数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（１）次の（ア）～（オ）のそれぞれの場合において、ｐとｑの関係を考える。

（ア）確率事象 A,B について、

ｐ： A,B は独立

ｑ： $\mathrm{P}\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}$

ｐはｑであるための $\boxed{\quad ① \quad}$

（イ）確率事象 A,B について、$\mathrm{P}\{B\}\neq 0$ とするとき、

ｐ： A,B は独立

ｑ： $\mathrm{P}\{A|B\}=P\{A\}$

ｐはｑであるための $\boxed{\quad ② \quad}$

（ウ）確率事象 A,B,C について、

ｐ： A,B は独立 かつ B,C は独立 かつ C,A は独立

ｑ： A,B,C は独立

ｐはｑであるための $\boxed{\quad ③ \quad}$

（エ）確率変数 X,Y について、

ｐ： X,Y は独立

ｑ： X^2,Y^2 は独立

ｐはｑであるための $\boxed{\quad ④ \quad}$

（オ）確率変数 X,Y について、X,Y,XYの期待値がそれぞれ存在するとき、

ｐ： X,Y は独立

ｑ： $E[XY]=E[X]\cdot E[Y]$

ｐはｑであるための $\boxed{\quad ⑤ \quad}$

（A） 必要十分条件である。

（B） 必要条件であるが、十分条件ではない。

（C） 十分条件であるが、必要条件ではない。

（D） 必要条件でも十分条件でもない。

（２）確率変数 X,Y の結合確率密度関数が

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy & (0<y<x<1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

で与えられるとき、$Z=X+Y$ の確率密度関数は

$$g(z)=\begin{cases}\boxed{\quad ① \quad} & (0<z\leq 1)\\ \boxed{\quad ② \quad} & (1<z<2)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

である。

（A）z^3　（B）$\frac{1}{3}z^3$　（C）$\frac{2}{3}z^3$

（D）$\frac{4}{3}z^3$　（E）$\frac{8}{3}z^3$　（F）$-\frac{2}{3}z^3+4z-\frac{8}{3}$

（G）$-\frac{2}{3}z^3+\frac{13}{3}z-\frac{10}{3}$　（H）$-\frac{2}{3}z^3+z^2+\frac{4}{3}z-\frac{4}{3}$　（I）$-\frac{1}{3}z^3+2z-\frac{4}{3}$

（J）$-\frac{1}{3}z^3+\frac{5}{3}z-\frac{2}{3}$

（３）確率変数AおよびBが互いに独立で、それぞれ[0,1]上の一様分布に従うものとする。$X=\max(A,B)$、$Y=\min(A,B)$とした時、Xの積率母関数$M_X(t)$は$\boxed{\quad ① \quad}$、Yの積率母関数$M_Y(t)$は$\boxed{\quad ② \quad}$である。

（A）$2\left(\frac{e^t+t+1}{t^2}\right)$　（B）$2\left(\frac{e^t-t+1}{t^2}\right)$　（C）$2\left(\frac{e^t+t-1}{t^2}\right)$　（D）$2\left(\frac{e^t-t-1}{t^2}\right)$

（E）$2\left(\frac{te^t+t+1}{t^2}\right)$　（F）$2\left(\frac{te^t+t-1}{t^2}\right)$　（G）$2\left(\frac{te^t-t-1}{t^2}\right)$　（H）$2\left(\frac{te^t+e^t+1}{t^2}\right)$

（I）$2\left(\frac{te^t-e^t+1}{t^2}\right)$　（J）$2\left(\frac{te^t+e^t-1}{t^2}\right)$

（４）表の出る確率がp、裏の出る確率が$1-p$であるコインを使い、$n(n \geq 3)$回のコイントスを行う。$X_i(i=1,2,\cdots,n-1)$を下表の値をとる確率変数とする。

コイントスの結果		X_i
i回目	$i+1$回目	
表	表	0
表	裏	0
裏	表	1
裏	裏	0

$X=\sum_{i=1}^{n-1} X_i$としたとき、$V[X]=p(1-p)\left\{\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)n+\boxed{\quad ② \quad}\right\}$である。

（A）$3p^2+3p+1$　（B）$3p^2-3p+1$　（C）$3p^2+3p-1$　（D）$-3p^2+3p+1$

（E）$-3p^2+3p-1$　（F）$5p^2+5p+1$　（G）$5p^2+5p-1$　（H）$5p^2-5p-1$

（Ｉ）$-5p^2+5p-1$　（J）$-5p^2+5p+1$

（５）$[a,b]$（ただし、$a<b$）上の一様分布に従う母集団から次の標本値を得た。モーメント法によりa,bを推定すると、aに最も近い値は$\boxed{\quad ① \quad}$であり、bに最も近い値は$\boxed{\quad ② \quad}$である。一方、最尤法で推定すると、aに最も近い値は$\boxed{\quad ③ \quad}$であり、bに最も近い値は$\boxed{\quad ④ \quad}$である。

$$-2.6,\quad -1.7,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 1.9,\quad 2.4$$

［①、③の選択肢］

（A）-3.2　（B）-3.1　（C）-3.0　（D）-2.9　（E）-2.8

（F）-2.7　（G）-2.6　（H）-2.5　（Ｉ）-2.4　（J）-2.3

［②、④の選択肢］

（A）2.1　（B）2.2　（C）2.3　（D）2.4　（E）2.5

（F）2.6　（G）2.7　（H）2.8　（Ｉ）2.9　（J）3.0

（６）ある試験の受験者のうち男性40人に結果を確認したところ、16人が合格していた。一方、女性5人に結果を確認したところ、2人が合格していた。このとき、男性の受験者全体の合格率を近似法によって信頼係数90%で区間推定すると、信頼区間の下限に最も近い値は ① であり、信頼区間の上限に最も近い値は ② である。一方、女性の受験者全体の合格率を精密法によって信頼係数90%で区間推定すると、信頼区間の下限に最も近い値は ③ であり、信頼区間の上限に最も近い値は ④ である。

[①、③の選択肢]

（A）0.05　（B）0.07　（C）0.08　（D）0.10　（E）0.12

（F）0.14　（G）0.25　（H）0.27　（I）0.30　（J）0.39

[②、④の選択肢]

（A）0.40　（B）0.50　（C）0.53　（D）0.55　（E）0.75

（F）0.81　（G）0.84　（H）0.85　（I）0.90　（J）0.94

（７）ある箱に赤玉と白玉が合計で4個入っており、その内訳は次のいずれかであることがわかっている。

・赤玉が3個、白玉が1個である
・赤玉が1個、白玉が3個である

いま、帰無仮説を「赤玉が3個、白玉が1個である」とする。この箱から玉を1個取り出し、色を確認したあとに玉を箱に戻し、赤玉が3回出るまで繰り返す試行を行う。1回目の試行と2回目の試行でともに白玉が出た回数が2以上であれば帰無仮説を棄却し、対立仮説を採択する検定を行うとき、第1種の誤りの起こる確率に最も近い値は ① であり、検出力に最も近い値は ② である。

[①の選択肢]

（A）0.024　（B）0.050　（C）0.068　（D）0.088

（E）0.106　（F）0.156　（G）0.223　（H）0.262

[②の選択肢]

（A）0.051　（B）0.054　（C）0.099　（D）0.365

（E）0.635　（F）0.901　（G）0.946　（H）0.949

（8）ある洋菓子店が、来店した男性と女性にチーズケーキとショートケーキのどちらが好きかアンケートを行ったところ、下表の結果を得た。このアンケート結果をもとに、男女間でケーキの嗜好に差があるかを確認したい。帰無仮説H_0を「性別とケーキの嗜好は互いに独立である」として、有意水準5%で検定を行う。まず、独立性の検定を行うと、検定統計量χ^2に最も近い値は$\boxed{\quad ① \quad}$であり、帰無仮説H_0は$\boxed{\quad ② \quad}$される。次に、イェーツの補正を行うと、検定統計量χ'^2に最も近い値は$\boxed{\quad ③ \quad}$となり、帰無仮説H_0は$\boxed{\quad ④ \quad}$される。

	男性	女性	計
チーズケーキが好き	4	12	16
ショートケーキが好き	9	5	14
計	13	17	30

[①、③の選択肢]

（A）2.4　（B）2.9　（C）3.2　（D）3.7　（E）4.2

（F）4.7　（G）5.1　（H）5.5　（I）5.9　（J）6.4

[②、④の選択肢]

（A）採択　（B）棄却

（9）都市Ａの１日の最高気温と最低気温を７日間にわたって測定したところ、下表のデータを得た。このデータから都市Ａの最高気温yについて、説明変数を都市Ａの最低気温xとした回帰直線を最小二乗法により求めると、$y=$ ① $+$ ② xであり、決定係数は ③ である。また、yをこの回帰直線によって推定するときの誤差分散の推定値は ④ である。

	１日目	２日目	３日目	４日目	５日目	６日目	７日目
最低気温(℃)	22	24	25	24	24	26	23
最高気温(℃)	26	29	32	33	30	34	33

[①の選択肢]

（Ａ）-9　（Ｂ）-7　（Ｃ）-5　（Ｄ）-3　（Ｅ）-1

（Ｆ）1　（Ｇ）3　（Ｈ）5　（Ｉ）7　（Ｊ）9

[②の選択肢]

（Ａ）-1　（Ｂ）$-\frac{1}{2}$　（Ｃ）$\frac{1}{3}$　（Ｄ）$\frac{1}{2}$　（Ｅ）$\frac{2}{3}$

（Ｆ）1　（Ｇ）$\frac{6}{5}$　（Ｈ）$\frac{5}{4}$　（Ｉ）$\frac{4}{3}$　（Ｊ）$\frac{3}{2}$

[③の選択肢]

（Ａ）$\frac{11}{48}$　（Ｂ）$\frac{9}{32}$　（Ｃ）$\frac{11}{32}$　（Ｄ）$\frac{17}{48}$　（Ｅ）$\frac{25}{64}$

（Ｆ）$\frac{15}{32}$　（Ｇ）$\frac{25}{48}$　（Ｈ）$\frac{21}{32}$　（Ｉ）$\frac{37}{48}$　（Ｊ）$\frac{29}{32}$

[④の選択肢]

（Ａ）$\frac{7}{5}$　（Ｂ）$\frac{11}{9}$　（Ｃ）$\frac{22}{7}$　（Ｄ）$\frac{33}{10}$　（Ｅ）$\frac{47}{6}$

（Ｆ）$\frac{57}{7}$　（Ｇ）$\frac{51}{10}$　（Ｈ）$\frac{77}{6}$　（Ｉ）$\frac{88}{9}$　（Ｊ）$\frac{68}{5}$

（１０）標準ブラウン運動 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ について、6 次の積率 $\mathrm{E}\left(X_t{}^6\right) =$ $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、$s > t$ のとき、$\mathrm{E}\left(X_s \cdot X_t{}^5\right) =$ $\boxed{\quad ② \quad}$ である。ただし、必要ならば、$p > 0$ に対して以下で定義されるガンマ関数

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

において、$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となることを用いても良い。

（Ａ）0　（Ｂ）t^3　（Ｃ）$3t^3$　（Ｄ）$4t^3$　（Ｅ）$15t^3$

（Ｆ）$120t^3$　（Ｇ）$s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}}$　（Ｈ）$3s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}}$　（Ｉ）$15s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}}$　（Ｊ）$120s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}}$

（１１）定常 $ARMA(1,1)$ モデル

$$Y_t = \frac{1}{3} Y_{t-1} - \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \left(\varepsilon_t \sim N(0, 2^2)\right)$$

において、$\{Y_t\}$の分散 γ_0 の値は$\boxed{\quad ① \quad}$であり、$h \geq 1$の時、$\{Y_t\}$に関する時差hの自己共分散γ_hの値は$\boxed{\quad ② \quad}$である。

［①の選択肢］

（Ａ）$\dfrac{33}{16}$　（Ｂ）$\dfrac{13}{6}$　（Ｃ）$\dfrac{9}{4}$　（Ｄ）$\dfrac{19}{8}$

（Ｅ）$\dfrac{33}{8}$　（Ｆ）$\dfrac{13}{3}$　（Ｇ）$\dfrac{9}{2}$　（Ｈ）$\dfrac{19}{4}$

［②の選択肢］

（Ａ）$\left(-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$　（Ｂ）$\left(-\frac{5}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$　（Ｃ）$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$　（Ｄ）$\left(-\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$

（Ｅ）$\left(-\frac{5}{16}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$　（Ｆ）$\left(-\frac{5}{18}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$　（Ｇ）$\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$　（Ｈ）$\left(-\frac{5}{24}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$

（１２）確率変数Xは平均$i(i=1,2,3)$の幾何分布$P_i(X_i=k)=p_i(1-p_i)^k(k=0,1,\cdots)$で重み付き平均として表される確率変数

$$P(X=k)=\frac{1}{4}P_1(X_1=k)+\frac{1}{3}P_2(X_2=k)+\frac{5}{12}P_3(X_3=k)$$

とし、Xについて、以下の1～3の手順でシミュレーションを行う。

１．(0,1)区間の一様分布に従う確率変数をUとし、一様乱数によりUの実現値u_1、u_2を生成する。

２．１で得られた実現値u_1により合成法を用いてXが従う分布を決定する。なおその際には、$P_i(X_i=k)$の重みが小さいものから順に、u_1の範囲を定めるものとする。

３．１で得られた実現値u_2により逆関数法を用いてXの実現値を決定する。

いま、一様乱数によりUの実現値を生成したところ、$u_1=0.9$、$u_2=0.4$を得た。このとき、Xの実現値は$\boxed{}$である。

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3　（E）4

（F）5　（G）6　（H）7　（I）8　（J）9

問題２． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。また、空欄のうち⑩～⑰については、最も近い値を選択しなさい。

（２０点）

（１）Ａさんはあるカードを集めている。このカードについては次のことが分かっている。

・カードは1枚ずつ袋に入った状態で販売されており、入っているカードの種類は購入するまで分からない。 ・袋に入っているカードは全部で100種類あり、うち3種類は「プレミアム」と呼ばれている。 ・どの種類のカードも購入回数に関わらず常に確率0.01で袋に入っている。 ・カードは常に製造されており、どれだけ購入してもなくなることはない。

Ａさんが、この「プレミアム」を1枚も持っていない状態からカードを購入し続けて、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかる購入回数の平均値を、次の2通りの方法で求めたい。なお、3種類の「プレミアム」をすべて集めた以降はカードを購入しないものとする。

Ⅰ）Ａさんが持っていない「プレミアム」の種類がk種類$(k=1,2,3)$である状態からカードを購入し続け、k種類のうちいずれか1種類を引き当てるまでにかかった購入回数として確率変数X_kを定義する。まず、$k=3$の場合を考えると、

$$P(X_3=n)=\boxed{①}\times\left(\boxed{②}\right)^{\boxed{③}}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

と表せることから、$E[X_3]=\boxed{④}$を得る。
$k=1,2$の場合についても同様に考えることで$E[X_1]$、$E[X_2]$を計算すると、求める購入回数の平均値は$\boxed{⑤}$となる。

Ⅱ）Ａさんが持っていない「プレミアム」の種類がk種類$(k=1,2,3)$である状態からカードを購入し続け、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかった購入回数の平均値をE_kと置くと、次の漸化式が成り立つ。

$$E_k=1+\boxed{⑥}\times E_{k-1}+\left(1-\boxed{⑥}\right)\times E_k\quad(k=2,3)$$

以上より、求める購入回数の平均値$\boxed{⑤}$を得る。

（２）（１）のカードについて20枚が1セットになったパックが発売されることになった。このパックに入っているカードについては次のことが分かっている。

- パックに入っているカードの種類は購入するまで分からない。
- パックに入っている20枚のカードのうち19枚については、いずれの1枚も100種類のカードのうちの1種類がそれぞれ確率0.01で入っている。
- 残りの1枚については「プレミアム」である確率が10倍になっている。つまり、この1枚が「プレミアム」である確率は0.3であり、3種類のいずれかである確率は互いに等しい。
- パックには同一種類のカードが複数枚入っている場合もある。
- パックは常に製造されており、どれだけ購入してもなくなることはない。

Ａさんが「プレミアム」を1枚も持っていない状態からこのパックのみを購入し続けたとき、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかる購入回数の平均値を求めたい。なお、3種類の「プレミアム」をすべて集めた以降はパックを購入しないものとする。また、必要であれば$0.99^{19} = 0.8262$、$0.98^{19} = 0.6812$、$0.97^{19} = 0.5606$を用いなさい。

Ａさんが持っていない「プレミアム」がi種類 $(i = 1,2,3)$ の状態で、パックを1つ購入したとき、このi種類のうちj種類 $(0 \leq j \leq i)$ の「プレミアム」が入っている確率を$P(i,j)$とする。また、Ａさんが持っていない「プレミアム」がi種類 $(i = 1,2,3)$ の状態からパックのみを購入し続けたとき、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかる購入回数の平均値をE_i^pとする。

まず、$i = 3$ の場合を考える。このとき、（１） Ⅱ）と同様に考えることで、次の関係式を得る。

$$E_3^p = 1 + \boxed{⑦} \times E_3^p + \boxed{⑧} \times E_2^p + \boxed{⑨} \times E_1^p \quad \cdots\cdots（\mathrm{A}）$$

次に$P(i,j)$を求めたい。

（ア）$j = 0$ の場合

この場合、20枚の中に「プレミアム」が１枚も入っていない確率であるから、

$$P(3,0) = \boxed{⑩}$$

（イ）$j = 1$ の場合

パックに入っている20枚のカードのうち「プレミアム」である確率が高い1枚のカードの種類が「プレミアム」であるかどうかで場合分けして考えると、求める確率は、

$$P(3,1) = \boxed{⑪}$$

（ウ）$j=2$ の場合

（イ）と同様に考えれば、

$$P(3,2)=\boxed{⑫}$$

$i=1,2$ の場合についても同様に考えることでE_i^p を求めると、

$$E_1^p=\boxed{⑬}、E_2^p=\boxed{⑭}$$

以上より、これらを（A）に代入して、

$$E_3^p=\boxed{⑮}$$

を得る。

（３）カード1枚の値段は100円であり、パック1つの値段は$2{,}700$円であるという。Ａさんはなるべく少ない金額で「プレミアム」をすべて集めたいと考え、次の方法をとることにした。

【方法】次の段階Ⅰ、段階Ⅱの順番で実行する。

段階Ⅰ）「プレミアム」を少なくともm種類$(m=0,1,2,3)$入手するまでパックを購入する。
ただし、$m=0$の場合は初めから段階Ⅱを実行するものとする。

段階Ⅱ）段階Ⅰで入手できなかった残りの「プレミアム」をすべて集めるまでカードを1枚ずつ購入する。3種類の「プレミアム」をすべて集めた以降はカードを購入しない。
なお、段階Ⅰで3種類の「プレミアム」がすべて集まった場合には、段階Ⅱは実行しないものとする。

Ａさんは、「プレミアム」を1枚も持っていない状態でmの値を一つ定め、上記の方法をとる。
このとき、支払う金額の平均値が最も小さくなるようなmの値を求めたい。
なお、必要であれば$0.99^{19}=0.8262$、$0.98^{19}=0.6812$、$0.97^{19}=0.5606$を用いなさい。

まず、$m=0$の場合に支払う金額の平均値は、（１）より$\boxed{⑤}\times 100$円である。
また、$m=3$の場合に支払う金額の平均値は、（２）より$\boxed{⑮}\times 2{,}700$円である。

$m=1$の場合に支払う金額の平均値を求めると、$\boxed{⑯}$円であり、$m=2$の場合に支払う金額の平均値を求めると、$\boxed{⑰}$円である。

以上より、求めるmの値は$\boxed{⑱}$である。

［①～⑥の選択肢］

（A）$n-2$　（B）$n-1$　（C）n　（D）$n+1$

（E）$\dfrac{1}{k}$　（F）$\dfrac{100}{k}$　（G）$\dfrac{k}{100}$　（H）k

（I）0.01　（J）0.02　（K）0.03　（L）0.97

（M）0.98　（N）0.99　（O）$\dfrac{94}{3}$　（P）$\dfrac{97}{3}$

（Q）$\dfrac{100}{3}$　（R）48　（S）49　（T）50

（U）98　（V）99　（W）100　（X）$\dfrac{532}{3}$

（Y）$\dfrac{541}{3}$　（Z）$\dfrac{550}{3}$

［⑦～⑨の選択肢］

（A）$P(1,0)$　（B）$P(2,0)$　（C）$P(3,0)$　（D）$P(1,1)$

（E）$P(2,1)$　（F）$P(3,1)$　（G）$P(2,2)$　（H）$P(3,2)$

（I）$P(3,3)$

［⑩～⑫の選択肢］

（Ａ）0.0606	（Ｂ）0.0947	（Ｃ）0.1041	（Ｄ）0.1382
（Ｅ）0.1816	（Ｆ）0.2250	（Ｇ）0.2569	（Ｈ）0.2888
（Ｉ）0.3406	（Ｊ）0.3924	（Ｋ）0.4250	（Ｌ）0.4576
（Ｍ）0.4979	（Ｎ）0.5381	（Ｏ）0.5783	（Ｐ）0.5854

［⑬～⑮の選択肢］

（Ａ）1.34	（Ｂ）2.02	（Ｃ）2.71	（Ｄ）3.31
（Ｅ）3.90	（Ｆ）4.22	（Ｇ）4.61	（Ｈ）4.92
（Ｉ）5.27	（Ｊ）5.60	（Ｋ）6.08	（Ｌ）6.44
（Ｍ）6.75	（Ｎ）7.29	（Ｏ）7.87	（Ｐ）8.36

［⑯～⑱の選択肢］

（Ａ）0	（Ｂ）1	（Ｃ）2	（Ｄ）3
（Ｅ）17,654	（Ｆ）17,690	（Ｇ）17,727	（Ｈ）17,763
（Ｉ）17,799	（Ｊ）17,836	（Ｋ）17,872	（Ｌ）17,908
（Ｍ）17,944	（Ｎ）17,981	（Ｏ）18,017	（Ｐ）18,053
（Ｑ）18,089	（Ｒ）18,126	（Ｓ）18,162	（Ｔ）18,198

問題３． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（１）一様分布$U(0,1)$の母集団からの標本変量$X_1, X_2 \cdots, X_{\alpha+\beta-1}$（$\alpha, \beta$は自然数）を小さいものから順番に並べ替えて、小さい方からα番目を順序統計量$X_{(\alpha)}$とすると、$X_{(\alpha)}$はベータ分布$Be(\alpha,\beta)$に従う。

以下では、ベータ分布$Be(\alpha,\beta)$の確率密度関数を$f_{X_{(\alpha)}}(x)$とすると、

$$f_{X_{(\alpha)}}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} \quad ,(0 \leq x \leq 1) \qquad ・・・（\mathrm{A}）$$

また、ベータ関数$B(\alpha,\beta)$はα, βが自然数のとき、

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha-1)!\cdot(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$$

で与えられることを用いてよい。

ここで、一様分布$U(0,1)$の母集団からの標本変量$X_1, X_2 \cdots, X_{2m+1}$（$m$は自然数）の中央値を$\tilde{X}$とする。

中央値$\tilde{X}$の確率密度関数$f_{\tilde{X}}(x)$は、式（A）において、

$\alpha = \boxed{①}$、$\beta = \boxed{②}$ とすることで、

$$f_{\tilde{X}}(x) = \frac{\boxed{④}}{\boxed{③}} \times \boxed{⑤} \times \boxed{⑥} \qquad ・・・（\mathrm{B}）$$

となる。(<u>⑤と⑥の解答は順不同</u>)

この確率密度関数を用いて、中央値$\tilde{X}$の期待値$E[\tilde{X}]$と分散$V[\tilde{X}]$を算出すると、

$E[\tilde{X}] = \boxed{⑦}$、$V[\tilde{X}] = \boxed{⑧}$ となる。

一方、標本変量平均$\bar{X}$の分散は$V[\bar{X}] = \boxed{⑨}$であるため、mが自然数のもとでは常に中央値$\tilde{X}$の分散の方が標本変量平均$\bar{X}$の分散よりも大きくなる。

（２）次に、正規母集団$N(\mu, 2^2)$からの標本変量$Y_1, Y_2 \cdots, Y_{2m+1}$（$m$は自然数）の中央値を$\tilde{Y}$とし、母平均$\mu$を中央値$\tilde{Y}$で推定することを考える。

正規分布$N(\mu, 2^2)$の分布関数を$F_Y(y)$、確率密度関数を$f_Y(y)$とする。

式（B）において、分布関数の逆関数$y = F_Y^{-1}(x)$で変数変換を行うことで、

中央値$\tilde{Y}$の確率密度関数$f_{\tilde{Y}}(y)$は

$$f_{\tilde{Y}}(y) = \frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑩}} \times \boxed{⑫} \times \boxed{⑬} \times f_Y(y)$$

となる。（⑫と⑬の解答は順不同）

さらに、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\mu} f_Y(t)\,dt = \boxed{⑭}$であることに着目して式変形を行うことで、

$$f_{\tilde{Y}}(y) = \frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑩}} \times \left\{ \boxed{⑮} - \left(\int_{\boxed{⑯}}^{y} f_Y(t)\,dt \right)^{\boxed{⑰}} \right\}^{\boxed{⑱}} \times f_Y(y) \qquad ・・・（C）$$

となる。

中央値$\tilde{Y}$の確率密度関数$f_{\tilde{Y}}(y)$はμを中心とした偶関数であるため、

$E[\tilde{Y}] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{\tilde{Y}}(y)\,dy = \boxed{⑲}$となり、中央値$\tilde{Y}$は不偏性を満たすことが分かる。

（３）次に、（２）と同じ中央値$\tilde{Y}$の推定量としての性質を検証するために、$Z = \sqrt{2m+1}\left(\tilde{Y} - \mu\right)$の漸近的分布を求めることを考える。

$Z = \sqrt{2m+1}\left(\tilde{Y} - \mu\right)$の確率密度関数を$f_Z(z)$とおくと、

式（C）において$z = \sqrt{2m+1}(y - \mu)$として変数変換を行い、整理することで、

$$f_Z(z) = \frac{1}{\boxed{⑳} \times \boxed{㉑}} \times \frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑩}}$$

$$\times \left\{ 1 - \boxed{㉒} \left(\int_{\boxed{⑯}}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t)\,dt \right)^{\boxed{⑰}} \right\}^{\boxed{⑱}} \times f_Y\left(\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}\right)$$

となる。（⑳と㉑の解答は順不同）

ここで、スターリングの公式 $n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}\ (n \to \infty)$を用いると、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\boxed{⑳} \times \boxed{㉑}} \times \frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑩}} = \boxed{㉓}$$

となり、さらに、

$$\left\{ 1 - \boxed{㉒} \left(\int_{\boxed{⑯}}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t)\,dt \right)^{\boxed{⑰}} \right\}^{\boxed{⑱}} \text{は} \left\{ 1 - \boxed{㉒} \times \left(\frac{z \cdot f_Y(\mu)}{\sqrt{2m+1}} \right)^{\boxed{⑰}} \right\}^{\boxed{⑱}} \text{で}$$

近似できることを用いると、

$$\lim_{m\to\infty} \left\{ 1 - \boxed{㉒} \left(\int_{\boxed{⑯}}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t)\,dt \right)^{\boxed{⑰}} \right\}^{\boxed{⑱}} = \boxed{㉔}$$

となる。

最後に、

$$\lim_{m\to\infty} f_Y\left(\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}\right) = \boxed{㉕}$$

となることから、$Z = \sqrt{2m+1}\left(\tilde{Y} - \mu\right)$の漸近的分布は正規分布$N\left(\boxed{㉖}, \boxed{㉗}\right)$であり、

中央値$\tilde{Y}$は漸近正規性を満たすことが分かる。

一方、同じく母平均μの推定量として漸近正規性を満たす標本変量平均$\bar{Y}$を変形した$\sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)$は正規分布$N\left(\boxed{㉘}, \boxed{㉙}\right)$に従う。

中央値$\tilde{Y}$よりも漸近分散が小さい漸近正規推定量が存在するため、中央値$\tilde{Y}$は漸近有効性を満たさないことが分かった。

［①～④、⑩、⑪、⑱、⑳、㉑の選択肢］

（A）m　（B）$m-1$　（C）$m+1$　（D）$2m$

（E）$2m-1$　（F）$2m+1$　（G）m^2　（H）$(m-1)^2$

（I）$(m+1)^{\frac{1}{2}}$　（J）$(2m)^2$　（K）$(2m-1)^2$　（L）$(2m+1)^{\frac{1}{2}}$

（M）2^m　（N）2^{m+1}　（O）2^{2m}　（P）2^{2m+1}

（Q）$m!$　（R）$(2m)!$　（S）$(2m-1)!$　（T）$(2m+1)!$

（U）$(2m+2)!$　（V）$(m!)^2$　（W）$\{(m-1)!\}^2$　（X）$\{(m+1)!\}^2$

（Y）$\{(2m+1)!\}^2$　（Z）$(m+1)!\,(m-1)!$

［⑤、⑥の選択肢］

（A）x^m　（B）x^{m-1}　（C）x^{m+1}　（D）x^{2m}

（E）x^{2m-1}　（F）x^{2m+1}　（G）$(1-x)^m$　（H）$(1-x)^{m-1}$

（I）$(1-x)^{m+1}$　（J）$(1-x)^{2m}$　（K）$(1-x)^{2m-1}$　（L）$(1-x)^{2m+1}$

［⑦～⑨の選択肢］

（A） 1	（B） $\frac{1}{2}$	（C） $\frac{1}{3}$	（D） $\frac{1}{4}$
（E） $\frac{1}{12}$	（F） $\frac{1}{m}$	（G） $\frac{1}{m+1}$	（H） $\frac{1}{2m+1}$
（I） $\frac{1}{2m+2}$	（J） $\frac{1}{2m+3}$	（K） $\frac{1}{3(2m+1)}$	（L） $\frac{1}{3(2m+3)}$
（M） $\frac{1}{4(2m+1)}$	（N） $\frac{1}{4(2m+3)}$	（O） $\frac{1}{12(2m+1)}$	（P） $\frac{1}{12(2m+3)}$

［⑫、⑬の選択肢］

（A） $\{F_Y{}^{-1}(y)\}^m$	（B） $\{F_Y{}^{-1}(y)\}^{m-1}$	（C） $\{F_Y{}^{-1}(y)\}^{2m}$	（D） $\{F_Y{}^{-1}(y)\}^{2m-1}$
（E） $\{F_Y(y)\}^m$	（F） $\{F_Y(y)\}^{m+1}$	（G） $\{F_Y(y)\}^{2m}$	（H） $\{F_Y(y)\}^{2m+1}$
（I） $\{1-F_Y{}^{-1}(y)\}^m$	（J） $\{1-F_Y{}^{-1}(y)\}^{m-1}$	（K） $\{1-F_Y{}^{-1}(y)\}^{2m}$	（L） $\{1-F_Y{}^{-1}(y)\}^{2m-1}$
（M） $\{1-F_Y(y)\}^m$	（N） $\{1-F_Y(y)\}^{m+1}$	（O） $\{1-F_Y(y)\}^{2m}$	（P） $\{1-F_Y(y)\}^{2m+1}$

［⑭～⑰、⑲、㉒、㉓、㉕～㉙の選択肢］

（A） 0　（B） 1　（C） 2　（D） 4

（E） 8　（F） 16　（G） $\frac{1}{2}$　（H） $\frac{1}{4}$

（I） $\frac{1}{8}$　（J） $\frac{1}{16}$　（K） μ　（L） 2μ

（M） $\frac{\mu}{2}$　（N） π　（O） 2π　（P） 4π

（Q） π^2　（R） $4\pi^2$　（S） $16\pi^2$　（T） $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$

（U） $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$　（V） $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$　（W） $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　（X） $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

（Y） $-y$　（Z） $-\infty$

［㉔の選択肢］

（A） $\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$　（B） $\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)$　（C） $\exp\left(-\frac{z^2}{8}\right)$　（D） $\exp\left(-\frac{z^2}{16}\right)$

（E） $\exp\left(-\frac{z^2}{2\pi}\right)$　（F） $\exp\left(-\frac{z^2}{4\pi}\right)$　（G） $\exp\left(-\frac{z^2}{8\pi}\right)$　（H） $\exp\left(-\frac{z^2}{16\pi}\right)$

（I） $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2}\right\}$　（J） $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{4}\right\}$　（K） $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{8}\right\}$　（L） $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{16}\right\}$

（M） $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\pi}\right\}$　（N） $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{4\pi}\right\}$　（O） $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{8\pi}\right\}$　（P） $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{16\pi}\right\}$

数学（解答例）

問題１

（１）

（ア）　A, B を確率事象とするとき、
ｐ：　A, B は独立
ｑ：　$\mathrm{P}\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$

ｐは、$\mathrm{P}\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$であることを言い換えたもの。
ｑは、$\mathrm{P}\{A \cap B\} = 0$であることを言い換えたもの。
たとえば、1 回のコイントスで表が出ることをAとし、５２枚のトランプから 1 枚引いてエースが出ることをBとしたとき、$\mathrm{P}\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$だが、$\mathrm{P}\{A \cap B\} = 0$ではない。一方、１回のコイントスで表が出ることを$A$とし、裏が出ることを$B$としたとき、$\mathrm{P}\{A \cap B\} = 0$だが、$\mathrm{P}\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$ではない。
よって、ｐはｑであるための必要条件でも十分条件でもない。

（イ）　A, B を確率事象とし、$\mathrm{P}\{B\} \neq 0$ とするとき、
ｐ：　A, B は独立
ｑ：　$\mathrm{P}\{A|B\} = P\{A\}$

独立性の定義から明らかに、ｐはｑであるための必要十分条件である。

（ウ）　確率事象 A, B, C について、
ｐ：　A, B は独立 かつ B, C は独立 かつ C, A は独立
ｑ：　A, B, C は独立

ｐがｑであるための必要条件であることは独立性の定義から明らかである。
一方、たとえば、$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ で

$$\mathrm{P}\{\omega_1\} = \mathrm{P}\{\omega_2\} = \mathrm{P}\{\omega_3\} = \mathrm{P}\{\omega_4\} = \frac{1}{4}$$

とする。
$A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_2, \omega_3\}, C = \{\omega_3, \omega_1\}$とおけば、$A \cap B = \{\omega_2\}$ より $\mathrm{P}\{A \cap B\} = 1/4$ である。また、$\mathrm{P}\{A\} = \mathrm{P}\{B\} = 1/2$ であるから、$\mathrm{P}\{A \cap B\} = \mathrm{P}\{A\} \cdot \mathrm{P}\{B\}$が成立し、$A, B$ は独立である。同様に、B, C は独立、C, A は独立であることも分かる。一方で、$A \cap B \cap C = \emptyset$ であるから、$\mathrm{P}\{A \cap B \cap C\} = 0$ となる。したがって、$\mathrm{P}\{A \cap B \cap C\} \neq \mathrm{P}\{A\} \cdot \mathrm{P}\{B\} \cdot \mathrm{P}\{C\}$となり、$A, B, C$ は独立でない。
よって、ｐはｑであるための必要条件であるが、十分条件ではない。

（エ）　確率変数 X, Y について、
ｐ：　X, Y は独立

ｑ：　X^2, Y^2 は独立

X, Y が独立ならば X^2, Y^2 は独立である。
一方、たとえば、サイコロを１回振ったときに、
　確率変数 X ：「６の目が出ればマイナス１、２か４の目なら１、それ以外なら０」
　確率変数 Y ：「６の目が出ればマイナス１、３の目なら１、それ以外なら０」
とすると、X, Y は独立でないが、X^2, Y^2 は独立である。
よって、ｐはｑであるための十分条件であるが、必要条件ではない。

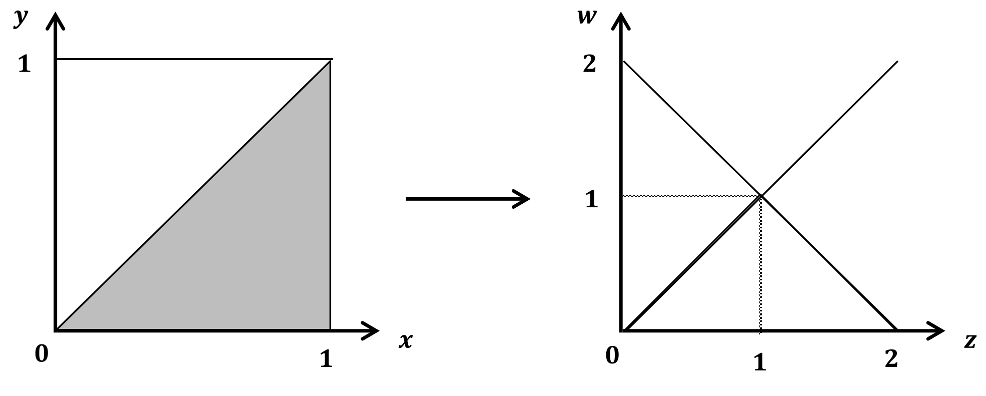
（オ）確率変数 X, Y について、X, Y, XY の期待値がそれぞれ存在するとき、
ｐ：　X, Y は独立
ｑ：　$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$

ｐならばｑであるが、その逆は一般には成り立たない。
例えば、4 点$(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$となる確率がそれぞれ$1/4$であるような同時確率変数$(X, Y)$を考えると、$E[X] = E[Y] = E[XY] = 0$ であるが、
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1, \mathrm{Y}=0) = 1/4,\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=1)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0) = (1/4)(1/2) = 1/8$

よって、ｐはｑであるための十分条件であるが、必要条件ではない。

よって、解答は　①（D）　②（A）　③（B）　④（C）　⑤（C）

（２）
$\mathrm{z} = x + y,\ w = x - y$ とおくと、$x = \frac{z+w}{2},\ y = \frac{z-w}{2}$
$0 < y < x < 1$ より$0 < z - w < z + w < 2$ であるから、



$0 < z \leq 1$ のとき、

$$g(z) = \int_0^z 8 \cdot \frac{z+w}{2} \cdot \frac{z-w}{2} \cdot \frac{1}{2} dw = \frac{2}{3} z^3$$

$1 < z < 2$ のとき、

$$g(z)=\int_0^{2-z}(z+w)(z-w)dw=-\frac{2}{3}z^3+4z-\frac{8}{3}$$

よって、解答は　①（C）　②（F）

（3）

X、Yの分布関数をそれぞれ$F(x)$、$G(y)$とし、確率密度関数を$f(x)$、$g(y)$とすると、

$0\le x\le 1$において、

$F(x)=P(\max(A,B)<x)=\mathrm{P}(A<x)\mathrm{P}(B<x)=x^2$

$f(x)=2x$

$0\le y\le 1$において、

$G(y)=P(\min(A,B)<y)=1-P(\min(A,B)>y)=1-\mathrm{P}(A>y)\mathrm{P}(B>y)=1-(1-y)^2$

$g(y)=2(1-y)$

従ってX、Yの積率母関数$M_X(t)$および$M_Y(t)$は、

$$\begin{aligned}M_X(t)&=\int_0^1 2xe^{tx}\,dx\\&=\left[2x\frac{1}{t}e^{tx}\right]_0^1-\int_0^1 2\frac{1}{t}e^{tx}\,dx\\&=2\frac{1}{t}e^t-\left[2\frac{1}{t^2}e^{tx}\right]_0^1\\&=2\left(\frac{te^t-e^t+1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_Y(t)&=\int_0^1 2(1-y)e^{ty}\,dy\\&=\int_0^1 2e^{ty}\,dy-\int_0^1 2ye^{ty}\,dy\\&=\left[2\frac{1}{t}e^{ty}\right]_0^1-2\left(\frac{te^t-e^t+1}{t^2}\right)\\&=2\left(\frac{e^t-t-1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

となる。

よって、解答は　①：（I）　②：（D）

（4）

$E[X_i]=p(1-p)$、

$E\left[X_i{}^2\right]=p(1-p)$より、

$V[X_i]=p(1-p)(1-p+p^2)$となる。

$$\begin{aligned}E[X_iX_{i+1}]&=0\cdot 0\cdot P(X_i=0,X_{i+1}=0)+0\cdot 1\cdot P(X_i=0,X_{i+1}=1)\\&\quad+1\cdot 0\cdot P(X_i=1,X_{i+1}=0)+1\cdot 1\cdot P(X_i=1,X_{i+1}=1)\\&=0\cdot 0\cdot 0+0\cdot 1\cdot p(1-p)+1\cdot 0\cdot(1-p)p+1\cdot 1\cdot 0=0\end{aligned}$$

より、

$Cov(X_i, X_{i+1}) = \ E[X_i X_{i+1}] - \ E[X_i]E[X_{i+1}] = -p^2(1-p)^2$となる。
また、独立性より$Cov\left(X_j, X_k\right) = 0\ (|j-k| \geq 2)$ となるため、
$V[X] = V[X_1] + \cdots + V[X_{n-1}] + 2Cov(X_1, X_2) + \cdots + 2Cov(X_{n-2}, X_{n-1})$
$= p(1-p)\{(3p^2 - 3p + 1)n - 5p^2 + 5p - 1\}$
よって、解答は　①：（B）　②（I）

（5）

まず始めにモーメント法による推計を行う。母集団は一様分布$U(a,b)$に従うので母平均$\mu = \dfrac{a+b}{2}$、

母分散$\sigma^2 = \dfrac{(a-b)^2}{12}$となる。これより$a = \mu - \sqrt{3}\sigma$、$b = \mu + \sqrt{3}\sigma$が得られる。標本値を小さい順に

標本値を小さい順に$x_1, x_2, \cdots, x_7$と置くと、母平均μの推定値$\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$および母平均$\sigma^2$の推定値

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$を用いて、$a = \hat{\mu} - \sqrt{3}\hat{\sigma}$、$b = \hat{\mu} + \sqrt{3}\hat{\sigma}$と推定される。与えられた標本値から

$\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$、$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 3.002$ となるので、

$$a = 0 - \sqrt{3} \times \sqrt{3.002} = -3.001$$

$b = 0 + \sqrt{3} \times \sqrt{3.002} = 3.001$

と推定される。

次に、最尤法による推定を行う。一様分布の分布関数は$f(x) = \dfrac{1}{b-a}(a \leq x \leq b)$であるので、

尤度関数は$L(a,b) = \left(\dfrac{1}{b-a}\right)^7$となる。$a, b$を$(a \leq x_1)$、$(x_7 \leq b)$なる範囲で動かして、$L(a,b)$を最大

にすると、$a = x_1 = -2.6$、$b = x_7 = 2.4$と推定される。

よって、解答は　①（C）②（J）③（G）④（D）

（6）

まずは、男性の試験の合格率を近似法で区間推定する。

標本数$n = 40$、標本百分率は、$\hat{p} = \dfrac{16}{40} = 0.4$ より、標準正規分布の上側 5%点$\varepsilon(0.05)$を用いることで、

合格率の下限$\hat{p}_L$、上限$\hat{p}_U$はそれぞれ、

$$\hat{p}_L = \hat{p} - \varepsilon(0.05) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.4 - 1.6449 \times \sqrt{\frac{0.4 \times (1-0.4)}{40}} = 0.27$$

$$\hat{p}_U = \hat{p} + \varepsilon(0.05)\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.4 + 1.6449 \times \sqrt{\frac{0.4\times(1-0.4)}{40}} = 0.53$$

次に、女性の試験の合格率を精密法で区間推定する。

F分布の上側 5%点$F_{n_2}^{n_1}(0.05)$、$F_{n_4}^{n_3}(0.05)$を用いるが、標本数$n' = 5$、出現数$k' = 2$ よりF分布の

自由度は、

$n_1 = 2(n' - k' + 1) = 8$、$n_2 = 2k' = 4$

$n_3 = 2(k' + 1) = 6$、$n_4 = 2(n' - k') = 6$

よって、合格率の下限$\hat{p}_L{}'$、上限$\hat{p}_U{}'$はそれぞれ、

$$\hat{p}_L{}' = \frac{n_2}{n_1 F_{n_2}^{n_1}(0.05) + n_2} = \frac{4}{8\times 6.0410 + 4} = 0.08$$

$$\hat{p}_U{}' = \frac{n_3 F_{n_4}^{n_3}(0.05)}{n_3 F_{n_4}^{n_3}(0.05) + n_4} = \frac{6\times 4.2839}{6\times 4.2839 + 6} = 0.81$$

よって、解答は　①　（H）　②　（C）　③　（C）　④　（F）

（７）

2回の試行で得られた、白玉の個数をそれぞれ、X_1, X_2と置くと、これらの確率変数は負の二項分布

$NB(k,p)$に従う。帰無仮説が正しいものとすると、$k = 3$、$p = \frac{3}{4}$である。

第1種の誤りの起こる確率をαとすると、

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(X_1 \geq 2 \cap X_2 \geq 2)\\
&= P(X_1 \geq 2)\cdot P(X_2 \geq 2)\\
&= \{P(X_1 \geq 2)\}^2\\
&= \{1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1)\}^2\\
&= \left(1 - 0.75^3 - {}_3C_1 \times 0.25 \times 0.75^3\right)^2\\
&= 0.068
\end{aligned}$$

よって、第1種の誤りの起こる確率は6.8%である。

次に、対立仮説が正しいものとすると、$k = 3$、$p = \frac{1}{4}$である。

第2種の誤りの起こる確率をβとすると、

$$
\begin{aligned}
\beta &= P(X_1 \leq 1 \cup X_2 \leq 1) \\
&= 1 - P(X_1 \geq 2 \cap X_2 \geq 2) \\
&= 1 - P(X_1 \geq 2) \cdot P(X_2 \geq 2) \\
&= 1 - \{P(X_1 \geq 2)\}^2 \\
&= 1 - \{1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1)\}^2 \\
&= 1 - \left(1 - 0.25^3 - {}_3C_1 \times 0.75 \times 0.25^3\right)^2 \\
&= 0.099
\end{aligned}
$$

検出力は$1-\beta$であるから、90.1%となる。

よって、<u>解答は　①　**（C）**　②　**（F）**</u>

（8）

分割表の各要素を以下の通り置くと

	男性	女性	計
チーズケーキが好き	$f_{11} = 4$	$f_{12} = 12$	$f_{1\cdot} = 16$
ショートケーキが好き	$f_{21} = 9$	$f_{22} = 5$	$f_{2\cdot} = 14$
計	$f_{\cdot 1} = 13$	$f_{\cdot 2} = 17$	$n = 30$

独立性の検定における検定統計量は

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\left(f_{ij} - \frac{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{n}} = \frac{(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2 \cdot n}{f_{1\cdot}f_{2\cdot}f_{\cdot 1}f_{\cdot 2}} = \frac{(4 \times 5 - 12 \times 9)^2 \times 30}{16 \times 14 \times 13 \times 17} = 4.7$$

自由度は$(2-1) \times (2-1) = 1$であるため、$\chi_1^2(0.05) = 3.84 < \chi^2 = 4.7$となり、帰無仮説は棄却される。

次にイェーツの補正を行うと

$$\chi'^2 = \frac{\left(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + \frac{n}{2}\right)^2 \cdot n}{f_{1\cdot}f_{2\cdot}f_{\cdot 1}f_{\cdot 2}} = \frac{(4 \times 5 - 12 \times 9 + 15)^2 \times 30}{16 \times 14 \times 13 \times 17} = 3.2 < \chi_1^2(0.05) = 3.84$$

となり、帰無仮説は採択される。

よって、<u>解答は　①　**（F）**　②　**（B）**　③　**（C）**　④　**（A）**</u>

（９）

まず、$y=\alpha+\beta x$ として、αとβを最小二乗法により推定すると、

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

$$\alpha=\bar{y}-\hat{\beta}\cdot\bar{x}=31-1.5\times 24=-5$$

次に決定係数を求めると、

$$R^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right)^2}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{15^2}{10\times 48}=\frac{15}{32}$$

最後に誤差分散の推定値を求めると、

$$\sigma^2=\frac{1}{7-2}\sum_{i=1}^{7}\left\{y_i-\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i\right)\right\}^2=\frac{7}{5}S_y^2(1-R^2)=\frac{51}{10}$$

よって、解答は　①（C）　②（J）　③（F）　④（G）

（１０）

$$\mathrm{E}\left(X_t{}^6\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}x^6e^{-\frac{x^2}{2t}}dx=2\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}x^6e^{-\frac{x^2}{2t}}dx=2\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(2ty)^3e^{-y}\ \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2y}}dy$$

$$=\frac{8t^3}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}y^{5/2}e^{-y}\,dy=\frac{8t^3}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{8t^3}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=15t^3$$

である。また、 $s>t$ のとき、

$$\mathrm{E}\left(X_s\cdot X_t{}^5\right)=\mathrm{E}\left((X_s-X_t+X_t)\cdot X_t{}^5\right)=\ \mathrm{E}\left((X_s-X_t)\cdot X_t{}^5\right)+\mathrm{E}\left(X_t{}^6\right)$$

である。(X_s-X_t) と X_t は独立であり、$\mathrm{E}(X_s-X_t)=0$ なので、

$$\mathrm{E}\left((X_s-X_t)\cdot X_t{}^5\right)=\mathrm{E}(X_s-X_t)\mathrm{E}\left(X_t{}^5\right)=0$$

したがって、$\mathrm{E}\left(X_s\cdot X_t{}^5\right)=\mathrm{E}\left(X_t{}^6\right)=15t^3$である。

よって、解答は　①（E）　②（E）

（１１）

与えられた式を変形し、両辺の分散を計算すると、

$$V\left[Y_t-\frac{1}{3}Y_{t-1}\right]=\ V\left[-\frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t\right]$$

$$V[Y_t]-2\cdot\frac{1}{3}\cdot Cov(Y_t,Y_{t-1})+\frac{1}{3^2}\ V[Y_{t-1}]=\left(-\frac{1}{2}\right)^2V[\varepsilon_{t-1}]+V[\varepsilon_t]$$

$$\gamma_0-\frac{2}{3}\gamma_1+\frac{1}{9}\gamma_0=\frac{1}{4}\cdot 2^2+2^2$$

$$\gamma_0=\frac{3}{5}\gamma_1+\frac{9}{2}\quad\cdots（1）$$

また、自己共分散γ_1の定義より、

$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov\left(\frac{1}{3}Y_{t-1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1}\right)$

$= \frac{1}{3}\gamma_0 - \frac{1}{2}\mathrm{V}[\varepsilon_{t-1}] = \frac{1}{3}\gamma_0 - 2$ ・・・（２）

式（１）、（２）より、

$\gamma_0 = \frac{33}{8}$ 、$\gamma_1 = -\frac{5}{8}$

また、$h \geq 2$ のとき、

$\gamma_h = Cov(Y_t, Y_{t-h}) = Cov\left(\frac{1}{3}Y_{t-1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-h}\right)$

$= \frac{1}{3}Cov(Y_{t-1}, Y_{t-h}) = \frac{1}{3}\gamma_{h-1}$

γ_hは初項：$\gamma_1 = -\frac{5}{8}$、公比：$\frac{1}{3}$の等比数列であるため、

$\gamma_h = \left(-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$ $(h \geqq 1)$

よって、解答は　①：（Ｅ）　②：（Ａ）

（１２）

確率$P(X = k)$は、重みづけの確率として

$$P(X = k) = \frac{1}{4}P_1(X_1 = k) + \frac{1}{3}P_2(X_2 = k) + \frac{5}{12}P_3(X_3 = k)$$

と表わされることから、X_i $(i = 1,2,3)$をそれぞれ独立に平均iの幾何分布に従う確率変数とし、X_iと独立に

$P(I = 1) = \frac{1}{4}$

$P(I = 2) = \frac{1}{3}$

$P(I = 3) = \frac{5}{12}$

となる確率変数Iを定義すると、$X \sim X_I$である。

よって題意から、(0,1)区間の一様分布に従う確率変数Uの一様乱数による実現値をu_1、u_2とし、$G_i(x) = P_i(X_i \leq x)$とすると、

$0 \leq u_1 \leq \frac{1}{4}$ならば$X = G_1^{-1}(u_2)$

$\frac{1}{4} < u_1 \leq \frac{7}{12}$ならば$X = G_2^{-1}(u_2)$

$\frac{7}{12} < u_1 \leq 1$ ならば$X = G_3^{-1}(u_2)$

$u_1 = 0.9$であるから、$X = G_3^{-1}(u_2)$としてXの実現値が定まる。

ここでX_3は平均 3 の幾何分布に従い、この幾何分布の平均は$\dfrac{1-p_3}{p_3}$であるから、$p_3 = \dfrac{1}{4}$である。

X_3を生成するには、$p_3^j = P(X_3 = j)$およびUに対し確率変数Yを

$$Y = \begin{cases} 0\ , U \leq p_3^0 \\ 1\ , p_3^0 < U \leq p_3^0 + p_3^1 \\ \vdots \\ j\ , \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} p_3^i < U \leq \sum_{i=0}^{j} p_3^i \\ \vdots \end{cases}$$

とすると、$P(Y = j) = P\left(\sum_{i=0}^{j-1} p_3^i < U \leq \sum_{i=0}^{j} p_3^i\right) = p_3^j$である。
ここで、$u_2 = 0.4$であり、

$$p_3^0 = P(X_3 = 0) = p(1-p)^0 = \frac{1}{4}$$

$$p_3^0 + p_3^1 = P(X_3 = 0) + P(X_3 = 1) = p(1-p)^0 + p(1-p)^1 = \frac{7}{16}$$

従って、$p_3^0 < u_2 \leq p_3^0 + p_3^1$であることから、$X_3$の実現値は1となる。
よって、<u>解答は（B）</u>

問題２
（１）

Ⅰ）Ａさんが持っていない「プレミアム」の種類がk種類$(k = 1,2,3)$である状態からカードを購入し続け、k種類のうちいずれか1種類を引き当てるまでにかかった購入回数として確率変数X_kを定義する。まず、$k = 3$の場合を考えると、

$$P(X_3 = n) = 0.03 \times 0.97^{n-1} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

と表せることから、

$$E[X_3] = \sum_{n=1}^{\infty} n \times 0.03 \times 0.97^{n-1} = \frac{0.03}{(1-0.97)^2} = \frac{100}{3}$$

を得る。
同様に$k = 1,2$の場合についても同様に考えることで$E[X_1]$、$E[X_2]$を計算すると、求める購入回数の平均値は

$$E[X_3] + E[X_2] + E[X_1] = \frac{550}{3}$$

となる。

Ⅱ）Ａさんが持っていない「プレミアム」の種類がk種類$(k = 1,2,3)$である状態からカードを購入し続け、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかった購入回数の平均値をE_kと置く。
持っていない「プレミアム」の種類がk種類である状態でカードを１枚購入したとき、それが持っていない「プレミアム」である場合は持っていない「プレミアム」の種類が1つ減り、そうでない

場合は持っていない「プレミアム」の種類は変わらないことから、次の漸化式が成り立つ。

$$E_k = 1 + \frac{k}{100} \times E_{k-1} + (1 - \frac{k}{100}) \times E_k \quad (k = 2,3)$$

よって

$$E_3 = E_2 + \frac{100}{3} = E_1 + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} = 100 + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} = \frac{550}{3}$$

以上より、求める購入回数の平均値$^{550}/_{3}$を得る。

よって、<u>解答は　①（**K**）　②（**L**）　③（**B**）　④（**Q**）　⑤（**Z**）　⑥（**G**）</u>

（２）

Ａさんが持っていない「プレミアム」がi種類$(i = 1,2,3)$の状態で、パックを1つ購入したとき、このi種類のうちj種類$(0 \le j \le i)$ の「プレミアム」が入っている確率を$P(i,j)$とする。また、Ａさんが持っていない「プレミアム」がi種類$(i = 1,2,3)$の状態からパックのみを購入し続けたとき、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかる購入回数の平均値をE_i^pとする。

まず、$i = 3$ の場合を考える。このとき、（１）Ⅱ）と同様に考えることで、次の関係式を得る。

$$E_3^p = 1 + P(3,0) \times E_3^p + P(3,1) \times E_2^p + P(3,2) \times E_1^p \quad \cdots\cdots（A）$$

次に$P(i,j)$を求めたい。

（ア）$j = 0$ の場合

この場合、20枚の中に1枚も「プレミアム」が入っていない確率であるから、

$$P(3,0) = 0.7 \times 0.97^{19} = 0.39242$$

（イ）$j = 1$ の場合

パックに入っている20枚のカードのうち「プレミアム」である確率が高い1枚のカードの種類をY、それ以外の19枚のカードの種類をZ_k $(k = 1,2,\cdots,19)$とすると、この場合「Yがプレミアムであり、Z_kのいずれもY以外のプレミアムではない」または「Yがプレミアムではなく、$\{Z_k | k = 1,2,\cdots,19\}$にプレミアムが$1$種類のみ含まれる」となる確率であるから、

$$\begin{aligned} P(3,1) &= 0.3 \times 0.98^{19} + 0.7 \times \left(3 \times (0.98^{19} - 0.97^{19})\right) \\ &= 2.4 \times 0.98^{19} - 2.1 \times 0.97^{19} \\ &= 0.45762 \end{aligned}$$

（ウ）$j = 2$ の場合

（イ）と同様に考えれば、

$$\begin{aligned}P(3,2) &= 0.3\times\left(2\times(0.99^{19}-0.98^{19})\right)+0.7\times\left(3\times(0.99^{19}-2\times 0.98^{19}+0.97^{19})\right)\\ &= 2.7\times 0.99^{19}-4.8\times 0.98^{19}+2.1\times 0.97^{19}\\ &= 0.13824\end{aligned}$$

$i=1,2$ の場合についても同様に考えることでE_i^pを求めると、

$$E_1^p=\frac{1}{1-P(1,0)}=\frac{1}{1-0.9\times 0.99^{19}}=3.899\cdots\fallingdotseq 3.90$$

$$E_2^p=\frac{1+P(2,1)\times E_1^p}{1-P(2,0)}=\frac{1+(1.8\times 0.99^{19}-1.6\times 0.98^{19})\times E_1^p}{1-0.8\times 0.98^{19}}=5.602\cdots\fallingdotseq 5.60$$

以上より、これらを（A）に代入して、

$$E_3^p=6.752\cdots\fallingdotseq 6.75$$

を得る。

よって、解答は　⑦（**C**）　⑧（**F**）　⑨（**H**）　⑩（**J**）　⑪（**L**）　⑫（**D**）
⑬（**E**）　⑭（**J**）　⑮（**M**）

（３）

まず、$m=0$の場合に支払う金額の平均値は（１）より、

$$550/_3\times 100=18{,}333.3\cdots\fallingdotseq 18{,}333\text{円}$$

また、$m=3$の場合に支払う金額の平均値は（２）より、

$$E_3^p\times 2{,}700=6.7526\cdots\times 2{,}700=18{,}232.0\cdots\fallingdotseq 18{,}232\text{円}$$

次に、$m=1$の場合に支払う金額の平均値を求める。まず、段階Ⅰから段階Ⅱに移行するまでに支払う金額の平均値は、

$$2{,}700\times\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-P(3,0)\right)P(3,0)^{n-1}=\frac{2{,}700}{1-0.7\times 0.97^{19}}=4{,}443.8\cdots$$

となる。段階Ⅰから段階Ⅱに移行した時点で、持っている「プレミアム」の種類が1種類である確率は、

$$\frac{P(3,1)}{1-P(3,0)}$$

同様に段階Ⅰで入手した「プレミアム」の種類が2種類であった確率は、

$$\frac{P(3,2)}{1-P(3,0)}$$

であるから、$m=1$の場合に支払う金額の平均値は、

$$4{,}443.8\cdots+100\times\left(\frac{P(3,1)}{1-P(3,0)}E_2+\frac{P(3,2)}{1-P(3,0)}E_1\right)=18{,}016.8\cdots$$

より$18{,}017$円となる。

最後に、$m=2$の場合に支払う金額の平均値を求める。まず、段階Ⅰから段階Ⅱに移行するまでに支払う金額の平均値は、

$$\frac{1}{1-P(3,0)}\times\left(1+\frac{P(3,1)}{1-P(2,0)}\right)\times 2{,}700=8{,}912.9\cdots$$

となる。ここで、段階Ⅰから段階Ⅱに移行した時点で、持っている「プレミアム」の種類が2種類である確率は、

$$\frac{1}{1-P(3,0)}\times\left(P(3,2)+\frac{P(3,1)\times P(2,1)}{1-P(2,0)}\right)$$

であるから、$m=2$の場合に支払う金額の平均値は

$$8{,}912.9\cdots+100\times\left\{\frac{1}{1-P(3,0)}\times\left(P(3,2)+\frac{P(3,1)\times P(2,1)}{1-P(2,0)}\right)\right\}\times E_1=17{,}763.3\cdots$$

より$17{,}763$円となる。

以上より、求めるmの値は2である。

よって、解答は　⑯（**O**）　⑰（**H**）　⑱（**C**）

問題３

（１）

中央値$\tilde{X}$は、一様分布$U(0,1)$の母集団からの標本変量$X_1, X_2\cdots, X_{2m+1}$（mは自然数）を小さいものから順番に並べ替えた場合、小さい方から$m+1$番目であるため、順序統計量$X_{(m+1)}$と等しい。

よって、中央値$\tilde{X}$の確率密度関数$f_{\tilde{X}}(x)$は、式（A）において、

$\alpha=m+1$、$\beta=m+1$とすることで、

$f_{\tilde{X}}(x)=\dfrac{(2m+1)!}{(m!)^2}x^m\cdot(1-x)^m$となる。

式（A）より、$\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{\beta-1}\,dx=\frac{(\alpha-1)!\cdot(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$であるから、

中央値$\tilde{X}$の期待値$E[\tilde{X}]$は

$$E[\tilde{X}] = \int_0^1 x \cdot f_{\tilde{X}}(x)\,dx = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\int_0^1 x^{m+1}\cdot(1-x)^m\,dx$$

$$= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot\frac{(m+1)!\cdot m!}{(2m+2)!} = \frac{m+1}{2m+2} = \frac{1}{2}$$

となり、同様に中央値$\tilde{X}$の分散$V[\tilde{X}]$は

$$V[\tilde{X}] = E[\tilde{X}^2] - \left(E[\tilde{X}]\right)^2 = \int_0^1 x^2\cdot f_{\tilde{X}}(x)\,dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\int_0^1 x^{m+2}\cdot(1-x)^m\,dx - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot\frac{(m+2)!\cdot m!}{(2m+3)!} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4(2m+3)}$$

となる。

また、標本変量平均$\bar{X}$の分散$V[\bar{X}]$は

$$V[\bar{X}] = V\left[\frac{1}{2m+1}\sum_{i=1}^{2m+1} X_i\right] = \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2 V\left[\sum_{i=1}^{2m+1} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2\left\{(2m+1)\int_0^1 1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx\right\} = \frac{1}{12(2m+1)}$$

となり、2つの分散の差を取ると、

$$V[\tilde{X}] - V[\bar{X}] = \frac{1}{4(2m+3)} - \frac{1}{12(2m+1)} = \frac{4m}{12(2m+3)(2m+1)} > 0$$ であるから、

mが自然数のもとでは常に中央値の分散の方が標本変量平均の分散よりも大きくなる。

よって、解答は　①（**C**）　②（**C**）　③（**V**）　④（**T**）　⑤（**A**）　⑥（**G**）
⑦（**B**）　⑧（**N**）　⑨（**O**）　（⑤と⑥は順不同）

（２）

式（B）において$y = F_Y^{-1}(x)$として変数変換を行う。

$x = F_Y(y)$、$\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_Y(y)$であるから、

$$f_{\tilde{Y}}(y) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot\{F_Y(y)\}^m\cdot\{1-F_Y(y)\}^m\cdot f_Y(y)$$となる。

正規分布$N(\mu, 2^2)$はμを中心に対称な分布であるから、

$$\int_{-\infty}^{\mu} f_Y(t)\,dt = \int_{\mu}^{\infty} f_Y(t)\,dt = \frac{1}{2}$$ である。

これを用いて、$f_{\tilde{Y}}(y)$を変形すると、

$$f_{\tilde{Y}}(y)=\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot F_Y(y)^m\cdot(1-F_Y(y))^m\cdot f_Y(y)$$

$$=\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\mu}f_Y(t)\,dt+\int_{\mu}^{y}f_Y(t)\,dt\right)^m\cdot\left(\int_{\mu}^{\infty}f_Y(t)\,dt-\int_{\mu}^{y}f_Y(t)\,dt\right)^m\cdot f_Y(y)$$

$$=\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}+\int_{\mu}^{y}f_Y(t)\,dt\right)\left(\frac{1}{2}-\int_{\mu}^{y}f_Y(t)\,dt\right)\right\}^m\cdot f_Y(y)$$

$$=\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot\left\{\frac{1}{4}-\left(\int_{\mu}^{y}f_Y(t)\,dt\right)^2\right\}^m\cdot f_Y(y)\quad\text{となる。}$$

中央値$\tilde{Y}$の確率密度関数$f_{\tilde{Y}}(y)$はμを中心とした偶関数であるため、

$$E[\tilde{Y}]=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_{\tilde{Y}}(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu)\,f_{\tilde{Y}}(y)\,dy+\int_{-\infty}^{\infty}\mu\,f_{\tilde{Y}}(y)\,dy$$

$$=\int_{\mu}^{\infty}(y-\mu)\,f_{\tilde{Y}}(y)\,dy+\int_{-\infty}^{\mu}(y-\mu)\,f_{\tilde{Y}}(y)\,dy+\mu\int_{-\infty}^{\infty}f_{\tilde{Y}}(y)\,dy$$

$$=\int_{\mu}^{\infty}(y-\mu)\,f_{\tilde{Y}}(y)\,dy-\int_{\mu}^{\infty}(y-\mu)\,f_{\tilde{Y}}(y)\,dy+\mu\int_{-\infty}^{\infty}f_{\tilde{Y}}(y)\,dy$$

$$=0+\mu\cdot1=\mu$$

となるから、中央値$\tilde{Y}$は不偏性を満たすことが分かる。

よって、解答は　⑩（Ｖ）　⑪（Ｔ）　⑫（Ｅ）　⑬（Ｍ）　⑭（Ｇ）　⑮（Ｈ）
⑯（Ｋ）　⑰（Ｃ）　⑱（Ａ）　⑲（Ｋ）　（⑫と⑬は順不同）

（３）

式（C）において$z=\sqrt{2m+1}(y-\mu)$として変数変換を行う。

$y=\mu+\dfrac{z}{\sqrt{2m+1}}$、$\left|\dfrac{dy}{dz}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2m+1}}$であるから、

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\cdot\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot\left\{\frac{1}{4}-\left(\int_{\mu}^{\mu+\frac{z}{\sqrt{2m+1}}}f_Y(t)\,dt\right)^2\right\}^m\cdot f_Y\left(\mu+\frac{z}{\sqrt{2m+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{2m}\cdot(2m+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\cdot\left\{1-4\left(\int_{\mu}^{\mu+\frac{z}{\sqrt{2m+1}}}f_Y(t)\,dt\right)^2\right\}^m\cdot f_Y\left(\mu+\frac{z}{\sqrt{2m+1}}\right)$$

ここで、スターリングの公式 $n!\sim\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}\ (n\to\infty)$を用いて、

$$\frac{1}{2^{2m}\cdot(2m+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\sim\frac{\sqrt{2\pi}\cdot(2m+1)^{(2m+1)+\frac{1}{2}}\cdot e^{-(2m+1)}}{2^{2m}\cdot(2m+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{2\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\right)^2}$$

$$= \frac{(2m+1)^{(2m+1)} \cdot e^{-1}}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{2m} \cdot m^{2m+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{(2m+1)} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \ (m \to \infty)$$ となる。

さらに、

$\left\{1 - 4\left(\int_{\mu}^{\mu+\frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t)\, dt\right)^2\right\}^m$ は $\left\{1 - 4\frac{\left(z \cdot f_Y(\mu)\right)^2}{2m+1}\right\}^m$ で近似できることを用いると、

$f_Y(\mu) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ であるから、

$$\left\{1 - 4\frac{\left(z \cdot f_Y(\mu)\right)^2}{2m+1}\right\}^m = \left\{1 - 4\frac{\left(z \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^2}{2m+1}\right\}^m = \left(1 - \frac{z^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1}\right)^m$$

$n = 2m + 1$ とおくと、

$$\left(1 - \frac{z^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1}\right)^m = \left(1 - \frac{z^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left\{\left(1 - \frac{z^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\to \left\{\exp\left(-\frac{z^2}{2\pi}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \ (n \to \infty)$$

$$= \exp\left(-\frac{z^2}{4\pi}\right)$$ となる。

最後に、

$$f_Y\left(\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}\right) \to f_Y(\mu) \ \ (m \to \infty)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$$

となることから、$f_Z(z)$ は漸近的に $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{z^2}{4\pi}\right)$ である。

つまり、$Z = \sqrt{2m+1}\left(\tilde{Y} - \mu\right)$の漸近的分布は正規分布$N(0\,, 2\pi)$であり、中央値$\tilde{Y}$は漸近正規性を満たすことが分かる。

一方、同じく母平均μの推定量として漸近正規性を満たす標本変量平均$\bar{Y}$を変形した$\sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)$は再生性により正規分布に従う。

$$E\left[\sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)\right] = \sqrt{2m+1}(E[\bar{Y}] - \mu) = \sqrt{2m+1}(\mu - \mu) = 0$$

$$V\left[\sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)\right] = (2m+1) \cdot (V[\bar{Y}] + V[\mu]) = (2m+1) \cdot \left(\frac{2^2}{2m+1} + 0\right) = 4$$

であるから、$\sqrt{2m+1}(\bar{Y}-\mu)$は正規分布$N(0\,,4)$に従う。

つまり、中央値$\tilde{Y}$よりも漸近分散が小さい漸近正規推定量が存在するため、中央値$\tilde{Y}$は漸近有効性を満たさないことが分かった。

よって、解答は　⑳（O）　㉑（L）　㉒（D）　㉓（W）　㉔（F）　㉕（T）
㉖（A）　㉗（O）　㉘（A）　㉙（D）　（⑳と㉑は順不同）

問題１

<table>
<tr><td rowspan="5">（１）</td><td>①</td><td>（D）</td><td>１点</td><td rowspan="2">（７）</td><td>①</td><td>（C）</td><td>２点</td></tr>
<tr><td>②</td><td>（A）</td><td>１点</td><td>②</td><td>（F）</td><td>３点</td></tr>
<tr><td>③</td><td>（B）</td><td>１点</td><td rowspan="4">（８）</td><td>①</td><td>（F）</td><td rowspan="2">完答で３点</td></tr>
<tr><td>④</td><td>（C）</td><td>１点</td><td>②</td><td>（B）</td></tr>
<tr><td>⑤</td><td>（C）</td><td>１点</td><td>③</td><td>（C）</td><td rowspan="2">完答で２点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（２）</td><td>①</td><td>（C）</td><td rowspan="2">完答で５点</td><td>④</td><td>（A）</td></tr>
<tr><td>②</td><td>（F）</td><td rowspan="4">（９）</td><td>①</td><td>（C）</td><td rowspan="2">完答で１点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（３）</td><td>①</td><td>（I）</td><td>２点</td><td>②</td><td>（J）</td></tr>
<tr><td>②</td><td>（D）</td><td>３点</td><td>③</td><td>（F）</td><td>２点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（４）</td><td>①</td><td>（B）</td><td rowspan="2">完答で５点</td><td>④</td><td>（G）</td><td>２点</td></tr>
<tr><td>②</td><td>（I）</td><td rowspan="2">（１０）</td><td>①</td><td>（E）</td><td>３点</td></tr>
<tr><td rowspan="4">（５）</td><td>①</td><td>（C）</td><td rowspan="2">完答で３点</td><td>②</td><td>（E）</td><td>２点</td></tr>
<tr><td>②</td><td>（J）</td><td rowspan="2">（１１）</td><td>①</td><td>（E）</td><td>３点</td></tr>
<tr><td>③</td><td>（G）</td><td rowspan="2">完答で２点</td><td>②</td><td>（A）</td><td>２点</td></tr>
<tr><td>④</td><td>（D）</td><td colspan="2">（１２）</td><td>（B）</td><td>５点</td></tr>
<tr><td rowspan="4">（６）</td><td>①</td><td>（H）</td><td rowspan="2">完答で３点</td><td colspan="4" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>②</td><td>（C）</td></tr>
<tr><td>③</td><td>（C）</td><td rowspan="2">完答で２点</td></tr>
<tr><td>④</td><td>（F）</td></tr>
</table>

問題２

（1）	①	（K）	完答で1点		⑩	（J）	2点
	②	（L）			⑪	（L）	2点
	③	（B）			⑫	（D）	2点
	④	（Q）	1点		⑬	（E）	1点
	⑤	（Z）	2点		⑭	（J）	1点
	⑥	（G）	2点		⑮	（M）	1点
（2）	⑦	（C）	完答で2点	（3）	⑯	（O）	1点
	⑧	（F）			⑰	（H）	1点
	⑨	（H）			⑱	（C）	1点

問題３

（1）	①	（C）	完答で1点		⑮	（H）	完答で2点
	②	（C）			⑯	（K）	
	③	（V）	完答で2点		⑰	（C）	
	④	（T）	⑤⑥は順不同		⑱	（A）	
	⑤	（A）			⑲	（K）	2点
	⑥	（G）		（3）	⑳	（O）	完答で1点
	⑦	（B）	1点		㉑	（L）	⑳㉑は順不同
	⑧	（N）	2点		㉒	（D）	
	⑨	（O）	1点		㉓	（W）	1点
（2）	⑩	（V）	完答で2点		㉔	（F）	1点
	⑪	（T）	⑫⑬は順不同		㉕	（T）	1点
	⑫	（E）			㉖	（A）	完答で1点
	⑬	（M）			㉗	（O）	
	⑭	（G）	1点		㉘	（A）	完答で1点
					㉙	（D）	

以上