha>0,\ 0<p<1$ の負の二項分布に従う確率変数 $X$ の確率分布は、

$$P(X=k)=\binom{\alpha+k-1}{k}p^{\alpha}(1-p)^k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

であるから、$X$ の期待値 $E[X]$ は、

$$\begin{aligned}E[X]&=\sum_{k=0}^{\infty}k\binom{\alpha+k-1}{k}p^{\alpha}(1-p)^k\\&=\alpha\cdot\frac{1-p}{p}\times\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+k-1}{k-1}p^{\alpha+1}(1-p)^{k-1}\\&=\alpha\cdot\frac{1-p}{p}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}E[X(X-1)]&=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\binom{\alpha+k-1}{k}p^{\alpha}(1-p)^k\\&=\alpha(\alpha+1)\cdot\frac{(1-p)^2}{p^2}\times\sum_{k=2}^{\infty}\binom{\alpha+k-1}{k-2}p^{\alpha+2}(1-p)^{k-2}\\&=\alpha(\alpha+1)\cdot\frac{(1-p)^2}{p^2}\end{aligned}$$

であるから、$X$ の分散 $V[X]$ は、

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2]-E[X]^2 = E[X(X-1)]+E[X]-E[X]^2 \\ &= \alpha(\alpha+1)\cdot\frac{(1-p)^2}{p^2}+\alpha\cdot\frac{1-p}{p}-\alpha^2\cdot\frac{(1-p)^2}{p^2} \\ &= \alpha\cdot\frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

となる。パラメータ $\alpha, p$ の推定値 $\hat{\alpha},\hat{p}$ は、母平均 $\mu$ の推定値 $\hat{\mu}$ 、母分散 $\sigma^2$ の推定値 $\hat{\sigma}^2$ を用いて、

$$\begin{cases} \hat{\alpha}\cdot\dfrac{1-\hat{p}}{\hat{p}}=\hat{\mu} \\ \hat{\alpha}\cdot\dfrac{1-\hat{p}}{\hat{p}^2}=\hat{\sigma}^2 \end{cases} \quad \text{より、} \quad \hat{p}=\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2}\ , \quad \hat{\alpha}=\hat{\mu}\cdot\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}$$

と表すことができる。ここで、推定値 $\hat{\mu}$ 、$\hat{\sigma}^2$ は、モーメント法より、

$$\hat{\mu}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=10 \quad 、\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=53$$

であるから、次を得る。

$$\hat{\alpha}=2.325581\cdots \quad 、\quad \hat{p}=0.188679\cdots$$

よって、解答は　① **（G）**　② **（C）**

（6）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ からの標本とし、標本平均を $\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i/n$ とおくと、

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n(n-1)}}}$$

は自由度 $n-1$ の $t$ −分布に従うので、母平均 $\mu$ の信頼係数 95% の信頼区間は、

$$\bar{X}-t_{n-1}(0.025)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n(n-1)}}<\mu<\bar{X}+t_{n-1}(0.025)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n(n-1)}}$$

となる。よって、信頼区間の幅は、

$$2t_{n-1}(0.025)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n(n-1)}}$$

となる。信頼区間の幅が $1.5\sigma$ より小さくなる確率が 95% 以上であるので、

$$P\left(2t_{n-1}(0.025)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n(n-1)}}<\frac{3}{2}\sigma\right)\geq 0.95$$

より、次を満たすような最小の $n$ を求めればよい。

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<\frac{9n(n-1)}{16t_{n-1}(0.025)^2}\right)\geq 0.95$$

ここで、$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の $\chi^2$–分布に従うので、付表を用いて計算すると、下表の通りとなる。

| $n-1$ | ${\chi_{n-1}}^2(0.05)$ | $9n(n-1)/16t_{n-1}(0.025)^2$ |
|---|---|---|
| 13 | 22.3620 | 21.9344 |
| 14 | 23.6848 | 25.6784 |
| 15 | 24.9958 | 29.7169 |

したがって、求める最小の標本数は 15 となる。

よって、解答は　（Ｆ）

（７）

標本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ は正規分布 $N(\mu_X,43)$ に従い、標本 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ は正規分布 $N(\mu_Y,392)$ に従う。2 つの正規母集団は互いに独立であるので、$X_1,X_2,\cdots,X_n$ と $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ は互いに独立である。よって、標本平均の差 $\bar{Y}-\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu_Y-\mu_X,435/n)$ に従う。帰無仮説 $H_0$ の下で標本平均の差 $\bar{Y}-\bar{X}$ は正規分布 $N(0,435/n)$ に従うので、棄却域を $W=\{\bar{Y}-\bar{X}>c\}$ とすると、第 1 種の誤りの起こる確率 $\alpha$ は、

$$\alpha=P\big((X,Y)\in W\big|H_0\big)=P\left(\frac{\bar{Y}-\bar{X}}{\sqrt{\frac{435}{n}}}>\frac{c}{\sqrt{\frac{435}{n}}}\right)=0.05$$

と表すことができる。よって、標準正規分布の上側 $\varepsilon$ 点 $u(\varepsilon)$ を用いて、

$$\frac{c}{\sqrt{\frac{435}{n}}}=u(0.05)$$

となる。また、対立仮説 $H_1$ の下で標本平均の差 $\bar{Y}-\bar{X}$ は、正規分布 $N(5,435/n)$ に従うので、第 2 種の誤りの起こる確率 $\beta$ は、

$$\beta=P\big((X,Y)\in W^c\big|H_1\big)=P\left(\frac{\bar{Y}-\bar{X}-5}{\sqrt{\frac{435}{n}}}\le\frac{c-5}{\sqrt{\frac{435}{n}}}\right)=0.15$$

と表すことができる。よって、標準正規分布の上側 $\varepsilon$ 点 $u(\varepsilon)$ を用いて、

$$\frac{c-5}{\sqrt{\frac{435}{n}}}=-u(0.15)$$

となる。よって、

$$\frac{c}{c-5}=\frac{u(0.05)}{-u(0.15)}$$

が成り立つので、付表を用いて計算すると、

$$c = \frac{5 \times u(0.05)}{u(0.05) + u(0.15)} = 3.067355 \cdots$$

となる。したがって、

$$n = \frac{u(0.05)^2}{c^2} \times 435 = 125.095026 \cdots$$

となる。

よって、解答は　（D）

（８）

標本 $X$ の大きさを $n$ 、標本平均を $\bar{X}$ とする。帰無仮説 $H_0$： $\mu = \mu_0$ を対立仮説 $H_1$： $\mu > \mu_0$ に対して、有意水準 5% で検定する。標準正規分布の上側 $\varepsilon$ 点を $u(\varepsilon)$ とすると、棄却域は、

$$\bar{X} > \mu_0 + u(0.05)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。真の平均を $\mu_0 + 0.1\mu_0$ としたとき、これを検出できる確率が 99% 以上であるためには、

$$1 - P\left(\bar{X} \leq \mu_0 + u(0.05)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.99$$

となればよい。標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu_0 + 0.1\mu_0, \sigma^2/n)$ に従うので、$\frac{\bar{X} - (\mu_0 + 0.1\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}$ は標準正規分布に従う。よって、

$$P\left(\frac{\bar{X} - (\mu_0 + 0.1\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -\frac{0.1\mu_0\sqrt{n}}{\sigma} + u(0.05)\right) \leq 0.01$$

を満たすような $n$ を求めればよい。すなわち、

$$-\frac{0.1\mu_0\sqrt{n}}{\sigma} + u(0.05) \leq -u(0.01)$$

となる $n$ を求めればよい。$\sigma = 0.143\mu_0$ であるから、付表を用いて計算すると、

$$n \geq (39.712 \times 0.143)^2 = 32.248951 \cdots$$

となる。したがって、標本の大きさは 33 以上であればよい。
よって、解答は　（D）

（９）

変数$d(t)$を次のとおり定義する。

$$d(t) = \begin{cases} 1 & (t = \text{偶数}) \\ 0 & (t = \text{奇数}) \end{cases}$$

この変数$d(t)$を用いたダミー変数$d(t)x$を用い、回帰式$y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2(d(t)x)$としてパラメータ$\alpha$, $\beta_1$, $\beta_2$を推定する。

$$X=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&-1\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\quad Y=\begin{pmatrix}21\\18\\15\\22\end{pmatrix}$$

とすると、$\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2$の推定値$\hat{\alpha},\ \hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2$は、

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\end{pmatrix}=(X^TX)^{-1}X^TY=\left(\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&-1\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&-1\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&-1\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}21\\18\\15\\22\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&10&2\\0&2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&-1\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}21\\18\\15\\22\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&-1\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}21\\18\\15\\22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\1.5\\0.5\end{pmatrix}$$

以上より、

$$\alpha=\hat{\alpha}=19\ ,\ \beta=\begin{cases}\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2=2 & (t=\text{偶数})\\ \hat{\beta}_1\qquad\ =1.5 & (t=\text{奇数})\end{cases}$$

よって、<u>解答は ①（**D**）　②（**G**）　③（**E**）</u>

（１０）

定常$AR(p)$モデル$Y_t=\phi_0+\phi_1Y_{t-1}+\phi_2Y_{t-2}+\cdots+\phi_pY_{t-p}+\varepsilon_t$において、

$$\begin{cases}\xi_0=\dfrac{\phi_0}{1-\phi_1-\cdots\phi_p}\\ \xi_1=\phi_1\\ \xi_2=\phi_1\xi_1+\phi_2\\ \xi_3=\phi_1\xi_2+\phi_2\xi_1+\phi_3\\ \vdots\end{cases}$$

であることから、

$$\xi_0=\frac{1.5}{1-0.9-(-0.14)}=6.25$$

$$\xi_1=0.9$$

$$\xi_2=0.9\times0.9-0.14=0.67$$

いま、$p=2$であることから、$\phi_3=\phi_4=\phi_5=\cdots=0$であるので、

$$\xi_i=0.9\xi_{i-1}-0.14\xi_{i-2}\ \ (i\geq 3)$$

上記の漸化式を変形すると、

$$\xi_i-0.7\xi_{i-1}=0.2(\xi_{i-1}-0.7\xi_{i-2})=0.2^{i-2}(\xi_2-0.7\xi_1)=0.2^i\ \cdot\cdot\text{(A)}$$

$$\xi_i-0.2\xi_{i-1}=0.7(\xi_{i-1}-0.2\xi_{i-2})=0.7^{i-2}(\xi_2-0.2\xi_1)=0.7^i\ \cdot\cdot\text{(B)}$$

$(\mathrm{B})-(\mathrm{A})$より、

$$0.5\xi_{i-1}=0.7^{i}-0.2^{i}$$

であるので、

$$\xi_i=\frac{1}{0.5}\left(0.7^{i+1}-0.2^{i+1}\right)$$

これは$i=1,2$でも成立する。
さらに上記の式を利用して、

$$\xi_3=0.477$$

$$\xi_4=0.3355$$

$$V\left[Y_{t+5}\middle|Y_t,Y_{t-1},\dots,\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1,}\dots\right]=0.6\times(1+0.9^2+0.67^2+0.477^2+0.3355^2)=1.5594\dots$$

よって、解答は　①　(**B**)　②　(**E**)　③　(**G**)　④　(**B**)　⑤　(**C**)

（１１）
点$P$が頂点$A$、頂点$B$、頂点$C$、頂点$D$に位置する確率をそれぞれ$p_{\mathrm{A}}$、$p_{\mathrm{B}}$、$p_{\mathrm{C}}$、$p_{\mathrm{D}}$とし、
確率ベクトルを$(p_{\mathrm{A}},p_{\mathrm{B}},p_{\mathrm{C}},p_{\mathrm{D}})$とおく。
このとき、題意より推移行列は次のようになる。

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1/3&1/6&1/2&0\\4/15&1/15&0&2/3\end{pmatrix}$$

ここで、

---

【ヒント】
4行4列の行列$X$について左上の2行2列の行列が単位行列$E$、右上の2行2列の行列が零行列$O$である、
すなわち、$X=\begin{pmatrix}E&O\\U&R\end{pmatrix}$（$R$, $U$は2行2列の行列）と表される場合、$X^n=\begin{pmatrix}E&O\\(E-R^n)(E-R)^{-1}U&R^n\end{pmatrix}$
となる。

---

を用いて、

$$X^n=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{2}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}&\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}&\left(\frac{1}{2}\right)^n&0\\\frac{4}{5}\times\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}&\frac{1}{5}\times\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}&0&\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{pmatrix}$$

となる。

ここから、3分後に頂点$B$に点$P$が位置していた場合、最初に点$P$が頂点$C$に位置していた確率は

$$\frac{\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}}{0+1+\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}+\frac{1}{5}\times\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}}=0.203619\ldots$$

さらに

$$\lim_{n\to\infty}X^n=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2/3&1/3&0&0\\4/5&1/5&0&0\end{pmatrix}$$

であることから、十分な時間をおいて観察をしたところ、頂点$A$に点$P$が位置していた場合、最初に点$P$が頂点$C$に位置していた確率は、

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+0+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{10}{37}=0.27027\ldots$$

よって、<u>解答は　①　（E）　②　（D）</u>

（１２）

$g(x)=(x+1)e^x$ とし、$U$ を区間 $(0,1)$ の一様分布 $U(0,1)$ に従う確率変数とすると、

$$E[g(U)]=\int_0^1(x+1)e^x dx=[\{(x+1)-1\}e^x]_0^1=e$$

$$E[g(U)^2]=\int_0^1(x+1)^2e^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[\left\{\left(\frac{t}{2}+1\right)^2-\left(\frac{t}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\right\}e^t\right]_0^2=\frac{1}{4}(5e^2-1)$$

$$V[g(U)]=E[g(U)^2]-E[g(U)]^2=\frac{1}{4}(e^2-1)$$

であるから、$U_1,U_2,\cdots,U_{32}$ の 32 個の一様乱数を用いてモンテカルロシミュレーションしたときの誤差の分散は、

$$V\left[\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{32}g(U_i)\right]=\frac{1}{32}V[g(U)]=\frac{1}{128}(e^2-1)=0.04990253125\ldots\fallingdotseq 0.050$$

となる。また、

$$E\big[g(U)\cdot g(1-U)\big]=\int_0^1(x+1)e^x(2-x)e^{1-x}dx=e\int_0^1(x+1)(2-x)dx=\frac{13}{6}$$

$$Cov[g(U),g(1-U)]=E\big[g(U)\cdot g(1-U)\big]-E[g(U)]E[g(1-U)]=\frac{13}{6}e-e^2$$

より、負の相関法を利用するため、$U_1,U_2,\cdots,U_{16},1-U_1,1-U_2,\cdots,1-U_{16}$を用いてモンテカルロシミュレーションしたときの誤差の分散は、

$$V\left[\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{16}\big(g(U_i)+g(1-U_i)\big)\right]=\frac{1}{32}(V[g(U)]+Cov[g(U),g(1-U)])$$

$$= \frac{1}{32}\left(-\frac{3}{4}e^2 + \frac{13}{6}e - \frac{1}{4}\right)$$
$$= 0.003073\ldots$$

となる。

よって、解答は ①（**A**）　②（**C**）

**問題２**

（１）

まず、$k = 1,2,\cdots$とし、$X_A = k$となる確率$P(X_A = k)$を求める。
$M$個の選択肢のうち1つを無作為に選んで解答する場合、各問題に正解する確率は$1/M$である。

$X_A = 1$となる確率を考えると、$X_A = 1$となるのは、1回目の挑戦で$N$問を全問正解する場合であるから、

$$P(X_A = 1) = \left(\frac{1}{M}\right)^N = \frac{1}{M^N}$$

である。

また、$X_A = 2$となるのは、1回目の挑戦で全問正解せず、2回目の挑戦で初めて全問正解する場合であるから、

$$P(X_A = 2) = \{1 - P(X_A = 1)\} \times \left(\frac{1}{M}\right)^N = \left\{1 - \left(\frac{1}{M}\right)^N\right\} \times \left(\frac{1}{M}\right)^N = \left(1 - \frac{1}{M^N}\right) \times \frac{1}{M^N}$$

となる。

同様に考えると、$X_A = k$となる確率は、$(k-1)$回目までの挑戦で全問正解せず、$k$回目の挑戦で全問正解する場合の確率であるから、

$$P(X_A = k) = \underbrace{\left\{1 - \left(\frac{1}{M}\right)^N\right\} \times \cdots \times \left\{1 - \left(\frac{1}{M}\right)^N\right\}}_{(k-1)\text{個}} \times \left(\frac{1}{M}\right)^N = \left\{1 - \left(\frac{1}{M}\right)^N\right\}^{k-1} \times \left(\frac{1}{M}\right)^N$$
$$= \left(1 - \frac{1}{M^N}\right)^{k-1} \times \frac{1}{M^N}$$

と表せる。

以上より、$X_A$の期待値$E[X_A]$は、

$$E[X_A] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X_A = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 - \frac{1}{M^N}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{M^N}$$
$$= \frac{1}{M^N} \times \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 - \frac{1}{M^N}\right)^{k-1}$$

ここで、$\alpha = 1 - 1/M^N$とおくと、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1-\frac{1}{M^N}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

であるから、${}^{1}\!/_{(1-\alpha)^2} = M^{2N}$より、

$$E[X_A] = M^N$$

を得る。

次に、$X_A$の分散$V[X_A]$を求める。
まず、

$$E\left[{X_A}^2\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P(X_A = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \left(1-\frac{1}{M^N}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{M^N}$$
$$= \frac{1}{M^N} \times \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \left(1-\frac{1}{M^N}\right)^{k-1}$$

である。
ここで、$\alpha = 1 - {}^{1}\!/_{M^N}$とおくと、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \left(1-\frac{1}{M^N}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \alpha^{k-1} = \frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$$

であるから、${}^{(1+\alpha)}\!/_{(1-\alpha)^3} = 2M^{3N} - M^{2N}$より、

$$E\left[{X_A}^2\right] = \frac{1}{M^N} \times (2M^{3N} - M^{2N}) = 2M^{2N} - M^N$$

であり、

$$V[X_A] = E\left[{X_A}^2\right] - \{E[X_A]\}^2 = 2M^{2N} - M^N - (M^N)^2 = M^{2N} - M^N$$

となる。

よって、解答は　**①（G）　②（N）　③（G）　④（N）　⑤（B）　⑥（G）　⑦（D）　⑧（L）（②と③は順不同）**

（２）
まず、$k = 1,2,\cdots$とし、$X_B = k$となる確率$P(X_B = k)$を求める。

初めに、$P(X_B = k) > 0$となる$k$の範囲を考えると、$B$さんの戦略から、挑戦の回数が最大となるのは、第1問から第$N$問までの各問題において、初めて解答するときに不正解となる場合である。つまり、1回目の挑戦で第1問に不正解、2回目の挑戦で第2問に不正解、…、$N$回目の挑戦で第$N$問目に不正解となり、$(N+1)$回目の挑戦で全問正解する場合であるため、求める$k$の範囲は、$1 \leq k \leq N+1$となることが分かる。

また、定義より、$X_B = 1$となる確率は$X_A = 1$となる確率に等しいことから、

$$P(X_B = 1) = \frac{1}{M^N}$$

となる。

次に、$2 \leq k \leq N + 1$ の場合を考える。
ここで、確率変数$Z_i (1 \leq i \leq k)$を次のとおり定義する。

・$i$回目の挑戦において第$n$問目で不正解となった場合、$Z_i = n \ (i \leq n \leq N)$
・$i$回目の挑戦において全問正解した場合、$Z_i = N + 1$

このとき、例えば、4回目の挑戦で第5問に不正解となった場合は$Z_4 = 5$となり、6回目の挑戦で全問正解した場合は$Z_6 = N + 1$となる。

さて、$X_B$の定義より、$X_B = k$となるのは「$B$さんがこのクイズに、1回目から$(k-1)$回目までの挑戦ではいずれも全問正解せず、$k$回目の挑戦で初めて全問正解する場合」である。
よって、まずは、

$$Z_s = n_s \quad (s = 1,2,\cdots,k-1)\ (1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} \leq N)$$

となる確率を考える。

まず、1回目の挑戦で第$n_1$問に不正解となる場合は、以下のように表せる。
- 第1問から第$(n_1 - 1)$問までは、選択肢の中からンダムに選んで解答して正解する
- 第$n_1$問は、選択肢の中からランダムに選んで解答して不正解となる

したがって、その確率は、

$$P(Z_1 = n_1) = \left(\frac{1}{M}\right)^{n_1 - 1} \times \left(\frac{M-1}{M}\right)$$

と表せる。

次に、$2 \leq s \leq k - 1\ (k \geq 3)$のとき、$Z_1 = n_1, \cdots, Z_{s-1} = n_{s-1}$の条件の下、$Z_s = n_s$となる場合は、以下のように表せる。
- 第1問から第$n_{s-1}$問までの問題は、$(s-1)$回目の挑戦までに少なくとも一度は解答していることから、必ず正解を選ぶ。
- 第$(n_{s-1} + 1)$問から第$(n_s - 1)$問までの問題は、初めての解答であるため、選択肢の中からランダムに選んで解答して正解する。
- 第$n_s$問は、選択肢の中からランダムに選んで解答して不正解となる。

したがって、その確率は、

$$P(Z_s = n_s | Z_{s-1} = n_{s-1}, \cdots, Z_1 = n_1) = 1^{n_{s-1}} \times \left(\frac{1}{M}\right)^{n_s - n_{s-1} - 1} \times \left(\frac{M-1}{M}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{M}\right)^{n_s - n_{s-1} - 1} \times \left(\frac{M-1}{M}\right)$$

と表せる。

よって、$Z_s = n_s \quad (s = 1,2,\cdots,k-1)\ (1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} \le N)$となる確率は、

$$P(Z_{k-1} = n_{k-1}, Z_{k-2} = n_{k-2}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

$$= P(Z_{k-2} = n_{k-2}, \cdots, Z_1 = n_1) \times P(Z_{k-1} = n_{k-1} | Z_{k-2} = n_{k-2}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

$$= P(Z_{k-3} = n_{k-3}, \cdots, Z_1 = n_1) \times P(Z_{k-2} = n_{k-2} | Z_{k-3} = n_{k-3}, \cdots, Z_1 = n_1)$$
$$\times P(Z_{k-1} = n_{k-1} | Z_{k-2} = n_{k-2}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

$\cdots$

$$= P(Z_1 = n_1) \times \prod_{s=2}^{k-1} P(Z_s = n_s | Z_{s-1} = n_{s-1}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

$$= \left(\frac{1}{M}\right)^{n_1 - 1} \times \left(\frac{M-1}{M}\right) \times \prod_{s=2}^{k-1} \left\{ \left(\frac{1}{M}\right)^{n_s - n_{s-1} - 1} \cdot \left(\frac{M-1}{M}\right) \right\}$$

$$= \left(\frac{M-1}{M}\right)^{k-1} \times \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{M}\right)^{n_1 - 1} \times \left(\frac{1}{M}\right)^{n_2 - n_1 - 1} \times \cdots \times \left(\frac{1}{M}\right)^{n_{k-1} - n_{k-2} - 1}}_{(k-1)\text{個}} \right\}$$

$$= \left(\frac{M-1}{M}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{M}\right)^{n_{k-1} - (k-1)}$$

$$= \frac{(M-1)^{k-1}}{M^{n_{k-1}}} \qquad (2 \le k \le N+1)$$

となる。

さらに、$Z_1 = n_1, \cdots, Z_{k-1} = n_{k-1}$の条件の下、$Z_k = N+1$となるのは、$(k-1)$回目の挑戦で第$n_{k-1}$問に不正解となった後、$k$回目の挑戦において全問正解となる場合であり、その確率は、

$$P(Z_k = N+1 | Z_{k-1} = n_{k-1}, \cdots, Z_1 = n_1) = 1^{n_{k-1}} \times \left(\frac{1}{M}\right)^{N - n_{k-1}} = \left(\frac{1}{M}\right)^{N - n_{k-1}}$$

である。

したがって、$Z_s = n_s \quad (s = 1,2,\cdots,k-1)\ (1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} \le N)$かつ$Z_k = N+1$となる確率は、

$$P(Z_k = N+1, Z_{k-1} = n_{k-1}, Z_{k-2} = n_{k-2}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

$$= P(Z_{k-1} = n_{k-1}, Z_{k-2} = n_{k-2}, \cdots, Z_1 = n_1) \times P(Z_k = N+1 | Z_{k-1} = n_{k-1}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

$$= \frac{(M-1)^{k-1}}{M^{n_{k-1}}} \times \left(\frac{1}{M}\right)^{N - n_{k-1}}$$

$$= \frac{(M-1)^{k-1}}{M^N}$$

である。

以上より、$X_B = k$となる場合、$1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} \leq N$を満たす$n_s\ (s = 1,2,\cdots,k-1)$の組み合わせの数を考慮して、

$$P(X_B = k) = \binom{N}{k-1} \times \frac{(M-1)^{k-1}}{M^N} \qquad (2 \leq k \leq N+1)$$

と表せる。
なお、これは、$k = 1$のときも成り立つ。

これより、$Y$の期待値$E[Y]$は、

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{N+1} k \cdot \binom{N}{k-1} \cdot \frac{(M-1)^{k-1}}{M^N} = \frac{1}{M^N} \times \left\{ \sum_{k=1}^{N+1} k \cdot \binom{N}{k-1} \cdot (M-1)^{k-1} \right\}$$

であるが、ここで、

$$k \times \binom{N}{k} = k \times \frac{N!}{k!\,(N-k)!} = N \times \frac{(N-1)!}{(k-1)!\,(N-k)!} = N \times \binom{N-1}{k-1}$$

であることを利用すると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N+1} k \cdot \binom{N}{k-1} \cdot (M-1)^{k-1} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N} (k+1) \cdot \binom{N}{k} \cdot (M-1)^k \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N} \left\{ k \cdot \binom{N}{k} \cdot (M-1)^k \right\} + \sum_{k=0}^{N} \left\{ \binom{N}{k} \cdot (M-1)^k \right\} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{N} \left\{ k \cdot \binom{N}{k} \cdot (M-1)^k \right\} + \{(M-1)+1\}^N \\
&\quad = \sum_{k=1}^{N} \left\{ N \cdot \binom{N-1}{k-1} \cdot (M-1)^k \right\} + M^N \\
&\quad = N(M-1) \times \sum_{k=1}^{N} \left\{ \binom{N-1}{k-1} \cdot (M-1)^{k-1} \right\} + M^N \\
&\quad = N(M-1) \times \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \binom{N-1}{k} \cdot (M-1)^k \right\} + M^N \\
&\quad = N(M-1)\{(M-1)+1\}^{N-1} + M^N \\
&\quad = N(M-1)M^{N-1} + M^N
\end{aligned}$$

である。
したがって、

$$E[Y] = \frac{1}{M^N} \times \{N(M-1)M^{N-1} + M^N\} = \frac{N(M-1)}{M} + 1 = N + 1 - \frac{N}{M}$$

を得る。

よって、解答は　⑨（Ｋ）　⑩（Ｃ）　⑪（Ｂ）　⑫（Ｊ）　⑬（Ｃ）　⑭（Ｉ）　⑮（Ｊ）　⑯（Ｄ）　⑰（Ｉ）　⑱（Ｄ）　⑲（Ｄ）　⑳（Ｍ）　㉑（Ｅ）

（３）
まず、定義より、$X_C = 1$となる確率は$X_A = 1$となる確率に等しいことから、

$$P(X_C = 1) = \frac{1}{M^N}$$

である。

次に、$X_C = 2$となる確率を考える。1回目の挑戦において「第1問から第$N_0$問までのいずれかの問題に不正解となる場合」「第$(N_0 + 1)$問から第$N$問までのいずれかの問題に不正解となる場合」に場合分けして考える。

(i) 1回目の挑戦において第1問から第$N_0$問までのいずれかの問題に不正解となる場合、$X_C = 2$となるのは以下のように表せる。

・1回目の挑戦において第1問から第$N_0$問までのいずれかの問題に不正解となり、2回目の挑戦において第$N_0$問まですべて正解する

・続けて、2回目の挑戦において第$(N_0 + 1)$問から第$N$問までの問題にすべて正解する

前者の確率は、（２）において$N$を$N_0$に置き換えた場合の確率$P(X_B = 2)$と等しく、後者の確率は、（１）において$N$を$(N - N_0)$に置き換えた場合の確率$P(X_A = 1)$と等しいから、

$$\left\{\binom{N_0}{1} \times \frac{(M-1)}{M^{N_0}}\right\} \times \left\{\left(1 - \frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^0 \times \frac{1}{M^{N-N_0}}\right\} = \frac{1}{M^N} \times N_0(M-1)$$

と表せる。

(ii) 1回目の挑戦において第$(N_0 + 1)$問から第$N$問までのいずれかの問題に不正解となる場合、$X_C = 2$となるのは以下のように表せる。

・1回目の挑戦において第1問から第$N_0$問までのすべての問題に正解する

・続けて、1回目の挑戦において第$(N_0 + 1)$問から第$N$問までのいずれかの問題に不正解となり、2回目の挑戦において第$(N_0 + 1)$問から第$N$問までの問題にすべて正解する（この場合、第1問から第$N_0$問までの問題は、解答したことのある問題であるため、2回目の挑戦において必ず正解を選び解答することに留意。）

前者の確率は、（２）において$N$を$N_0$に置き換えた場合の確率$P(X_B = 1)$と等しく、後者の確率は、（１）において$N$を$(N - N_0)$に置き換えた場合の確率$P(X_A = 2)$と等しいから、

$$\left\{\binom{N_0}{0} \times \frac{(M-1)^0}{M^{N_0}}\right\} \times \left\{\left(1 - \frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^1 \times \frac{1}{M^{N-N_0}}\right\} = \frac{1}{M^N} \times \left(1 - \frac{1}{M^{N-N_0}}\right)$$

と表せる。

以上より、

$$P(X_C=2)=\frac{1}{M^N}\times N_0(M-1)+\frac{1}{M^N}\times\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)=\frac{1}{M^N}\times\left\{N_0(M-1)+1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right\}$$

となる。

さらに、$k=1,2,\cdots$とし、$X_C=k$となる確率$P(X_C=k)$を求めると、
$1\le j\le k-1$として、以下のように表せる。

・第$1$問から第$N_0$問までの問題において$j$回不正解となり$(j+1)$回目の挑戦において第$1$問から第$N_0$問までのすべての問題に正解する
・第$(N_0+1)$問から第$N$問までの問題において$(k-1-j)$回不正解となり、$k$回目の挑戦において第$(N_0+1)$問から第$N$問までの問題にすべて正解する

前者の確率は、（２）において$N$を$N_0$に置き換えた場合の確率$P(X_B=j+1)$と等しく、後者の確率は、（１）において$N$を$(N-N_0)$に置き換えた場合の確率$P(X_A=k-j)$と等しい。

$j$の取り得る範囲として、$j\le N_0$を満たす必要があることに留意すると、
$1\le k\le N_0+1$の場合、$1\le j\le k-1$を満たす$j$について常に$j\le N_0$が成り立つことから、

$$P(X_C=k)=\sum_{j=0}^{k-1}\left[\left\{\binom{N_0}{j}\times\frac{(M-1)^j}{M^{N_0}}\right\}\times\left\{\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-j-1}\times\frac{1}{M^{N-N_0}}\right\}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\binom{N_0}{j}\times\frac{(M-1)^j}{M^N}\times\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-j-1}\right\}$$

である。
また、$k>N_0+1$の場合、$j$の取り得る範囲が$1\le j\le N_0$であることから、

$$P(X_C=k)=\sum_{j=0}^{N_0}\left[\left\{\binom{N_0}{j}\times\frac{(M-1)^j}{M^{N_0}}\right\}\times\left\{\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-j-1}\times\frac{1}{M^{N-N_0}}\right\}\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-1}\times\sum_{j=0}^{N_0}\left\{\binom{N_0}{j}\cdot\frac{(M-1)^j}{M^N}\cdot\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{-j}\right\}$$

ここで、$\beta=1-{}^{1}/_{M^{N-N_0}}$とおくと、

$$P(X_C=k)=\frac{1}{M^N}\times\beta^{k-1}\times\sum_{j=0}^{N_0}\left\{\binom{N_0}{j}\cdot\left(\frac{M-1}{\beta}\right)^j\cdot 1^{N_0-j}\right\}$$

$$=\frac{1}{M^N}\times\beta^{k-1}\times\left(\frac{M-1}{\beta}+1\right)^{N_0}$$

$$=\frac{1}{M^N}\times\beta^{k-N_0-1}\times(M-1+\beta)^{N_0}$$

$$=\frac{1}{M^N}\times\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-N_0-1}\times\left(M-1+1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{N_0}$$

$$=\frac{1}{M^N}\times\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-N_0-1}\times\left(M-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{N_0}$$

$$=\frac{1}{M^{N-N_0}}\times\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0}}\right)^{k-N_0-1}\times\left(1-\frac{1}{M^{N-N_0+1}}\right)^{N_0}$$

と表せる。

よって、解答は **㉒（Ａ）　㉓（Ｇ）　㉔（Ｇ）　㉕（Ｅ）　㉖（Ａ）　㉗（Ｋ）　㉘（Ｃ）　㉙（Ｅ）　㉚（Ｌ）　（㉖と㉗は順不同、㉙と㉚は順不同）**

**問題３**

（１）帰無仮説$H_0: \sigma_x^2=\sigma_y^2$を対立仮説$H_1: \sigma_x^2\neq\sigma_y^2$に対して検定するために、まず帰無仮説と対立仮説の両仮説における母数$\mu_x$、$\mu_y$、$\sigma_x^2$、$\sigma_y^2$の最尤推定値を求める。

標本値として$x_i\ (i=1,\cdots,n_x)$と$y_i\ \left(i=1,\cdots,n_y\right)$を用いる場合、尤度関数$l$は、母数$\mu_x$、$\mu_y$、$\sigma_x^2$、$\sigma_y^2$をパラメータとして、

$$l\left(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2\right)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{\frac{n_x}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_y^2}\right)^{\frac{n_y}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu_x)^2-\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\mu_y\right)^2\right\}$$

で表される。

帰無仮説$H_0: \sigma_x^2=\sigma_y^2(=\sigma^2)$のもとでは、

$$\begin{aligned}l\left(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2\right)&=l\left(\mu_x,\mu_y,\sigma^2,\sigma^2\right)\\&=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu_x)^2+\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\mu_y\right)^2\right\}\right]\end{aligned}$$

であり、最尤推定値は、尤度関数$l$を各パラメータに対して最大ならしめるものであるから、帰無仮説$H_0$のもとでの最尤推定値は、

$$\frac{\partial}{\partial\mu_x}\log l\left(\mu_x,\mu_y,\sigma^2,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu_x)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_y}\log l\left(\mu_x,\mu_y,\sigma^2,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\mu_y\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log l\left(\mu_x,\mu_y,\sigma^2,\sigma^2\right)=-\frac{n_x+n_y}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\mu_x)^2+\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\mu_y\right)^2\right\}=0$$

より、

$$\hat{\mu}_x=\frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x}x_i=\bar{x}$$

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y} y_i = \bar{y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_x + n_y}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \bar{y})^2\right\}$$

である。

同様に、対立仮説$H_1\colon \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$のもとでの最尤推定値は、

$$\frac{\partial}{\partial \mu_x}\log l(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2) = \frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \mu_x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_y}\log l(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2) = \frac{1}{\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \mu_y) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_x^2}\log l(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2) = -\frac{n_x}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{2(\sigma_x^2)^2}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \mu_x)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_y^2}\log l(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2) = -\frac{n_y}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{2(\sigma_y^2)^2}\sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \mu_y)^2 = 0$$

より、

$$\tilde{\mu}_x = \frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x} x_i = \bar{x}$$

$$\tilde{\mu}_y = \frac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y} y_i = \bar{y}$$

$$\tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \bar{x})^2 = s_x^2$$

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \bar{y})^2 = s_y^2$$

である。

よって、解答は　①（G）　②（H）　③（A）　④（B）　⑤（A）　⑥（B）　⑦（A）　⑧（B）　⑨（A）　⑩（B）　⑪（C）　⑫（D）

（２）尤度比$\lambda$は（１）の尤度関数$l$を用いて、

$$\lambda = \frac{\max_{\mu_x,\mu_y,\sigma^2} l(\mu_x, \mu_y, \sigma^2, \sigma^2)}{\max_{\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2} l(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2)}$$

で与えられる。したがって、（１）の最尤推定値を用いれば、

$$\lambda = \frac{l(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}^2)}{l(\tilde{\mu}_x, \tilde{\mu}_y, \tilde{\sigma}_x^2, \tilde{\sigma}_y^2)}$$

である。

（１）の最尤推定値の結果を代入すれば、

$$l(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}^2) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \hat{\mu}_x)^2 + \sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \hat{\mu}_y)^2\right\}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}} \exp\left(-\frac{n_x + n_y}{2}\right)$$

$$l(\tilde{\mu}_x, \tilde{\mu}_y, \tilde{\sigma}_x^2, \tilde{\sigma}_y^2) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_x^2}\right)^{\frac{n_x}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_y^2}\right)^{\frac{n_y}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_x^2}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \tilde{\mu}_x)^2 - \frac{1}{2\tilde{\sigma}_y^2}\sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \tilde{\mu}_y)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n_x+n_y}{2}} \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_x^2}\right)^{\frac{n_x}{2}} \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_y^2}\right)^{\frac{n_y}{2}} \exp\left(-\frac{n_x + n_y}{2}\right)$$

であるから、尤度比$\lambda$は

$$\lambda = \frac{(\tilde{\sigma}_x^2)^{\frac{n_x}{2}} (\tilde{\sigma}_y^2)^{\frac{n_y}{2}}}{(\hat{\sigma}^2)^{\frac{n_x+n_y}{2}}}$$

となる。

ここで、$s^2 = \frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{n_x + n_y}$とすると、$\hat{\sigma}^2 = s^2$であり、これと$\tilde{\sigma}_x^2 = s_x^2$および$\tilde{\sigma}_y^2 = s_y^2$から

$$\lambda = \left(\frac{s_x^2}{s^2}\right)^{\frac{n_x}{2}} \left(\frac{s_y^2}{s^2}\right)^{\frac{n_y}{2}}$$

となる。さらに、$t = \frac{n_x s_x^2}{n_y s_y^2} (> 0)$とおくと、

$$\frac{s^2}{s_x^2} = \frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{n_x + n_y} \Big/ s_x^2 = \frac{n_x + n_x \cdot \frac{n_y s_y^2}{n_x s_x^2}}{n_x + n_y} = \frac{n_x}{n_x + n_y}\left(\frac{1}{t} + 1\right)$$

$$\frac{s^2}{s_y^2} = \frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{n_x + n_y} \Big/ s_y^2 = \frac{n_y \cdot \frac{n_x s_x^2}{n_y s_y^2} + n_y}{n_x + n_y} = \frac{n_y}{n_x + n_y}(t + 1)$$

であるから、

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{n_x}{n_x + n_y}\right)^{\frac{n_x}{2}} \left(\frac{n_y}{n_x + n_y}\right)^{\frac{n_y}{2}} \left(\frac{1}{t} + 1\right)^{\frac{n_x}{2}} (t + 1)^{\frac{n_y}{2}}$$

と表せる。

$t$によらない部分を$C=\left(\frac{n_x}{n_x+n_y}\right)^{\frac{n_x}{2}}\left(\frac{n_y}{n_x+n_y}\right)^{\frac{n_y}{2}}(>0)$とおいて、

$$\varphi(t)=C\left(\frac{1}{t}+1\right)^{\frac{n_x}{2}}(t+1)^{\frac{n_y}{2}}$$

とし、$t>0$で$\varphi(t)$の増減を調べる。

$$\varphi'(t)=\frac{C}{2t^2}\left(\frac{1}{t}+1\right)^{\frac{n_x}{2}-1}(t+1)^{\frac{n_y}{2}}\left(n_y t-n_x\right)$$

であるから、$\varphi(t)$は、$0<t<\frac{n_x}{n_y}$で単調減少、$t>\frac{n_x}{n_y}$で単調増加である。また、$\varphi\left(\frac{n_x}{n_y}\right)=1$、$\lim_{t\to+0}\varphi(t)=\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$である。

これにより、尤度比$\lambda$は、$0<t<\frac{n_x}{n_y}$で単調増加、$t>\frac{n_x}{n_y}$で単調減少であり、$t\to+0$および$t\to\infty$の場合の挙動も考慮すると、$\varphi(a_1)=\varphi(a_2)=\frac{1}{k}$をみたす$0<a_1=a_1(k)<\frac{n_x}{n_y}$および$a_2=a_2(k)>\frac{n_x}{n_y}$に対して、

$$\lambda\le k \Leftrightarrow t\le a_1(k)\ \text{または}\ t\ge a_2(k)$$

が成り立つ。

さらに、$f=\frac{n_x s_x^2/(n_x-1)}{n_y s_y^2/(n_y-1)}=\frac{n_y-1}{n_x-1}t$とすると、結局、$K_1(k)=\frac{n_y-1}{n_x-1}a_1(k)$および$K_2(k)=\frac{n_y-1}{n_x-1}a_2(k)$に対して

$$\lambda\le k \Leftrightarrow f\le K_1(k)\ \text{または}\ f\ge K_2(k)$$

となるから、

$$R_k=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n_x},y_1,y_2,\cdots,y_{n_y}\right);\ f\le K_1(k)\ \text{または}\ f\ge K_2(k)\right\}$$

である。

一方、統計値$f$を実現する統計量$F$は、$H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2$のもとで自由度$\left(n_x-1,n_y-1\right)$の$F$分布に従うから、有意水準$\varepsilon$の両側検定を行うには、

$$f\le F_{n_y-1}^{n_x-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \text{または}\ f\ge F_{n_y-1}^{n_x-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

のときに$H_0$を棄却すればよい。

なお、$F$分布表を用いて検定する場合、$F$分布表には上側$\varepsilon$点しか示されていないため、$F$分布に従う統計量$F$で

$$P\left(F\le F_{n_y-1}^{n_x-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=P\left(\frac{1}{F}\ge\frac{1}{F_{n_y-1}^{n_x-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)=P\left(\frac{1}{F}\ge F_{n_x-1}^{n_y-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

となることを用いて、

$$f = \frac{n_x s_x^2/(n_x - 1)}{n_y s_y^2/\left(n_y - 1\right)} \geq 1 \text{ ならば } f \geq F_{n_y-1}^{n_x-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n_y s_y^2/\left(n_y - 1\right)}{n_x s_x^2/(n_x - 1)} \geq 1 \text{ ならば } \frac{1}{f} \geq F_{n_x-1}^{n_y-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

のいずれかの場合に$H_0$を棄却する。

よって、解答は　⑬（E）　⑭（I）　⑮（H）　⑯（F）　⑰（G）　⑱（K）　⑲（H）　⑳（C）　㉑（E）　㉒（C）　㉓（C）　㉔（D）

（３）X、Y 両班における各生徒の得点が、それぞれ正規分布$N(\mu_x, \sigma_x^2)$、$N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right)$に従うものとし、帰無仮説$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$を対立仮説$H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$に対して検定する。

（１）および（２）の記号を用いると、

$$n_x = 10, n_y = 8, \bar{x} = 70, \bar{y} = 67, s_x^2 = 61, s_y^2 = 154$$

であるから、

$$\frac{1}{f} = \frac{n_y s_y^2/\left(n_y - 1\right)}{n_x s_x^2/(n_x - 1)} = \frac{8 \times 154/7}{10 \times 61/9} = 2.5967 \ldots < F_9^7(0.025) = 4.1970$$

となる。よって、$H_0$は採択され、得点のバラツキについて X、Y 両班に差があるとはいえない。

よって、解答は　㉕（B）　㉖（H）　㉗（D）　㉘（A）

問題１

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| （１） | | （Ａ） | ５点 | （９） | ① | （Ｄ） | ２点 |
| （２） | ① | （Ｅ） | １点 | | ② | （Ｇ） | １点 |
| | ② | （Ｄ） | ２点 | | ③ | （Ｅ） | ２点 |
| | ③ | （Ｄ） | ２点 | （１０） | ① | （Ｂ） | １点 |
| （３） | ① | （Ｈ） | 完答で５点 | | ② | （Ｅ） | 完答で２点 |
| | ② | （Ｇ） | | | ③ | （Ｇ） | |
| （４） | ① | （Ｄ） | ２点 | | ④ | （Ｂ） | |
| | ② | （Ａ） | １点 | | ⑤ | （Ｃ） | ２点 |
| | ③ | （Ｉ） | ２点 | （１１） | ① | （Ｅ） | ３点 |
| （５） | ① | （Ｇ） | ２点 | | ② | （Ｄ） | ２点 |
| | ② | （Ｃ） | ３点 | （１２） | ① | （Ａ） | ２点 |
| （６） | | （Ｆ） | ５点 | | ② | （Ｃ） | ３点 |
| （７） | | （Ｄ） | ５点 | | | | |
| （８） | | （Ｄ） | ５点 | | | | |

問題２

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| （１） | ① | （Ｇ） | １点 | （２） | ⑯ | （Ｄ） | 完答で１点 |
| | ② | （Ｎ） | 完答で１点<br>②③は順不同 | | ⑰ | （Ｉ） | |
| | ③ | （Ｇ） | | | ⑱ | （Ｄ） | 完答で２点 |
| | ④ | （Ｎ） | 完答で２点 | | ⑲ | （Ｄ） | |
| | ⑤ | （Ｂ） | | | ⑳ | （Ｍ） | |
| | ⑥ | （Ｇ） | | | ㉑ | （Ｅ） | １点 |
| | ⑦ | （Ｄ） | ２点 | （３） | ㉒ | （Ａ） | 完答で１点 |
| | ⑧ | （Ｌ） | ２点 | | ㉓ | （Ｇ） | |
| （２） | ⑨ | （Ｋ） | １点 | | ㉔ | （Ｇ） | |
| | ⑩ | （Ｃ） | 完答で２点 | | ㉕ | （Ｅ） | 完答で１点<br>㉖㉗は順不同 |
| | ⑪ | （Ｂ） | | | ㉖ | （Ａ） | |
| | ⑫ | （Ｊ） | | | ㉗ | （Ｋ） | |
| | ⑬ | （Ｃ） | 完答で２点 | | ㉘ | （Ｃ） | 完答で１点<br>㉙㉚は順不同 |
| | ⑭ | （Ｉ） | | | ㉙ | （Ｅ） | |
| | ⑮ | （Ｊ） | | | ㉚ | （Ｌ） | |

問題３

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| （１） | ① | （G） | 完答で２点 | （２） | ⑮ | （H） | 完答で１点 |
| | ② | （H） | | | ⑯ | （F） | |
| | ③ | （A） | | | ⑰ | （G） | 完答で２点 |
| | ④ | （B） | | | ⑱ | （K） | |
| | ⑤ | （A） | 完答で２点 | | ⑲ | （H） | |
| | ⑥ | （B） | | | ⑳ | （C） | |
| | ⑦ | （A） | 完答で２点 | | ㉑ | （E） | ２点 |
| | ⑧ | （B） | | | ㉒ | （C） | 完答で１点 |
| | ⑨ | （A） | 完答で２点 | | ㉓ | （C） | |
| | ⑩ | （B） | | | ㉔ | （D） | １点 |
| | ⑪ | （C） | 完答で１点 | （３） | ㉕ | （B） | 完答で１点 |
| | ⑫ | （D） | | | ㉖ | （H） | |
| （２） | ⑬ | （E） | 完答で２点 | | ㉗ | （D） | 完答で１点 |
| | ⑭ | （I） | | | ㉘ | （A） | |

以上